А.Ю.Зайцев

АППРОКСИМАЦИЯ СВЕРТОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ ПРИ ОСЛАБЛЕННЫХ МОМЕНТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В работе автора [4] была доказана теорема, содержащая достаточно общую оценку точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин с помощью естественных приближающих распределений, некоторые из которых являются безгранично делимыми. Эта теорема содержала в качестве несложных следствий ряд известных результатов А.Н.Колмогорова [9], Л.Ле Кама [10], а также классическое неравенство Эссеена, дающее оценку погрешности в центральной предельной теореме (см. [1,14,17]). Цель данной статьи состоит в получении такого обобщения результата работы [4], формулировка которого наряду с неравенством Эссеена включала бы в себя и широкий спектр других общих оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме, компактная формулировка которых дана в работе В.В.Петрова [12] (см. [14, теорема 5, гл.V]).

Введем необходимые обозначения и соглашения. Пусть $\mathfrak{F}$ – множество вероятностных распределений, заданных на борелевской σ-алгебре подмножеств вещественной прямой $\mathbf{R}$, $\mathfrak{D}$ – множество безгранично делимых законов из $\mathfrak{F}$; $E_a \in \mathfrak{F}$ – распределение, сосредоточенное в точке $a \in \mathbf{R}$, $E = E_0$; Φ_σ – нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 $(\sigma \geqslant 0)$; $\mathcal{L}(\xi) \in \mathfrak{F}$ – распределение случайной величины ξ, $I(A)$ – индикаторная функция события A. Для $F, G \in \mathfrak{F}$ будем обозначать $\hat{F}(t)$, $\hat{G}(t)$ – соответствующие характеристические функции; $F(x)$, $G(x)$ – функции распределения, $\rho(F,G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$. При $F \in \mathfrak{F}$, $\lambda > 0$ обозначим $Q(F,\lambda) = \sup_x F\{[x, x+\lambda]\}$ – функцию концентрации, $e(\lambda F) = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m F^m / m! \in \mathfrak{D}$ (произведения и степени мер понимаются в смысле свертки: $FG = F*G$, $G^m = G^{m*}$, $G^0 = E$). Символы C, C_1, C_2 будут использоваться для обозначения абсолютных положительных постоянных, причем одной и той же буквой C могут обозначаться различные постоянные. Для некоторых численнозначных выражений a и b запись $a \asymp b$ будет означать, что $a \leqslant Cb$ и $b \leqslant Ca$. Следуя [8, 14], введем класс $\mathcal{G}$ функций g, заданных на $\mathbf{R}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

а) $g(x)$ – неотрицательная, четная функция, которая положительна при $x \neq 0$ и не убывает при $x \geqslant 0$.

б) функция $x/g(x)$ не убывает при $x > 0$.

Сформулируем теперь основной результат данной статьи. Пусть $g \in \mathfrak{G}$ и распределения $F_i \in \mathfrak{F}$, $i=1,\dots,n$ представлены в виде

$$F_i = (1-p_i)U_i + p_i V_i, \tag{1}$$

где

$$0 \leqslant p_i \leqslant p = \max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i \leqslant 1; \tag{2}$$

$U_i, V_i \in \mathfrak{F}$, причем

$$\sigma_i^2 = (1-p_i)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 U_i\{dx\} < \infty, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x U_i\{dx\} = 0, \tag{4}$$

а распределения V_i произвольны. Таким образом, моментные ограничения налагаются лишь на распределения U_i. При этом исходные распределения F_i могут иметь сколь угодно плохие моментные свойства. Положим

$$\begin{gathered}
\beta_i = \beta_i(g) = (1-p_i)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) U_i\{dx\}, \\
\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2,\ \beta = \beta(g) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i,\ \lambda = \lambda(g) = \min\left\{\sigma, \frac{\beta(g)}{\sigma g(\sigma)}\right\}, \\
W_i = (1-p_i)U_i + p_i E,\ G_i = (1-p_i)E + p_i V_i, \\
W = \prod_{i=1}^{n} W_i,\ G = \prod_{i=1}^{n} G_i,\ W^* = \prod_{i=1}^{n} e(W_i), \\
G^* = \prod_{i=1}^{n} e(G_i) = \prod_{i=1}^{n} e(p_i V_i),\ \mathcal{D}_0 = \prod_{i=1}^{n} F_i,\ \mathcal{D}_1 = WG, \\
\mathcal{D}_2 = \Phi_\sigma G,\ \mathcal{D}_3 = W^* G,\ \mathcal{D}_4 = WG^*,\ \mathcal{D}_5 = \Phi_\sigma G^*, \\
\mathcal{D}_6 = W^* G^* = \prod_{i=1}^{n} e(F_i).
\end{gathered} \tag{5}$$

Очевидно, что $\mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6 \in \mathfrak{D}$.

