Л. В. Розовский, Еще раз о скорости сходимости в слабом законе больших чисел, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1992, том 194, 138–140

Л.В.Розовский

ЕЩЕ РАЗ О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В СЛАБОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим последовательность серий $\{X_{nk}, k\geqslant 1; n=1,2,\ldots\}$ независимых в каждой серии случайных величин и положим $\overline{S}_n=\sum_{k\geqslant 1}\overline{X}_{nk}$ где $\overline{X}_{nk}=X_{nk}-a_{nk}$, а $a_{nk}=E|X_{nk}|I[|X_{nk}|\leqslant 1]$. Пусть, кроме того $h_0(z)=z^2/(1+z^2)$ и $\Gamma_n=\sum_{k\geqslant 1} E\, h_0(\overline{X}_{nk})$. В [I] было показано, что если

$$\lim_{n\to\infty}\sup\ \sup_{k\geqslant 1}|a_{nk}|\leqslant \alpha<1 \tag{I}$$

и

$$\Gamma_n\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{2}$$

то

$$E\, h_0(\overline{S}_n)=(1+o(1))\Gamma_n,\ n\to\infty. \tag{3}$$

В настоящей заметке приводится обобщение этого результата.

<u>ТЕОРЕМА I.</u> Пусть характеристическая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям $\lim_{|t|\to\infty}\sup|f(t)|<1$ и $f''(0)<\infty$ (первое условие обычно называется условием (C) Крамера, второе - равносильно ограниченности второго момента у соответствующей функции $f(t)$ случайной величины).

Если выполнены условия (I) и (2), то

$$|E(1-f(\overline{S}_n))|=(1+o(1))\left|\sum_{k\geqslant 1}E(1-f(\overline{X}_{nk}))\right|,\ n\to\infty. \tag{4}$$

Соотношение (3) вытекает из (4) при $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\delta\in[0,1]$. Положим $h_\delta(z)=(z^2/(1+z^2))^{1+\delta}$. Если выполнены условия (I), (2) и

$$\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{k\geqslant 1}E\, h_\delta(\overline{X}_{nk})/\Gamma_n>0, \tag{5}$$

то

$$E\, h_\delta(\overline{S}_n)=(1+o(1))\sum_{k\geqslant 1}E\, h_\delta(\overline{X}_{nk}),\ n\to\infty. \tag{6}$$

Оценка (3) является следствием теоремы 2 при $\delta=0$. Отметим, что условие (5) при $\delta>0$ выполняется, если $\overline{X}_{nk}=\frac{1}{B_n}X_k$, где (X_k) – последовательность симметричных одинаково распределенных случайных величин, принадлежащих области притяжения некоторого устойчивого закона.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\delta>0$ условие (5) в теореме 2 можно заменить более слабым условием

$$\liminf_{n\to\infty} L_{n,1+\delta}=\infty, \tag{7}$$

где $L_{n,1+\delta}=\sum_{k\geq 1} E\,h_\delta(\overline{X}_{nk})/\Gamma_n^{1+\delta}$. При этом условие (7) близко к необходимому. Во всяком случае, из (6) вытекает, что $\liminf\limits_{n\to\infty} L_{n,1+\delta}\geq 1$.

Доказательства сформулированных результатов существенным образом используют работу [I].

ЛЕММА. Пусть $a_n=\max\limits_k |a_{nk}|$,

$$c(t)=(2+2a_n+a_n^2)\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{2+|t|a_n}{(1-a_n)}\right),$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dg(x),$$

где $g(z)$ – некоторая функция ограниченной вариации. Тогда

$$\Big|E\big(h(0)-h(\overline{S}_n)\big)-\sum_{k\geq 1}E\big(h(0)-h(\overline{X}_{nk})\big)\Big|\leq$$

$$\leq\frac{5e}{2}\left(\int\limits_{c(t)\Gamma_n\leq\frac{1}{2}}(c(t)\Gamma_n)^2|dg(t)|+\int\limits_{c(t)\Gamma_n>\frac{1}{2}}c(t)\Gamma_n|dg(t)|\right). \tag{8}$$

Лемма доказывается с помощью равенства Парсеваля и [I, лемма I и (I7)].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть выполняются условия теоремы I и $g(x)$ – функция распределения, которая соответствует характеристической функции $f(t)$. Тогда (см. [2], гл.I, т.3 и ниже) при всех t и некотором $\varepsilon>0$ $1-\mathrm{Re}\,f(t)\geq\varepsilon\,h_0(t)$ и, следовательно, $\left|\sum\limits_{k\geq 1}E(1-f(\overline{X}_{nk})\right|\geq\sum\limits_{k\geq 1}E(1-\mathrm{Re}\,f(\overline{X}_{nk}))\geq\varepsilon\Gamma_n$.

Учитывая то, что $f''(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dg(x)<\infty$, отсюда и из (8) (при $h=f$) легко получим соотношение (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 И ЗАМЕЧАНИЯ. Равенство (6) при $\delta=0$ совпадает с (3), поэтому в дальнейшем предполагается, что $\delta>0$.

Пусть $h(t)=h_{1+\delta}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}p(x)\,dx$. Очевидно,

$$-x^2p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}h''(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos tx\, h''(t)dt.$$

При помощи стандартного асимптотического анализа последнего интеграла (интегрирование по частям, разбиение полуоси на интервалы $[0,\varepsilon)$ и (ε,∞) и т.п.), покажем, что

$$x^2p(x)=(c_\delta+o(1))\,x^{-1-\delta},\ x\to\infty. \tag{9}$$

Воспользовавшись соотношениями (9) и (8) при $dg(x)=p(x)\,dx_1$, получим

$$E h_\delta(\bar S_n)=\sum_{k\geq 1} E h_\delta(\bar X_{nk})+\theta\,\Gamma_n^{1+\delta},\ n\to\infty.$$

Отсюда и из условия (7) следует равенство (6). Если же имеет место (6) (и (I), (2)), то (см. также (3))

$$(1+o(1))L_{n,1+\delta}=E h_\delta(\bar S_n)/\Gamma_n^{1+\delta}=$$
$$=(1+o(1))E h_\delta(\bar S_n)/(E h_0(\bar S_n))^{1+\delta},\ n\to\infty.$$

Остается при $Y=h_0(\bar S_n)$ воспользоваться моментным неравенством $EY\leq(EY^{1+\delta})^{\frac{1}{1+\delta}}$.

Литература

1. Р о з о в с к и й Л.В. Скорость сходимости в слабом законе больших чисел. - Теория вероятн. и ее примен., 1989, т.34, №2, с.392-395.
2. П е т р о в В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.