ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2023, т. 323, с. 17–52

УДК 517.51

Иерархические операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами*,**

А. Д. Бендиков[а], **А. А. Григорьян**[б], **С. А. Молчанов**[в,г]

Поступило 01.11.2022; после доработки 25.07.2023; принято к публикации 27.07.2023

Рассматривается оператор $H = L + V$, который представляет собой возмущение оператора Тейблсона–Владимирова $L = \mathfrak{D}^\alpha$ с помощью потенциала $V(x) = b\|x\|^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$ и $b \geq b_*$. Доказано, что оператор H замыкаем и его минимальное замыкание является неотрицательно определенным самосопряженным оператором (при этом критическое значение b_* зависит от α). Хотя оператор H неотрицательно определен, потенциал $V(x)$ может принимать отрицательные значения, например, при $b_* < 0$ для всех $0 < \alpha < 1$. Для уравнения $Hu = v$ существует функция Грина $g_H(x, y)$ — интегральное ядро оператора H^{-1}. Получены точные нижняя и верхняя оценки отношения функций Грина $g_H(x, y)$ и $g_L(x, y)$.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4356

1. ВВЕДЕНИЕ

Для самоподобных фракталов типа треугольника Серпинского спектральная теория соответствующих лапласианов достаточно хорошо изучена. Она обладает несколькими важными особенностями: канторовой структурой существенного спектра и, как следствие, большим количеством спектральных лакун, наличием бесконечного числа собственных значений, каждое из которых имеет бесконечную кратность и для которых собственные состояния имеют

*Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* Hierarchical Schrödinger operators with singular potentials // Proc. Steklov Inst. Math. 2023. V. 323.

**Исследование первых двух авторов выполнено при финансовой поддержке Немецкого научно-исследовательского общества (DFG, проект SFB 1283/2 2021 – 317210226). Исследование третьего автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда №17-11-01098, https://rscf.ru/project/17-11-01098/.

[а]Institute of Mathematics, Wroclaw University, Wroclaw, Poland.

[б]Department of Mathematics, University of Bielefeld, Bielefeld, Germany.

[в]Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC, USA.

[г]Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия.

E-mail: bendikov@math.uni.wroc.pl (А.Д. Бендиков), grigor@math.uni-bielefeld.de (А.А. Григорьян), smolchan@uncc.edu (С.А. Молчанов).

© А.Д. Бендиков, А.А. Григорьян, С.А. Молчанов, 2023

компактные носители, нерегулярно меняющимися ядрами теплопроводности, которые содержат члены с колебаниями порядка $\log t$, и т.д. (см. работы П. Грабнера и В. Вёсса [21], Г. Дерфеля, П. Грабнера и Ф. Фогля [16] и А. Бендикова, В. Цыгана и В. Вёсса [4]).

Упомянутые выше спектральные свойства в очень точной форме проявляются для лапласиана Тейблсона–Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$ — оператора дробного дифференцирования порядка α. Этот оператор можно ввести несколькими различными способами, например как $L^2(\mathbb{Q}_p)$-мультипликатор, где $\mathbb{Q}_p$ — кольцо p-адических чисел (см. работы М. Тейблсона [36], В.С. Владимирова, И.В. Воловича, Е.И. Зеленова [37–39] и А.Н. Кочубея [26]).

Оператор $\mathfrak{D}^\alpha$ унитарно эквивалентен гиперсингулярному интегральному оператору L, действующему в $L^2(0,\infty)$:

$$Lf(x) = \int_0^\infty \bigl(f(x) - f(y)\bigr)\, J(x,y)\, dy; \tag{1.1}$$

ядро $J(x,y)$ будет указано ниже в этом разделе. За подробностями мы отсылаем читателя к работам [3, 9, 27] (см. также [2, 6–8, 15, 17, 31, 32, 35, 40]).

Кратко обсудим структуру оператора L. Эквивалентность $\mathfrak{D}^\alpha \simeq L$ будет следовать из того, что $\mathfrak{D}^\alpha$ и L являются существенно самосопряженными операторами, имеющими чисто точечный спектр, состоящий из собственных значений бесконечной кратности с нулем в качестве единственной предельной точки; как подмножества в $[0,+\infty)$ их спектры совпадают. Подробное изложение заинтересованный читатель может найти в [3].

Ультраметрическое пространство. Зафиксируем целое число $p \geq 2$ и рассмотрим семейство разбиений $\{\Pi_r : r \in \mathbb{Z}\}$ множества $X = [0,+\infty)$, где каждое Π_r состоит из всех p-адических интервалов $I = [kp^r, (k+1)p^r)$. Число r будем называть рангом разбиения Π_r (соответственно рангом интервала $I \in \Pi_r$). Каждый интервал ранга r представляет собой объединение p непересекающихся интервалов ранга $r-1$. Каждая точка $x \in X$ принадлежит некоторому интервалу $I_r(x)$ ранга r, а пересечение всех интервалов $I_r(x)$, $r \in \mathbb{Z}$, равно $\{x\}$.

Иерархическое расстояние $d(x,y)$ определяется как нуль, если $x = y$, и как длина $l(I)$ минимального p-адического интервала I, содержащего обе точки x и y, в противном случае. Так как любые две точки $x \neq y$ принадлежат некоторому p-адическому интервалу, то $d(x,y) < \infty$. Очевидно, $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, и $d(x,y) = d(y,x)$. Более того, для произвольных x, y и z выполняется *ультраметрическое неравенство* (более сильное, чем неравенство треугольника)

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}. \tag{1.2}$$

Ультраметрическое пространство (X,d) является *полным сепарабельным некомпактным собственным* метрическим пространством. Множество всех открытых шаров в (X,d) счетно и совпадает с множеством всех p-адических интервалов. В частности, любые два шара либо не пересекаются, либо являются вложенными (один является подмножеством другого). Таким образом, (X,d) — вполне несвязное топологическое пространство.

Борелевская σ-алгебра, порожденная ультраметрическими шарами, совпадает с борелевской σ-алгеброй, порожденной евклидовыми шарами.

Как следует из общей теоремы М. Дель Муто и А. Фига-Таламанки [15, Sect. 2], некомпактное ультраметрическое пространство (X,d) изометрически изоморфно кольцу p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, снабженному своей канонической ультраметрикой $\|x-y\|_p$. См. теорему 2.2 ниже и комментарии после нее о возможном отождествлении однородного ультраметрического пространства с вполне несвязной локально компактной абелевой группой.