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия (I) – (5) и $\sigma^2 > 0$ *). Тогда при всех $j = 1, \dots, 6$ справедливо соотношение

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_j) \leqslant C\left(p + \min_{0 \leqslant k \leqslant 6} Q(\mathcal{D}_k, \lambda)\right) \asymp$$
$$\asymp p + \frac{\lambda}{\sigma} \min\left\{Q(G, \sigma),\, Q(G^*, \sigma)\right\}. \tag{6}$$

При $g(x) \equiv |x|$ теорема I превращается в основной результат работы [4]. В [4, 5] подробно комментируется связь результата [4] с предшествующими результатами А.Н.Колмогорова, Л.Ле Кама, К.-Г.Эссеена, Т.В.Арака и автора. Все комментарии, естественно, остаются в силе и для более общей (и более сильной) теоремы I. При $p = 0$ неравенство (6) дает оценку

$$\rho(\mathcal{D}_0, \Phi_\sigma) \leqslant C \min\left\{1, \frac{\beta}{\sigma^2 g(\sigma)}\right\}, \tag{7}$$

совпадающую с основным результатом работы В.В.Петрова [I2]. Напомним, что неравенство (7) в свою очередь представляет собой обобщение результатов А.М.Ляпунова $\left(g(x) \equiv |x|^\delta, 0 < \delta < 1\right)$, К.-Г.Эссеена [I7] ($g(x) \equiv |x|$), Л.В.Осипова [II] ($g(x) \equiv \equiv \min\{|x|, \sigma\}$) и Мелвина Каца [8], рассмотревшего случай одинаковых распределений F_i, $i = 1, \dots, n$, (см. [I4]).

При фиксированном представлении распределений F_i в виде (I) существует в определенном смысле оптимальная функция $g = g_0 \in \mathcal{G}$, минимизирующая правую часть неравенства (6). Эта функция задается формулой $g_0(x) = \min\{|x|, \sigma\}$. Действительно, если g – произвольная функция из $\mathcal{G}$, а ξ_i – случайная величина с распределением $\mathcal{L}(\xi_i) = W_i (i = 1, \dots, n)$, то

$$\beta_i(g) = \mathbf{E}\,\xi_i^2 g(\xi_i) I(|\xi_i| \leqslant \sigma) + \mathbf{E}\,\xi_i^2 g(\xi_i) I(|\xi_i| > \sigma) \geqslant$$
$$\geqslant g(\sigma)\sigma^{-1} \mathbf{E}|\xi_i|^3 I(|\xi_i| \leqslant \sigma) + g(\sigma)\mathbf{E}\,\xi_i^2 I(|\xi_i| > \sigma) =$$
$$= \frac{g(\sigma)}{g_0(\sigma)} \mathbf{E}\,\xi_i^2 g_0(\xi_i) = \frac{g(\sigma)}{g_0(\sigma)} \beta_i(g_0).$$

Тем самым, $\beta(g) \geqslant g(\sigma)\beta(g_0)/g_0(\sigma)$, $\lambda(g) \geqslant \lambda(g_0)$, что и тре-

---

*) Если $\sigma^2 = 0$, то оценка $\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_j) \leqslant Cp$ вытекает из основного результата [3] (см. лемму I настоящей работы).

бовалось установить. Таким образом, если бы мы сформулировали теорему I только для функции $g(x) \equiv g_0(x)$, это не привело бы к потере общности. Использование другой функции $g \in \mathcal{G}$ только ослабляет формулировку теоремы.*) В частности, теорема I является усилением основного результата [4] ($g(x) \equiv |x|$).