Иерархический лапласиан. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех локально постоянных функций с компактным носителем и $\kappa \in (0,1)$ — фиксированный параметр. *Иерархический лапласиан* L

определяется как сумма лапласианов (т.е. марковских генераторов с обратным знаком) L_r чисто скачкообразных процессов[1]:

$$(Lf)(x) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(1-\kappa)\kappa^{r-1}\left(f(x) - \frac{1}{l(I_r(x))}\int\limits_{I_r(x)} f\,dl\right)}_{(L_r f)(x)}. \tag{1.3}$$

Ряд в (1.3), вообще говоря, расходится, но для любой функции $f \in \mathcal{D}$ он конечен и принадлежит всем пространствам $L^p(0,\infty)$, $p \geq 1$.

Поскольку каждый "элементарный" лапласиан L_r можно записать в виде

$$L_r f(x) = \int\limits_0^\infty \big(f(x) - f(y)\big) J_r(x,y)\,dy, \qquad J_r(x,y)\,dy = \underbrace{(1-\kappa)\kappa^{r-1}}_{\lambda_r(x)} \underbrace{\frac{\mathbf{1}_{I_r(x)}(y)}{l(I_r(x))}\,dy}_{\mathcal{U}_r(x,dy)},$$

оператор L совпадает с гиперсингулярным интегральным оператором

$$Lf(x) = \int\limits_0^\infty \big(f(x) - f(y)\big) J(x,y)\,dy, \qquad J(x,y) = \frac{\kappa^{-1}-1}{1-\kappa p^{-1}}\,\frac{1}{(d(x,y))^{1+\alpha}}, \quad \alpha = -\frac{\log\kappa}{\log p}.$$

Оператор L допускает полную систему собственных функций с компактным носителем. Действительно, рассмотрим p-адический интервал I ранга r, и пусть $I_1, I_2, \ldots, I_p$ — его p-адические подынтервалы ранга $r-1$. Рассмотрим p функций

$$\psi_{I_i} = \frac{\mathbf{1}_{I_i}}{l(I_i)} - \frac{\mathbf{1}_I}{l(I)}.$$

Каждая функция ψ_{I_i} принадлежит $\mathcal{D}$ и удовлетворяет уравнению

$$L\psi_{I_i} = \kappa^{r-1}\psi_{I_i}.$$

Когда I пробегает множество всех p-адических интервалов, набор собственных функций ψ_{I_i} образует полную систему в $L^2(0,\infty)$. В частности, L — существенно самосопряженный оператор, имеющий чисто точечный спектр

$$\operatorname{Spec}(L) = \{0\} \cup \{\kappa^r : r \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждое собственное значение κ^r имеет бесконечную кратность. В частности, спектр оператора L совпадает с его существенной частью. Отсюда следует, что, записывая κ как $p^{-\alpha}$, мы можем отождествить оператор L с оператором Тейблсона–Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$ — оператором дробного дифференцирования порядка α, действующим в $L^2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\mathfrak{D}^\alpha\psi(x) = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{\psi(x)-\psi(y)}{\|x-y\|_p^{1+\alpha}}\,dm(y).$$

[1] Марковский процесс $\{X(t), P_x\}$ с пространством состояний $\mathcal{X}$ называется чисто скачкообразным процессом, если, начиная с любой точки $x \in \mathcal{X}$, все его траектории постоянны, за исключением изолированных скачков, и непрерывны справа. Основными данными, определяющими процесс, являются (i) функция $0 < \lambda(x) < \infty$ и (ii) марковское ядро $\mathcal{U}(x,dy)$, удовлетворяющее равенству $\mathcal{U}(x,\{x\}) = 0$. Его лапласиан (т.е. марковский генератор с обратным знаком) имеет вид

$$Lf(x) = \int\limits_{\mathcal{X}} \big(f(x) - f(y)\big)\lambda(x)\mathcal{U}(x,dy).$$

Интуитивно понятно, что частица, стартовавшая из точки x, остается там экспоненциально распределенное время с параметром $\lambda(x)$, после чего "перепрыгивает" в новую позицию x' согласно распределению $\mathcal{U}(x,\cdot)$ и т.д.

К общей теории. К настоящему времени имеется ряд публикаций о спектре иерархического лапласиана, действующего в общем ультраметрическом пространстве с мерой (X, d, m) (см. [1, 2, 6–9, 31, 32]). Иерархический оператор типа Шрёдингера (предмет настоящей работы) изучался в [13, 18, 32–34], а также в работах [28–30] (иерархическая решетка Дайсона) и [26, 38, 39] (поле p-адических чисел).

Согласно общей теории, развитой А.Д. Бендиковым, А.А. Григорьяном, П. Крупским, К. Питтэ и В. Вёссом [7–9], любой иерархический лапласиан L действует в $L^2(X, m)$ и является существенно самосопряженным неотрицательно определенным оператором. Его можно представить в виде гиперсингулярного интегрального оператора

$$Lf(x) = \int_X \big(f(x) - f(y)\big) J(x, y)\, dm(y). \tag{1.4}$$

Соответственно квадратичная форма $Q_L(u, u) := (L^{1/2}u, L^{1/2}u)_{L^2(X,m)}$ является регулярной формой Дирихле с представлением

$$Q_L(u, u) = \frac{1}{2} \int_{X\times X} \big(f(x) - f(y)\big)^2 J(x, y)\, dm(x)\, dm(y). \tag{1.5}$$

Оператор L имеет чисто точечный спектр, а его марковская полугруппа $(e^{-tL})_{t>0}$ обладает непрерывной переходной плотностью $p(t, x, y)$ относительно m. В терминах некоторой (неразрывно связанной с L) ультраметрики $d_*(x, y)$ функции $J(x, y)$ и $p(t, x, y)$ можно представить в виде

$$J(x, y) = \int_0^{1/d_*(x,y)} N(x, \tau)\, d\tau, \qquad p(t, x, y) = t \int_0^{1/d_*(x,y)} N(x, \tau) \exp(-t\tau)\, d\tau. \tag{1.6}$$

Функция $N(x, \tau)$, называемая *спектральной функцией*, будет указана в следующем разделе.

План статьи. Опишем структуру основной части статьи. В разд. 2 мы вводим понятие однородного иерархического лапласиана L и перечисляем его основные свойства, включая следующие: спектр оператора L является чисто точечным; все собственные значения оператора L имеют бесконечную кратность и им соответствуют собственные функции с компактными носителями; ядро теплопроводности $p(t, x, y)$ существует и является непрерывной функцией с определенными асимптотическими свойствами. Основные факты, связанные с ультраметрическим анализом ядер теплопроводности, читатель может найти в работах [7–9].

В качестве примера мы рассмотрим случай, когда $X = \mathbb{Q}_p$ — кольцо p-адических чисел, наделенное своей стандартной ультраметрикой $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|_p$ и нормированной мерой Хаара m. Иерархический лапласиан L в этом примере совпадает с оператором Тейблсона–Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$ — оператором дробного дифференцирования порядка α (см. [26, 37, 39]). Наиболее полными источниками основных определений и фактов, связанных с p-адическим анализом, являются монографии [25] и [36].

В следующем разд. 3 мы рассмотрим оператор типа Шрёдингера $H = \mathfrak{D}^\alpha + V$ с потенциалом $V \in L^1_{\mathrm{loc}}$, имеющим локальную особенность, например $V(x) = b\|x\|_p^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Основная цель здесь — доказать, что при некоторых условиях на V квадратичная форма

$$Q(u, u) := Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(u, u) + Q_V(u, u),$$

где

$$Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(u, u) = \int \big|\mathfrak{D}^{\alpha/2}u\big|^2\, dm, \qquad Q_V(u, u) = \int |u|^2 V\, dm,$$

полуограничена и, следовательно, определяет самосопряженный оператор H. При определенных условиях на V мы докажем, что множество $\mathcal{D}$ локально постоянных функций с компактным носителем действительно является ядром формы для $Q(u,u)$.

Мы также докажем несколько результатов об отрицательной части спектра оператора H. Например, если $V \in L^p$ для некоторого $p > 1/\alpha$, то оператор H имеет существенный спектр, совпадающий со спектром оператора $\mathfrak{D}^\alpha$. В частности, если H имеет какой-либо отрицательный спектр, то он состоит из последовательности отрицательных собственных значений конечной кратности. Если эта последовательность бесконечна, то она стремится к нулю.

В заключительном разд. 4 мы рассматриваем оператор $H = \mathfrak{D}^\alpha + b\|x\|_p^{-\alpha}$, предполагая, что $0 < \alpha < 1$ и $b \geq b_*$, где b_* — критическое значение, которое будет указано позже. Мы докажем, что уравнение $Hu = v$ обладает фундаментальным решением $g_H(x,y)$ (которое является функцией Грина оператора H). Функция $g_H(x,y)$ непрерывна и принимает конечные значения вне диагонали. Пусть $g_{\mathfrak{D}^\alpha}(x,y)$ — функция Грина оператора $\mathfrak{D}^\alpha$. Основным результатом этого раздела является следующее утверждение: для любого $b \geq b_*$ существует β, $(\alpha-1)/2 \leq \beta < \alpha$, такое, что

$$\frac{g_H(x,y)}{g_{\mathfrak{D}^\alpha}(x,y)} \asymp \left(\frac{\|x\|_p}{\|y\|_p} \wedge \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p}\right)^\beta,$$

где знак $\asymp$ подразумевает, что отношение левой и правой частей ограничено снизу и сверху положительными константами. Этот результат необходимо сравнить с оценками функции Грина для операторов Шрёдингера на полных римановых многообразиях (см. [22]).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Однородное ультраметрическое пространство. Пусть (X,d) — локально компактное сепарабельное ультраметрическое пространство. Напомним, что метрика d называется *ультраметрикой*, если она удовлетворяет ультраметрическому неравенству

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}, \tag{2.1}$$

которое сильнее обычного неравенства треугольника. Основное следствие ультраметрического свойства состоит в том, что каждый открытый шар является замкнутым множеством. При этом каждую точку x шара B можно рассматривать как его центр, а любые два шара A и B либо не пересекаются, либо являются вложенными (один является подмножеством другого). В частности, ультраметрическое пространство (X,d) вполне несвязно (см. [9] и цитируемую там литературу). В этой статье мы предполагаем, что ультраметрическое пространство (X,d) *собственное*, т.е. каждый замкнутый шар является компактом.

Любому ультраметрическому пространству (X,d) можно стандартным образом поставить в соответствие дерево $\mathcal{T}$. Вершинами дерева являются метрические шары. Дерево $\mathcal{T}$ будет ультраметрическим пространством, если расстояние между двумя шарами u и v определить как диаметр $\operatorname{diam}(u \curlywedge v)$ минимального шара $u \curlywedge v$, содержащего оба шара u и v. Границу $\partial\mathcal{T}$ можно отождествить с одноточечной компактификацией $X \cup \{\varpi\}$ пространства X.

Описание связи между ультраметрическим пространством и деревом его метрических шаров можно найти в [9].

Определение 2.1. Ультраметрическое пространство с мерой (X,d,m) называется *однородным*, если группа его изометрий действует транзитивно и сохраняет меру.

Следующий замечательный результат установлен М. Дель Муто и А. Фига-Таламанкой [15, Sect. 2].

Теорема 2.2. *Любое однородное ультраметрическое пространство с мерой (X,d,m) можно отождествить с некоторой локально компактной абелевой группой, наделенной трансляционно инвариантной ультраметрикой и мерой Хаара.*

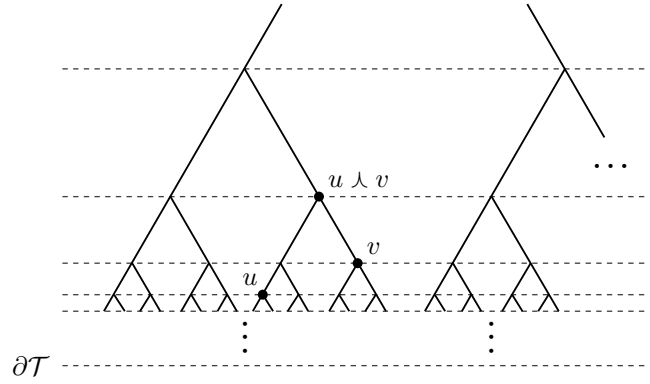

Рис. 1. Дерево шаров со степенями исхода вершин $a_n = 2$

Например, множество $X = [0, +\infty)$, наделенное ультраметрической структурой, порожденной p-адическими интервалами, и нормированной мерой Лебега, является некомпактным однородным ультраметрическим пространством с мерой. Его дерево шаров, очевидно, совпадает с деревом шаров кольца p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, поэтому эти два однородных ультраметрических пространства с мерой изометрически изоморфны.