При применении теоремы I полезно иметь в виду, что выбор представления распределений F_i в виде (I) находится в нашем распоряжении. При этом различные варианты выбора представления (I) приводят к различным правым частям соответствующих оценок и к различным приближающим распределениям $\mathcal{D}_j$. Проиллюстрируем это высказывание на простейшем примере.

Пусть $F_1 = F_2 = \ldots = F_n$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} F_1\{dx\} < \infty$, где $0 < \delta < 1$. Применяя теперь теорему I при $g(x) \equiv |x|^{\delta}$, $p=0$, мы получим оценку

$$\rho(F_1^n, \Phi_6) \leqslant c_1(F_1)\, n^{-\delta/2}\text{**)}, \tag{8}$$

вытекающую из классического неравенства Ляпунова в центральной предельной теореме (см. [I4 , теорема 6 гл.У]). С другой стороны, выбор $g(x) \equiv |x|$ при подходящем выборе представления (I) дает возможность получить оценку точности безгранично делимой аппроксимации n-кратной свертки F_1^n, имеющую вид

$$\rho(F_1^n, \mathcal{D}) \leqslant c_2(F_1)\, n^{-\frac{2+\delta}{6}}, \tag{9}$$

где $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ (см. [6, 7]). Ясно, что порядок оценки (9) лучше, чем оценки (8). Однако, это достигается за счет усложнения приближающего распределения (в (9) приближающее распределение имеет вид $\mathcal{D}_5$ или $\mathcal{D}_6$, если исходные распределения F_i подходящим образом центрированы).

Доказательство теоремы I аналогично по структуре доказательству основного результата [4] . Будут использованы следующие леммы.

ЛЕММА I [3]. Пусть распределения $G_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \ldots, n$, имеют вид $G_i = (1-p_i)E + p_i V_i$, где $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, $V_i \in \mathfrak{F}$. Тогда

*) По поводу теоремы 5 гл.У [I4] аналогичное рассуждение (в несколько иных обозначениях) проведено в [I5] .

**) Обозначения $c_i(F_1)$, $i = 1,2$, используются для величин, зависящих только от F_1.

$$\rho\left(\prod_{i=1}^{n} G_i, \prod_{i=1}^{n} e(G_i)\right) \leqslant C \max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i .$$

ЛЕММА 2. (см. [I, теорема I.2 гл.Ш]). Пусть $F, G \in \mathfrak{F}$. Тогда для любого $T > 0$ справедливо неравенство

$$\rho(F,G) \leqslant c\left(\int_0^T \left|\frac{\hat{F}(t)-\hat{G}(t)}{t}\right| dt + \min\left\{Q\left(F,\frac{1}{T}\right), Q\left(G,\frac{1}{T}\right)\right\}\right).$$

ЛЕММА 3. [I3] . Пусть ξ_i, $i=1,\dots,n$, - независимые случайные величины, $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $g \in \mathcal{G}$,

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_i^2 g(\xi_i)) < \infty, \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\xi_i^2 > 0, W = \mathcal{L}(\xi_1+\dots+\xi_n).$$

Тогда при всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$|W(x) - \Phi_\sigma(x)| \leqslant \frac{c_1 \beta}{\sigma^2\left(1+\frac{|x|}{\sigma}\right)^2 g\left(\left(1+\frac{|x|}{\sigma}\right)\sigma\right)} .$$

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия леммы 3, $\lambda = \min\left\{\sigma, \frac{\beta}{\sigma g(\sigma)}\right\}$, а $G \in \mathfrak{F}$ - произвольное распределение. Тогда

$$\rho(WG, \Phi_\sigma G) \leqslant c Q(WG,\lambda) \asymp Q(\Phi_\sigma G,\lambda) \asymp \frac{\lambda}{\sigma} Q(G,\sigma). \quad (10)$$

ЛЕММА 5. В условиях теоремы I

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1) \leqslant c\left(p + \min\left\{Q(\mathcal{D}_0,\lambda), Q(\mathcal{D}_1,\lambda)\right\}\right). \quad (11)$$

Уместно остановиться здесь на вероятностном смысле замены распределений F_i на распределения $W_i G_i$ (именно такая замена переводит распределение $\mathcal{D}_0 = \prod_{i=1}^{n} F_i$ в распределение $\mathcal{D}_1$).

Известно, что распределения F_i можно записать в виде $F_i = \mathcal{L}((1-\mu_i)\xi_i + \nu_i\eta_i)$, где ξ_i, η_i, μ_i - независимые в совокупности случайные величины с распределениями $\mathcal{L}(\xi_i) = U_i$, $\mathcal{L}(\eta_i) = V_i$, $\mathcal{L}(\mu_i) = (1-p_i)E + p_i E_1$ и $\mathbf{P}(\nu_i = \mu_i) = 1$. Распределения $W_i G_i$ тоже можно записать в виде $W_i G_i = \mathcal{L}((1-\mu_i)\xi_i + \nu_i\eta_i)$, где векторы и величины $\xi_i, \eta_i, \mu_i, \nu_i$ имеют те же маргинальные распределения, что и в представлении для распределения F_i, но теперь все они независимы в совокупности, в том числе и ν_i от μ_i (см. [2, с.52]).

При доказательстве лемм 4, 5 и теоремы I нам потребуются следующие хорошо известные простейшие свойства равномерного расстояния и функций концентрации, справедливые для любых $F, G, H \in \mathcal{F}$ и $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0$:

$$Q(FG,\gamma) \leqslant \min\{Q(F,\gamma), Q(G,\gamma)\}; \tag{12}$$

$$Q(FG,\gamma_1+\gamma_2) \geqslant Q(F,\gamma_1)\,Q(G,\gamma_2); \tag{13}$$

$$Q(F,\gamma_1) \leqslant (1+[\gamma_1/\gamma_2])\,Q(F,\gamma_2) \tag{14}$$

($[\cdot]$ - целая часть числа);

$$Q(F,\gamma) \leqslant 2\rho(F,G) + Q(G,\gamma); \tag{15}$$

$$\rho(FH,GH) \leqslant \rho(F,G); \tag{16}$$

$$\rho(FG,F) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} Q(F,|y|)\,G\{dy\}. \tag{17}$$

(доказательства большинства из этих неравенств можно найти в [16]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Положим $\varkappa = \dfrac{\beta}{6 g(\sigma)}$, $c_2 = 4\sqrt{2\pi}\, e\, c_1$ и пусть сначала $\sigma \geqslant c_2 \varkappa$. Пусть точка y_0 такова, что $G\{[y_0, y_0+\sigma]\} = Q(G,\sigma)$ (см. [16, с.11]). Используя лемму 3, получаем, что

$$Q(WG, c_2\varkappa) \geqslant WG\{[y_0, y_0+c_2\varkappa]\} \geqslant \int_{y_0}^{y_0+\sigma} W\{[y_0-y, y_0+c_2\varkappa-y]\}\,G\{dy\} \geqslant$$

$$\geqslant G\{[y_0,y_0+\sigma]\} \inf_{y\in[y_0,y_0+\sigma]} W\{[y_0-y,\, y_0+c_2\varkappa-y]\} \geqslant$$

$$\geqslant Q(G,\sigma)\Big(\inf_{y\in[y_0,y_0+\sigma]} \Phi_\sigma\{[y_0-y, y_0+c_2\varkappa-y]\} - \frac{2c_1\varkappa}{\sigma}\Big) \geqslant$$

$$\geqslant Q(G,\sigma)\Big(\frac{e^{-1}c_2\varkappa}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} - \frac{2c_1\varkappa}{\sigma}\Big) = \frac{2c_1\varkappa}{\sigma}\,Q(G,\sigma). \tag{18}$$

Аналогично доказывается, что

$$Q(\Phi_\sigma G, c_2\varkappa) \geqslant \frac{4c_1\varkappa}{\sigma}\,Q(G,\sigma). \tag{19}$$

Еще раз применяя лемму 3, находим, что при всех $x \in \mathbf{R}$

$$|WG(x) - \Phi_\sigma G(x)| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} (W(x-y) - \Phi_\sigma(x-y))\,G\{dy\}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1 \varkappa}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G\{dy\}}{\left(1+\frac{|x-y|}{\sigma}\right)^2} = \frac{c_1 \varkappa}{\sigma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{x+k\sigma}^{x+(k+1)\sigma} \frac{G\{dy\}}{\left(1+\frac{|x-y|}{\sigma}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c_1 \varkappa}{\sigma} Q(G,\sigma) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^2} = \frac{c\varkappa}{\sigma} Q(G,\sigma)$$