Отождествление в теореме 2.2 не является однозначным. Один из возможных способов определить такое отождествление — выбрать последовательность $a = \{a_n\}$ степеней исхода вершин, соответствующую дереву шаров $\mathcal{T}$ (рис. 1). Эта последовательность двусторонняя, если X некомпактно и совершенно (не имеет изолированных точек), и односторонняя, если X компактно и совершенно или X дискретно. В первом случае мы отождествляем X с кольцом a-адических чисел Ω_a, во втором случае — с кольцом целых a-адических чисел $\Delta_a \subset \Omega_a$, в третьем случае — с дискретной группой $[\Omega_a : \Delta_a]$. Отметим, что $\Omega_a = \mathbb{Q}_p$ — кольцо p-адических чисел (соответственно $\Delta_a = \mathbb{Z}_p$ — кольцо p-адических чисел), если все числа a_n одинаковы и равны p. Группа $[\mathbb{Q}_p : \mathbb{Z}_p]$ — это просто бесконечное произведение циклических групп Z_p порядка p.

За подробным описанием специальных групп Ω_a, Δ_a и $[\Omega_a : \Delta_a]$ мы отсылаем читателя к монографии Э. Хьюитта и К. Росса [23].

2.2. Однородный иерархический лапласиан. Пусть (X, d, m) — некомпактное однородное ультраметрическое пространство с мерой. Пусть $\mathcal{B}$ — множество всех открытых шаров, $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}$ — множество шаров с центром в x и $C\colon \mathcal{B} \to (0, \infty)$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $C(A) = C(B)$ для любых двух шаров A и B одинакового диаметра;

(ii) $\lambda(B) := \sum_{T \in \mathcal{B}\colon B \subseteq T} C(T) < \infty$ для всех $B \in \mathcal{B}$;

(iii) $\sup_{B \in \mathcal{B}(x)} \lambda(B) = \infty$ для любой неизолированной точки x.

Класс функций $C(B)$, удовлетворяющих этим условиям, достаточно богат; например, можно взять

$$C(B) = \left(\frac{1}{m(B)}\right)^{\alpha} - \left(\frac{1}{m(B')}\right)^{\alpha}$$

для любых двух ближайших (соседних) шаров $B \subset B'$. В этом случае $\lambda(B) = (1/m(B))^{\alpha}$.

Однородный иерархический лапласиан L определяется (поточечно) как

$$Lf(x) := \sum_{B \in \mathcal{B}(x)} C(B) \left(f(x) - \frac{1}{m(B)} \int\limits_B f \, dm \right). \tag{2.2}$$

В общем случае ряд в (2.2) расходится, но для $f \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — множество всех локально постоянных функций с компактным носителем, он сходится в банаховых пространствах $L^p(X, m)$, $1 \le p < \infty$, и в $C_\infty(X)$.

Выберем любые два ближайших соседних шара $B \subset B'$ и положим

$$f_B = \frac{\mathbf{1}_B}{m(B)} - \frac{\mathbf{1}_{B'}}{m(B')}. \tag{2.3}$$

Тогда ясно, что $f_B \in \mathcal{D}$, и можно проверить, что

$$Lf_B(x) = \lambda(B')f_B(x). \tag{2.4}$$

Поскольку пара $B \subset B'$ пробегает все ближайшие соседние шары в $\mathcal{B}$, система $\{f_B \colon B \in \mathcal{B}\}$ полна. В частности, мы заключаем, что $L \colon \mathcal{D} \to L^2(X, m)$ — существенно самосопряженный оператор.

Внутренняя ультраметрика $d_*(x, y)$, ассоциированная с L, определяется следующим образом:

$$d_*(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{если } \ x = y, \\ \dfrac{1}{\lambda(x \curlywedge y)}, & \text{если } \ x \ne y, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $x \curlywedge y$ — минимальный шар, содержащий обе точки x и y. В частности, для любого неодноэлементного шара B имеем

$$\lambda(B) = \frac{1}{\operatorname{diam}_*(B)}. \tag{2.6}$$

Спектральная функция $\tau \to N(\tau)$ (см. (1.6)) определяется как непрерывная слева ступенчатая функция со скачками в точках $\lambda(B)$ и со значениями

$$N(\lambda(B)) = \frac{1}{m(B)}.$$

Функция объема $V(r)$ определяется как $V(r) = m(B)$, где шар B имеет d_*-радиус r. Легко понять, что

$$N(\tau) = \frac{1}{V(1/\tau)}. \tag{2.7}$$

Марковская полугруппа $P_t = e^{-tL}$, $t > 0$, обладает непрерывной плотностью $p(t, x, y)$ относительно m; мы называем ее *ядром теплопроводности*. Функцию $p(t, x, y)$ можно представить в виде (1.6).

При $\lambda > 0$ марковская резольвента $G_\lambda = (\lambda + L)^{-1}$ обладает непрерывным строго положительным интегральным ядром $g(\lambda, x, y)$. Оператор G_λ корректно определен при $\lambda = 0$ (т.е. марковская полугруппа $(P_t)_{t>0}$ невозвратна) тогда и только тогда, когда для некоторых (или, что то же самое, для всех) $x \in X$ обратная величина к функции объема $\tau \to 1/V(\tau)$ интегрируема в бесконечности. Интегральное ядро $g(x, y) := g(0, x, y)$, называемое также функцией Грина, имеет вид

$$g(x, y) = \int_r^{+\infty} \frac{d\tau}{V(\tau)}, \qquad r = d_*(x, y). \tag{2.8}$$

При некоторых тауберовых условиях оно принимает вид

$$g(x, y) \asymp \frac{r}{V(r)}, \qquad r = d_*(x, y). \tag{2.9}$$

2.3. Подчиненность. Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — возрастающий гомеоморфизм. Для любых двух ближайших соседних шаров $B \subset B'$ определим

$$C(B) = \Phi\biggl(\frac{1}{m(B)}\biggr) - \Phi\biggl(\frac{1}{m(B')}\biggr). \tag{2.10}$$

Пусть L_Φ — иерархический лапласиан, соответствующий $C(B)$. Имеют место следующие свойства:

(i) $\lambda(B) = \Phi(1/m(B))$; в частности, лапласианы L_Φ и L_{Id} связаны уравнением $L_\Phi = \Phi(L_{\mathrm{Id}})$;[2]

(ii) $d_*(x,y) = 1/\Phi(1/m(x \curlywedge y))$;

(iii) $V(r) \le 1/\Phi^{-1}(1/r)$;