и, следовательно,

$$\rho(WG, \Phi_\sigma G) \leqslant \frac{c\varkappa}{\sigma} Q(G,\sigma). \tag{20}$$

Для любого $x \in \mathbf{R}$ мы имеем:

$$\Phi_\sigma G\{[x, x+c_2\varkappa]\} \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{x+k\sigma}^{x+(k+1)\sigma} \Phi_\sigma\{[x-y, x+c_2\varkappa-y]\} G\{dy\} \leqslant$$

$$\leqslant Q(G,\sigma) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup_{y\in(k\sigma,(k+1)\sigma)} \Phi_\sigma\{[y, c_2\varkappa+y]\} \leqslant$$

$$\leqslant Q(G,\sigma) \frac{c_2\varkappa}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(3+2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2/2}\right) = \frac{c\varkappa}{\sigma} Q(G,\sigma). \tag{21}$$

Из (21), (20), (15) следует, что

$$Q(\Phi_\sigma G, c_2\varkappa) \leqslant \frac{c\varkappa}{\sigma} Q(G,\sigma), \tag{22}$$

$$Q(WG, c_2\varkappa) \leqslant \frac{c\varkappa}{\sigma} Q(G,\sigma). \tag{23}$$

Теперь (10) при $\sigma \geqslant c_2\varkappa$ следует из (20),(18),(19),(22),(23), (14), так как в этом случае $\lambda \asymp \varkappa$.

Пусть теперь $\sigma < c_2\varkappa$. Тогда, в силу (17), (14)

$$\rho(WG,G) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} Q(G,|y|) W\{dy\} \leqslant$$

$$\leqslant Q(G,\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{|y|}{\sigma}\right) W\{dy\} \leqslant 2Q(G,\sigma) \tag{24}$$

и, аналогично, $\rho(\Phi_\sigma G, G) \leqslant 2Q(G,\sigma)$ (см. [16, теорема 1.2.3]). Значит

$$\rho(WG, \Phi_\sigma G) \leqslant 4Q(G,\sigma). \tag{25}$$

С помощью неравенства Чебышева легко устанавливается, что

$$W\{(-2\sigma, 2\sigma)\} \geqslant 1/2, \quad \Phi_\sigma\{(-2\sigma, 2\sigma)\} \geqslant 1/2.$$

Используя (13), отсюда получаем, что

$$Q(WG,5\sigma)\geqslant Q(W,4\sigma)\,Q(G,\sigma)\geqslant Q(G,\sigma)/2 \tag{26}$$

$$Q(\Phi_\sigma G,5\sigma)\geqslant Q(G,\sigma)/2\,. \tag{27}$$

Теперь из (25)-(27),(12),(14) следует (10) при $\sigma< c_2\varkappa$, поскольку в этом случае $\lambda\asymp\sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пользуясь леммой 2 и неравенством (14), нетрудно вывести оценку

$$\rho(\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_1)\leqslant c\Biggl(\int_0^{(8\lambda)^{-1}}\Bigl|\frac{\widehat{\mathcal{D}}_0(t)-\widehat{\mathcal{D}}_1(t)}{t}\Bigr|\,dt+ \\ +\min\bigl\{Q(\mathcal{D}_0,\lambda),\,Q(\mathcal{D}_1,\lambda)\bigr\}\Biggr). \tag{28}$$

Очевидно, что
$$|\widehat{\mathcal{D}}_0(t)-\widehat{\mathcal{D}}_1(t)|=$$
$$=\Bigl|\sum_{k=1}^{n}(1-p_k)(1-\widehat{U}_k(t))\,p_k(\widehat{V}_k(t)-1)\prod_{m=1}^{k-1}\widehat{F}_m(t)\prod_{m=k+1}^{n}\widehat{W}_m(t)\widehat{G}_m(t)\Bigr|\leqslant$$
$$\leqslant 2p\sum_{k=1}^{n}(1-p_k)|1-\widehat{U}_k(t)|\prod_{m=1}^{k-1}|\widehat{F}_m(t)|\prod_{m=k+1}^{n}|\widehat{W}_m(t)|\,. \tag{29}$$

Введем симметризованные случайные величины $\psi_k=\eta_k-\xi_k$, где η_k,ξ_k, $k=1,\dots,n$, - такие независимые случайные величины, что $\mathcal{L}(\eta_k)=\mathcal{L}(\xi_k)=U_k$. Применяя стандартные методы, легко показать, что при всех $t\in\mathbf{R}$ справедливы неравенства

$$(1-p_k)|1-\widehat{U}_k(t)|\leqslant\frac{\sigma_k^2t^2}{2}\,, \tag{30}$$

$$|\widehat{U}_k(t)|^2=\mathbf{E}\,e^{it\psi_k}=1-\tfrac{1}{2}\mathbf{E}\,t^2\psi_k^2+ \\ +\mathbf{E}\bigl(e^{it\psi_k}-1-it\psi_k+\tfrac{1}{2}t^2\psi_k^2\bigr)\mathrm{I}(|\psi_k|\leqslant\sigma)+ \\ +\mathbf{E}\bigl(e^{it\psi_k}-1-it\psi_k+\tfrac{1}{2}t^2\psi_k^2\bigr)\mathrm{I}(|\psi_k|>\sigma)\leqslant \\ \leqslant 1-\tfrac{1}{2}t^2\mathbf{E}\,\psi_k^2+2M_k(t), \tag{31}$$

где

$$M_k(t)=\tfrac{1}{12}\mathbf{E}|t\psi_k|^3\mathrm{I}(|\psi_k|\leqslant\sigma)+\tfrac{1}{2}t^2\mathbf{E}\,\psi_k^2\mathrm{I}(|\psi_k|>\sigma). \tag{32}$$

Заметим теперь, что при $0\leqslant u\leqslant 1$, $x\in\mathbf{R}$ из неравенства $u^2\leqslant 1-x$ следует, что $u\leqslant 1-x/2$. Поэтому из (31),(3) вытекает, что при всех $t\in\mathbf{R}$, $k=1,\dots,n$ справедливы неравенства

$$|\hat{u}_k(t)| \le 1 - \frac{1}{2} t^2 \mathbf{D} \eta_k + M_k(t),$$

$$0 \le \max\{|\hat{F}_k(t)|, |\hat{W}_k(t)|\} \le$$

$$\le (1-p_k)|\hat{u}_k(t)| + p_k = 1 + (1-p_k)(|\hat{u}_k(t)| - 1) \le$$

$$\le 1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_k^2 + (1-p_k) M_k(t) \le$$

$$\le \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 \sigma_k^2 + (1-p_k) M_k(t)\right). \tag{33}$$

Из (33), в частности, следует, что

$$-\frac{1}{2} t^2 \sigma_k^2 + (1-p_k) M_k(t) \ge -1. \tag{34}$$

Подставляя оценки (30),(33), в (29) и учитывая (5),(34), получаем, что при всех $t \in \mathbf{R}$

$$|\hat{\mathcal{D}}_0(t) - \hat{\mathcal{D}}_1(t)| \le p\sigma^2 t^2, \tag{35}$$

$$|\hat{\mathcal{D}}_0(t) - \hat{\mathcal{D}}_1(t)| \le p\sigma^2 t^2 \exp\left(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 + M(t)\right), \tag{36}$$

где

$$M(t) = \sum_{k=1}^{n} (1-p_k) M_k(t). \tag{37}$$

Используя определение случайных величин ψ_k и то, что $g(2x) \le \le 2g(x)$, получаем оценку

$$\mathbf{E}\psi_k^2 g(\psi_k) = \mathbf{E}(\eta_k - \xi_k)^2 g(\eta_k - \xi_k)(I(|\eta_k| > |\xi_k|) + I(|\eta_k| \le |\xi_k|)) \le$$

$$\le 8\mathbf{E}\eta_k^2 g(\eta_k) I(|\eta_k| > |\xi_k|) + 8\mathbf{E}\xi_k^2 g(\xi_k) I(|\eta_k| \le |\xi_k|) \le$$

$$\le 16\mathbf{E}\eta_k^2 g(\eta_k), \quad k = 1, \dots, n. \tag{38}$$

Перейдем к непосредственному оцениванию величин $M_k(t)$ и $M(t)$. Предположим сначала, что

$$32\beta \le \sigma^2 g(\sigma). \tag{39}$$

Тогда

$$\lambda = \min\left\{\sigma, \frac{\beta}{\sigma g(\sigma)}\right\} = \frac{\beta}{\sigma g(\sigma)}. \tag{40}$$