(iv) $V(r) \asymp 1/\Phi^{-1}(1/r)$ при условии, что как Φ, так и Φ^{-1} удовлетворяют условию удвоения и неравенство $m(B') \le Cm(B)$ выполнено для некоторого $C > 0$ и всех ближайших соседних шаров $B \subset B'$. В частности, в этом случае мы имеем

$$p_\Phi(t,x,y) \asymp t \min\biggl\{\frac{1}{t}\,\Phi^{-1}\biggl(\frac{1}{t}\biggr), \frac{1}{m(x \curlywedge y)}\,\Phi\biggl(\frac{1}{m(x \curlywedge y)}\biggr)\biggr\}.$$

2.4. Мультипликаторы. Как частный случай общей конструкции рассмотрим кольцо p-адических чисел $X = \mathbb{Q}_p$, снабженное стандартной ультраметрикой $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|_p$. Заметим, что, как уже было указано во введении, ультраметрические пространства $(\mathbb{Q}_p, \mathrm{d})$ и $([0,\infty), d)$ с неевклидовой метрикой d изометрически изоморфны (изометрию можно установить путем отождествления их деревьев метрических шаров).

Пусть $\mathcal{F}\colon f \to \widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Известно (см. [26, 36, 39]), что $\mathcal{F}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ — биекция.

Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — возрастающий гомеоморфизм. Определим самосопряженный оператор $\Phi(\mathfrak{D})$ как мультипликатор, т.е.

$$\widehat{\Phi(\mathfrak{D})f}(\xi) = \Phi(\|\xi\|_p)\widehat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{Q}_p. \tag{2.11}$$

В силу теоремы 3.1 из [8] оператор $\Phi(\mathfrak{D})$ — однородный иерархический лапласиан. Собственные значения $\lambda(B)$ оператора $\Phi(\mathfrak{D})$ имеют вид

$$\lambda(B) = \Phi\biggl(\frac{p}{m(B)}\biggr) = \Phi\biggl(\frac{p}{\operatorname{diam}(B)}\biggr). \tag{2.12}$$

Пусть $p_\Phi(t,x,y)$ — ядро теплопроводности, соответствующее оператору $\Phi(\mathfrak{D})$. Предполагая, что Φ и Φ^{-1} удовлетворяют условию удвоения, мы получаем следующее соотношение:

$$p_\Phi(t,x,y) \asymp t \min\biggl\{\frac{1}{t}\,\Phi^{-1}\biggl(\frac{1}{t}\biggr), \frac{1}{\|x-y\|_p}\,\Phi\biggl(\frac{1}{\|x-y\|_p}\biggr)\biggr\}. \tag{2.13}$$

Оператор Тейблсона–Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$, введенный в [36] и [39], является мультипликатором, соответствующим функции $\Phi(\tau) = \tau^\alpha$. На множестве $\mathcal{D}$ его можно представить в виде

$$\mathfrak{D}^\alpha\psi(x) = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{\psi(x)-\psi(y)}{\|x-y\|_p^{1+\alpha}}\,dm(y), \tag{2.14}$$

где $\Gamma_p(z) = (1-p^{z-1})(1-p^{-z})^{-1}$ — это p-адическая гамма-функция. Функция $z \to \Gamma_p(z)$ мероморфна в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, при этом она удовлетворяет функциональному уравнению $\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) = 1$.

[2] В случае, когда $\Phi(\tau)$ — функция Бернштейна, соотношение $L_\Phi = \Phi(L_{\mathrm{Id}})$ изучается в известной теории подчиненности Бохнера (см. [19]).

В силу сказанного выше ядро теплопроводности $p_\alpha(t,x,y)$ (переходную плотность марковской полугруппы $(e^{-t\mathfrak{D}^\alpha})_{t>0}$) можно оценить следующим образом:

$$p_\alpha(t,x,y) \asymp \frac{t}{(t^{1/\alpha}+\|x-y\|_p)^{1+\alpha}}. \tag{2.15}$$

В частности, марковская полугруппа $(e^{-t\mathfrak{D}^\alpha})_{t>0}$ невозвратна тогда и только тогда, когда $\alpha<1$. В невозвратном случае функцию Грина $g_\alpha(x,y)$ можно вычислить явно:

$$g_\alpha(x,y) = \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)}\,\frac{1}{\|x-y\|_p^{1-\alpha}}. \tag{2.16}$$

По поводу всех перечисленных выше фактов мы отсылаем читателя к [7–9].

2.5. Символ иерархического лапласиана. Отождествляя X с локально компактной абелевой группой, мы можем рассматривать $-L$ как изотропный генератор Леви. В силу (1.4) оператор L на $\mathcal{D}$ принимает вид

$$Lf(x) = \int_X \big(f(x)-f(y)\big)J(x-y)\,dm(y) \tag{2.17}$$

или, что эквивалентно, в терминах преобразования Фурье

$$\widehat{Lf}(\theta) = \widehat{L}(\theta)\,\widehat{f}(\theta), \qquad \theta\in\widehat{X}, \tag{2.18}$$

где $\widehat{X}$ — двойственная абелева группа (например, $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ можно отождествить с $\mathbb{Q}_p$) и

$$\widehat{L}(\theta) = \int_X \big[1-\operatorname{Re}\langle h,\theta\rangle\big]\,J(h)\,dm(h). \tag{2.19}$$

Функция $\widehat{L}(\theta)\ge 0$ (символ генератора Леви $-L$) является непрерывной и *отрицательно определенной* (см. [11]). В частности, функция $\sqrt{\widehat{L}(\theta)}$ субаддитивна. По свойству подчиненности (см. [8, теорема 3.1]) функция $\widehat{L}(\theta)^2$ является символом симметричного генератора Леви $-L^2$, поэтому функция $\widehat{L}(\theta)=\sqrt{\widehat{L}(\theta)^2}$ также субаддитивна, т.е. удовлетворяет неравенству треугольника

$$\widehat{L}(\theta_1+\theta_2) \le \widehat{L}(\theta_1)+\widehat{L}(\theta_2). \tag{2.20}$$

Поскольку $-L$ является изотропным генератором Леви (см. [8, п. 5.2]), имеет место более сильное свойство.