В силу (38),(40),(5) и поскольку $g \in \mathcal{G}$, при $|t| \le (8\lambda)^{-1}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}(1-p_k)\mathbf{E}|t\psi_k|^3 I(|\psi_k|\leq\sigma)\leq$$

$$\leq\frac{1}{12}\,\frac{\sigma}{g(\sigma)}\sum_{k=1}^{n}(1-p_k)|t|^3\mathbf{E}\psi_k^2 g(\psi_k)\leq\frac{4}{3}|t|^3\frac{\beta\sigma}{g(\sigma)}\leq$$

$$\leq\frac{1}{6}\sigma^2 t^2. \tag{41}$$

Кроме того, согласно (5) ,(38),(39),

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-p_k)t^2\mathbf{E}\psi_k^2 I(|\psi_k|>\sigma)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2g(\sigma)}\sum_{k=1}^{n}(1-p_k)t^2\mathbf{E}\psi_k^2 g(\psi_k)\leq\frac{8t^2\beta}{g(\sigma)}\leq\frac{1}{4}\sigma^2 t^2. \tag{42}$$

Пользуясь теперь соотношениями (36),(37),(32),(4I),(42), находим, что при $|t|\leq(8\lambda)^{-1}$ имеет место неравенство

$$|\hat{\mathcal{D}}_0(t)-\hat{\mathcal{D}}_1(t)|\leq e p\sigma^2 t^2\exp\left(-\frac{1}{12}\sigma^2 t^2\right). \tag{43}$$

Подставляя (43) в (28), получаем, что неравенство (II) справедливо, если выполняется (39).

Пусть теперь $32\beta>\sigma^2 g(\sigma)$. Тогда $\lambda>\sigma/32$ и, согласно (28),(35),

$$\rho(\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_1)\leq c\left(\int_0^{4\sigma^{-1}} p\sigma^2 t\,dt+\min\{Q(\mathcal{D}_0,\lambda),Q(\mathcal{D}_1,\lambda)\}\right).$$

Тем самым, неравенство (II) доказано в полном объеме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Согласно лемме 5, справедливо неравенство (II). Пусть $\xi_{i1},\xi_{i2},\ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общим распределением $\mathcal{L}(\xi_{ij})=W_i$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots$ Положим $S_{im}=\xi_{i1}+\ldots+\xi_{im}$ и введем события $A_{ij}^{(m)}=\{\omega:|\xi_{ij}(\omega)|=\max_{1\leq k\leq m}|\xi_{ik}(\omega)|\}$. Тогда очевидно, что

$$\mathbf{E}S_{im}^2 g(S_{im})\leq\sum_{j=1}^{m}\mathbf{E}S_{im}^2 g(S_{im})I(A_{ij}^{(m)})\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}m^2\mathbf{E}\xi_{ij}^2 g(m\xi_{ij})\leq m^4\mathbf{E}\xi_{i1}^2 g(\xi_{i1}). \tag{44}$$

Введем случайные величины η_i, такие, что $\mathcal{L}(\eta_i)=e(W_i)$. Нетрудно видеть, что тогда $\mathbf{E}\xi_{ij}=\mathbf{E}\eta_i=0$, $\mathbf{D}\xi_{ij}=\mathbf{D}\eta_i=\sigma_i^2$, $\mathbf{E}\xi_{ij}^2 g(\xi_{ij})=\beta_i$,

$$\beta_i^* = \mathbf{E}\eta_i^2 g(\eta_i) = e^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}\, S_{im}^2 g(S_{im})/m!$$

и, в силу (44),(5),

$$e^{-1}\beta_i \leqslant \beta_i^* \leqslant c\,\beta_i\,,$$

$$\lambda = \min\left\{\sigma, \frac{\beta}{\sigma g(\sigma)}\right\} \asymp \lambda^* = \min\left\{\sigma, \frac{\beta^*}{\sigma g(\sigma)}\right\}, \tag{45}$$

где $\beta^* = \beta_1^* + \ldots + \beta_n^*$. Применяя лемму 4 и учитывая соотношения (45),(I4),(5), получаем, что

$$\rho(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \leqslant c\,Q(\mathcal{D}_1, \lambda), \tag{46}$$

$$\rho(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) \leqslant c\,Q(\mathcal{D}_2, \lambda), \tag{47}$$

$$Q(\mathcal{D}_1,\lambda) \asymp Q(\mathcal{D}_2,\lambda) \asymp Q(\mathcal{D}_3,\lambda) \asymp Q(\mathcal{D}_2,\lambda^*) \asymp \frac{\lambda}{\sigma} Q(G,\sigma). \tag{48}$$

Далее, из леммы I и неравенства (I6) вытекает, что

$$\max\left\{\rho(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_4), \rho(\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_5), \rho(\mathcal{D}_3,\mathcal{D}_6)\right\} \leqslant \rho(G,G^*) \leqslant c\rho. \tag{49}$$

Из (II),(I5),(46)-(49) нетрудно вывести, что

$$\max_{0\leqslant k\leqslant 6} Q(\mathcal{D}_k,\lambda) \leqslant c\,\left(\rho + \min_{0\leqslant k\leqslant 6} Q(\mathcal{D}_k,\lambda)\right), \tag{50}$$

$$Q(G,\sigma) \leqslant c\rho + Q(G^*,\sigma). \tag{51}$$

Теперь утверждение теоремы следует из (II), (46)-(5I).

Литература

I. А р а к Т.В., З а й ц е в А.Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. - Труды МИАН, 1986, т.174, 216 с.

2. A r a u j o A., G i n é E. The central limit theorem for real and Banach valued random variables. N.Y.: Wiley, 1980.

3. З а й ц е в А.Ю. О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малыми вероятностями, с помощью сопровождающих законов. -Теория вероятн. и ее примен., 1983, т.28, № 4, с.625-636.

4. З а й ц е в А.Ю. О равномерной аппроксимации функций рас-

пределения сумм независимых случайных величин. - Теория вероятн. и ее примен., 1987, т.32, № 1, с.45-52.

5. Z a i t s e v A.Yu. On the uniform approximation of distribution functions of sums of independent non-identically distributed random variables. - In: Proceedings of the Ist World Congress of the Bernoulli Society, v.2, Utrecht: VSP, 1987, p.697-700.

6. З а й ц е в А.Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных векторов. - Дис. на соиск. уч.ст.д-ра физ.-матем.наук. Л.: ЛОМИ, 1988.

7. З а й ц е в А.Ю. Аппроксимация сверток сопровождающими законами при моментных ограничениях. - В сб.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып.3. Л.: ЛГУ,1991.

8. K a t z M. Note one the Berry-Esseen theorem. - Ann.Math. Statist., 1963, v.34, N 3, p.1107-1108.

9. К о л м о г о р о в А.Н. О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями. -Труды Моск.матем.об-ва, 1963, т.12, с.437-451.

10. L e C a m L. On the distribution of sums of independent random variables. - In: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume). Berlin: Springer, 1965, p.179-202.

11. О с и п о в Л.В. Уточнение теоремы Линдеберга. - Теория вероятн. и ее примен., 1966, т.11, № 2, с.339-342.

12. П е т р о в В.В. Одна оценка отклонения суммы независимых случайных величин от нормального закона. - Докл.АН СССР, 1965, т.160, № 5, с.1013-1015.

13. П е т р о в В.В. Одна предельная теорема для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин. - В кн.: Исследования по теории вероятностных распределений.IV. - Зап. научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.85, с.188-192.

14. П е т р о в В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.

15. С т у д н е в Ю.П. Замечание по поводу теоремы Каца-Петрова. - Теория вероятн. и ее примен., 1965, т.10, № 4, с.751-753.

16. Х е н г а р т н е р В., Т е о д о р е с к у Р. Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 176 с.

17. E s s e e n C.-G. Fourier analysis of distribution functions: A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. - Acta Math., 1945, v.77, p.1-125.