Теорема 2.3. *Функция $\widehat{L}(\theta)$ удовлетворяет ультраметрическому неравенству*

$$\widehat{L}(\theta_1+\theta_2) \le \max\big\{\widehat{L}(\theta_1),\widehat{L}(\theta_2)\big\}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Для упрощения обозначений будем считать, что $X=\mathbb{Q}_p$ — кольцо p-адических чисел. Пусть $B\subset B'$ — два ближайших соседних шара с центрами в нейтральном элементе. Отметим, что B и B' являются компактными подгруппами группы $\mathbb{Q}_p$, скажем, $B=p^{-k}\mathbb{Z}_p$ и $B'=p^{-k-1}\mathbb{Z}_p$. Применяя преобразование Фурье к обеим частям уравнения (2.4), получаем

$$\widehat{L}(\theta)\widehat{f}_B(\theta) = \lambda(B')\widehat{f}_B(\theta). \tag{2.22}$$

Мера $\omega_B=(\mathbf{1}_B\,m)/m(B)$ является нормированной мерой Хаара компактной подгруппы B; аналогичный факт справедлив и для $\omega_{B'}$. Поскольку для любой локально компактной абелевой группы преобразование Фурье нормированной меры Хаара любой компактной подгруппы A является индикатором ее группы-аннулятора $A^\perp$, а в нашем частном случае $B^\perp=p^k\mathbb{Z}_p$ и $(B')^\perp=p^{k+1}\mathbb{Z}_p$, получаем

$$\widehat{f}_B(\theta) = \mathbf{1}_{B^\perp}(\theta)-\mathbf{1}_{(B')^\perp}(\theta) = \mathbf{1}_{\partial B^\perp}(\theta), \tag{2.23}$$

где $\partial B^{\perp}$ — сфера $B^{\perp} \setminus (B')^{\perp}$. Из уравнений (2.23) и (2.4) следует, что функция $\widehat{L}(\theta)$ принимает постоянное значение $\lambda(B')$ на сфере $\partial B^{\perp}$, т.е. $\widehat{L}(\theta) = \psi(\|\theta\|_p)$ для некоторой функции $\psi(\tau)$ такой, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(+\infty) = +\infty$. Поскольку из вложения $C \subset D$ следует неравенство $\lambda(C) > \lambda(D)$, функцию $\psi(\tau)$ можно выбрать непрерывной и возрастающей, поэтому $\widehat{L}(\theta) = \psi(\|\theta\|_p)$ удовлетворяет ультраметрическому неравенству (2.21), что и утверждалось. $\square$

3. ОПЕРАТОРЫ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

Пусть (X, d, m) — однородное ультраметрическое пространство с мерой и L — однородный иерархический лапласиан на нем. В этом разделе мы приступаем к изучению операторов типа Шрёдингера

$$Hf(x) = Lf(x) + V(x)f(x).$$

Наша цель — найти условия, при которых данному уравнению можно поставить в соответствие самосопряженный оператор H, действующий в $L^2(X, m)$.

3.1. Локально ограниченные потенциалы. Если предположить, что потенциал V — локально ограниченная функция, то

$$(Hu)(x) := (Lu)(x) + V(x)u(x)$$

будет корректно определенным симметричным оператором $H\colon \mathcal{D} \to L^2(X, m)$. Доказательство следующей теоремы см. в [5, Theorem 3.1].

Теорема 3.1. *Предположим, что V — локально ограниченная функция. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Оператор H существенно самосопряженный.*

2. *Если $V(x) \to \infty$ при $x \to \varpi$, то самосопряженный оператор H имеет компактную резольвенту (следовательно, его спектр дискретен).*

3. *Если $V(x) \to 0$ при $x \to \varpi$, то существенный спектр оператора H совпадает со спектром оператора L (таким образом, спектр оператора H чисто точечный, а отрицательная часть спектра состоит из изолированных собственных значений конечной кратности).*

Замечание 3.2. Для классического оператора Шрёдингера $H = -\Delta + V$, определенного на множестве гладких функций с компактным носителем, утверждение, аналогичное утверждению 1 теоремы 3.1, известно как теорема Сирса: H существенно самосопряжен, если потенциал V допускает нижнюю оценку

$$V(x) \geq -Q(|x|),$$

где $Q(r) > 0$ — непрерывная неубывающая функция такая, что

$$\int_0^{\infty} Q(r)^{-1/2}\, dr = \infty;$$

в противном случае H может не быть существенно самосопряженным (см. [10, гл. II, теорема 1.1, пример 1.1]).

3.2. Потенциалы с локальными особенностями. Если нас интересуют потенциалы с локальными особенностями, такие как $V(x) = b\|x\|_p^{-\beta}$, $b \in \mathbb{R}$, то нам следует наложить определенные локальные условия на потенциал V, чтобы доказать, что квадратичная форма

$$Q(u, u) := Q_L(u, u) + Q_V(u, u), \tag{3.1}$$

определенная на множестве

$$\operatorname{dom}(Q) := \operatorname{dom}(Q_L) \cap \operatorname{dom}(Q_V),$$

является плотно определенной ограниченной снизу замкнутой квадратичной формой, а значит, ей соответствует ограниченный снизу самосопряженный оператор H (см. [14, Sect. 4.4]). Принято писать $H = L + V$, но следует помнить, что это сумма квадратичных форм, а не операторов, как в предыдущем пункте.

Теорема 3.3. *Если $0 \le V \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, m)$, то квадратичная форма (3.1) является регулярной формой Дирихле. В частности, это форма неотрицательного самосопряженного оператора H,*

$$Q(u, u) = \big(H^{1/2}u, H^{1/2}u\big),$$

а множество $\mathcal{D}$ является ядром для Q.

Доказательство. Множество $\mathcal{D}$ принадлежит как $\operatorname{dom}(Q_L)$, так и $\operatorname{dom}(Q_V)$; следовательно, Q плотно определена. Положим $V_\tau = V \wedge \tau$ и определим на множестве $\operatorname{dom}(Q_L)$ форму

$$Q^\tau(u, u) = Q_L(u, u) + Q_{V_\tau}(u, u).$$

Поскольку потенциал V_τ ограничен, форма Q^τ замкнута. В частности, функция $u \to Q^\tau(u, u)$ полунепрерывна снизу. Отсюда следует, что функция $u \to Q(u, u) = \sup\{Q^\tau(u, u)\colon \tau > 0\}$ также полунепрерывна снизу. Следовательно, согласно [14, Theorem 4.4.2] форма Q замкнута и, значит, является формой неотрицательно определенного самосопряженного оператора H. Ясно, что форма Q марковская, т.е. на $(Q, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} = \operatorname{dom}(Q)$, действует нормальное сжатие. Таким образом, Q — форма Дирихле. Покажем, что $\mathcal{D}$ является ядром для Q, т.е. что Q — регулярная форма Дирихле (см. [20]).

Шаг 1. Положим $u_n = ((-n) \vee u) \wedge n$ для $u \in \operatorname{dom}(Q)$. Тогда $u_n \in \operatorname{dom}(Q)$ и имеем сходимость $Q(u - u_n, u - u_n) \to 0$ (см. [20, Theorem 1.4.2]). Следовательно, множество ограниченных функций из $\operatorname{dom}(Q)$ является ядром для Q.

Шаг 2. Пусть B — шар с центром в нейтральном элементе. Пусть $u \in \operatorname{dom}(Q_L)$ ограничена и $u_B = \mathbf{1}_B \cdot u$. Функция $\mathbf{1}_B$ принадлежит $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom}(Q_L)$, поэтому в силу [20, Theorem 1.4.2] получаем $u_B \in \operatorname{dom}(Q_L)$ и

$$\sqrt{Q_L(u_B, u_B)} \le \sqrt{Q_L(u, u)} + \|u\|_\infty \sqrt{Q_L(\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_B)}.$$

Следующий вспомогательный результат представляет и самостоятельный интерес: пусть $B' \supset$ $\supset B$ — ближайшие соседние шары и $\lambda(B')$ — собственное значение оператора L, соответствующее шару B' (см. (2.3) и (2.4)). Тогда

$$\frac{1}{2} m(B)\lambda(B') < Q_L(\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_B) < 2m(B)\lambda(B'). \tag{3.2}$$

Действительно, чтобы доказать неравенство (3.2), запишем

$$\frac{\mathbf{1}_B}{m(B)} = \sum_{T \in \mathcal{B}\colon\, B \subseteq T} f_T,$$

где ряд сходится в $L^2(X, m)$. Так как $\lambda(C) < \lambda(D)$ для любых двух шаров $C \supset D$, то справедлива следующая формула, в которой ряды сходятся в $L^2(X, m)$ (а также в равномерной метрике):

$$L\mathbf{1}_B = m(B) \sum_{T \in \mathcal{B}\colon\, B \subseteq T} L f_T = m(B) \sum_{T \in \mathcal{B}\colon\, B \subseteq T} \lambda(T') f_T.$$

Поэтому $\mathbf{1}_B \in \operatorname{dom}(L)$ и имеем

$$Q_L(\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_B) = (L\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_B) = m(B)^2 \sum_{T \in \mathcal{B}\colon\, B \subseteq T} \lambda(T') \|f_T\|^2 =$$

$$= m(B)^2 \sum_{T \in \mathcal{B}\colon\, B \subseteq T} \lambda(T') \biggl(\frac{1}{m(T)} - \frac{1}{m(T')} \biggr).$$

Из этого тождества, в свою очередь, вытекают требуемые неравенства

$$Q_L(\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_B) > m(B)\lambda(B') \biggl(1 - \frac{m(B)}{m(B')} \biggr) \geq \frac{1}{2} m(B)\lambda(B')$$

и

$$Q_L(\mathbf{1}_B, \mathbf{1}_B) < m(B)\lambda(B') \sum_{T \in \mathcal{B}\colon\, B \subseteq T} \frac{m(B)}{m(T)} \leq 2m(B)\lambda(B').$$

В частности, если предположить, что

$$\lim_{B \nearrow X} m(B)\lambda(B') = 0 \tag{3.3}$$

(это так, например, в случае оператора $L = \mathfrak{D}^\alpha$, $\alpha > 1$), то

$$\limsup_{B \nearrow X} Q_L(u_B, u_B) \leq Q_L(u, u). \tag{3.4}$$

С другой стороны, так как форма Q_L замкнута, то функция $u \to Q_L(u, u)$ полунепрерывна снизу, поэтому получаем

$$\liminf_{B \nearrow X} Q_L(u_B, u_B) \geq Q_L(u, u). \tag{3.5}$$

Таким образом, предполагая выполненным условие (3.3), мы получаем

$$\lim_{B \nearrow X} Q_L(u_B, u_B) = Q_L(u, u). \tag{3.6}$$

По теореме Лебега о сходимости имеем

$$\lim_{B \nearrow X} Q_V(u_B, u_B) = Q_V(u, u). \tag{3.7}$$

Следовательно, применяя (3.6) и (3.7), получаем

$$\lim_{B \nearrow X} Q(u_B, u_B) = Q(u, u). \tag{3.8}$$

Шаг 3. Пусть $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ — марковская резольвента, соответствующая Q. Пусть $Q_1(f, g) := := Q(f, g) + (f, g)$. Тогда для любой функции $v \in L^2(X, m)$ по теореме Лебега о сходимости

$$Q_1(u_B, R_1 v) = (u_B, v) \to (u, v) = Q_1(u, R_1 v).$$

Так как $R_1(L^2(X, m))$ — всюду плотное подмножество в гильбертовом пространстве $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_*)$, где $\mathcal{F} = \operatorname{dom}(Q)$ и $\|u\|_* = \sqrt{Q_1(u, u)}$, то последовательность u_B слабо сходится в $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_*)$ к u, т.е.

$$Q_1(u_B, w) \to Q_1(u, w) \qquad \forall w \in \operatorname{dom}(Q). \tag{3.9}$$

Из соотношений (3.8) и (3.9) получаем

$$\begin{aligned}\lim_{B\nearrow X} Q_1(u-u_B,u-u_B) &= \lim_{B\nearrow X}\bigl(Q_1(u,u)-2Q_1(u_B,u)+Q_1(u_B,u_B)\bigr)=\\ &= Q_1(u,u)-2\lim_{B\nearrow X} Q_1(u_B,u)+\lim_{B\nearrow X} Q_1(u_B,u_B)=\\ &= Q_1(u,u)-2Q_1(u,u)+Q_1(u,u)=0.\end{aligned}$$

Таким образом, если условие (3.8) выполнено, то множество ограниченных функций с компактным носителем в $\operatorname{dom}(Q)$ является ядром для Q, что и требовалось.

Шаг 4. Чтобы доказать свойство (3.8) без каких-либо ограничений на спектр оператора L, мы вынуждены применить преобразование Фурье и воспользоваться метрическими свойствами символа $\widehat{L}(\theta)$ оператора L. Для упрощения обозначений будем считать, что $X=\mathbb{Q}_p$, так что $\widehat{X}=\mathbb{Q}_p$. Любой шар B с центром в нейтральном элементе является компактной подгруппой в X. Поскольку преобразование Фурье нормированной меры Хаара компактной подгруппы является индикатором ее аннулятора, имеем

$$Q_L(u_B,u_B)=\int\limits_{\widehat{X}}\widehat{L}(\theta)|\widehat{u_B}(\theta)|^2\,d\widehat{m}(\theta)=\int\limits_{\widehat{X}}\widehat{L}(\theta)|\widehat{u}*\widehat{m}_{B^\perp}(\theta)|^2\,d\widehat{m}(\theta),$$

где $B^\perp$ — аннулятор компактной подгруппы $B\subset X$, а $\widehat{m}_{B^\perp}$ — нормированная мера Хаара группы $B^\perp$. Имея это в виду и используя неравенство

$$|\widehat{u}*\widehat{m}_{B^\perp}|^2\le|\widehat{u}|^2*\widehat{m}_{B^\perp},$$

получаем

$$\begin{aligned}Q_L(u_B,u_B)&\le\int\limits_{\widehat{X}}\widehat{L}(\theta)\bigl(|\widehat{u}|^2*\widehat{m}_{B^\perp}\bigr)(\theta)\,d\widehat{m}(\theta)=\int\limits_{\widehat{X}}\widehat{L}(\theta)\left(\int\limits_{B^\perp}|\widehat{u}(\theta+\zeta)|^2\,d\widehat{m}_{B^\perp}(\zeta)\right)d\widehat{m}(\theta)=\\ &=\int\limits_{B^\perp}\left(\int\limits_{\widehat{X}}\widehat{L}(\theta+\zeta)|\widehat{u}(\theta)|^2\,d\widehat{m}(\theta)\right)d\widehat{m}_{B^\perp}(\zeta).\end{aligned}$$

По теореме 2.3 имеем $\widehat{L}(\theta)=\psi(\|\theta\|_p)$, где $\psi(\tau)$ — возрастающая непрерывная функция. Отсюда следует, что функция $\theta\to\widehat{L}(\theta)$ удовлетворяет ультраметрическому неравенству (2.21), и, значит,

$$\begin{aligned}Q_L(u_B,u_B)&\le\int\limits_{B^\perp}\left(\int\limits_{\widehat{X}}\max\bigl\{\widehat{L}(\theta),\widehat{L}(\zeta)\bigr\}|\widehat{u}(\theta)|^2\,d\widehat{m}(\theta)\right)d\widehat{m}_{B^\perp}(\zeta)\le\\ &\le\int\limits_{B^\perp}\left(\int\limits_{\widehat{X}}\bigl(\widehat{L}(\theta)+\widehat{L}(\zeta)\bigr)|\widehat{u}(\theta)|^2\,d\widehat{m}(\theta)\right)d\widehat{m}_{B^\perp}(\zeta).\end{aligned}$$

Так как $\widehat{m}_{B^\perp}(1)=1$, то из сказанного выше следует неравенство

$$Q_L(u_B,u_B)\le Q_L(u,u)+\left(\int\limits_{B^\perp}\widehat{L}(\zeta)\,d\widehat{m}_{B^\perp}(\zeta)\right)\|u\|^2.$$

При $B\nearrow X$ мера $\widehat{m}_{B^\perp}$ слабо сходится к мере Дирака, сосредоточенной в нейтральном элементе. Поскольку $\widehat{L}(0)=0$, мы наконец получаем

$$\limsup_{B\nearrow X} Q_L(u_B,u_B)\le Q_L(u,u).\tag{3.10}$$

Очевидно, из соотношений (3.10), (3.5) и (3.7) вытекает равенство

$$\lim_{B\nearrow X} Q(u_B, u_B) = Q(u, u),$$

которое справедливо без каких-либо ограничений на спектр оператора L. Таким образом, как и на шаге 3, мы приходим к выводу, что множество ограниченных функций с компактным носителем из $\operatorname{dom}(Q)$ является ядром для Q, что и требовалось.

Шаг 5. Пусть теперь $u \in \operatorname{dom}(Q)$ ограничена и имеет компактный носитель. Пусть B — шар с центром в нейтральном элементе группы X (напомним, что B — компактная подгруппа группы X) и m_B — ее нормированная мера Хаара. Положим $u^B = u * m_B$. Функция u^B локально постоянна и имеет компактный носитель; следовательно, она принадлежит $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom}(Q)$. Имеем $\widehat{u^B} = \widehat{u} \cdot \mathbf{1}_{B^\perp}$, откуда

$$\lim_{B\to\{e\}} \big\|u - u^B\big\|_2^2 = \lim_{B^\perp \to \widehat{X}} \int\limits_{(B^\perp)^{\mathrm{c}}} |\widehat{u}(\theta)|^2 \, d\widehat{m}(\theta) = 0; \tag{3.11}$$

аналогично

$$\lim_{B\to\{e\}} Q_L\big(u - u^B, u - u^B\big) = \lim_{B^\perp \to \widehat{X}} \int\limits_{(B^\perp)^{\mathrm{c}}} \widehat{L}(\theta)|\widehat{u}(\theta)|^2 \, d\widehat{m}(\theta) = 0. \tag{3.12}$$

Существует компакт K, содержащий носитель любой функции $u - u^B$ такой, что $\operatorname{diam}(B) \le 1$. Для $\varepsilon > 0$ существует разложение $V|_K = V_1 + V_2$ такое, что $\|V_1\|_1 < \varepsilon$ и $V_2 \in L^\infty(X, m)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Q_V\big(u - u^B, u - u^B\big) &= \int\limits_K V|u - u^B|^2 \, dm = \int\limits_K V_1|u - u^B|^2 \, dm + \int\limits_K V_2|u - u^B|^2 \, dm \le \\ &\le 4\varepsilon\|u\|_\infty^2 + \|V_2\|_\infty \big\|u - u^B\big\|_2^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\limsup_{B\to\{e\}} Q_V\big(u - u^B, u - u^B\big) \le 4\varepsilon\|u\|_\infty^2. \tag{3.13}$$

Очевидно, из соотношений (3.11)–(3.13) вытекает требуемый результат

$$\lim_{B\to\{e\}} Q_1\big(u - u^B, u - u^B\big) = 0,$$

т.е. $\mathcal{D}$ действительно является ядром для $Q = Q_L + Q_V$. $\square$

Замечание 3.4. Ясно, что теорему 3.3 можно распространить на те V, которые ограничены снизу и ограничены в $L^1_{\mathrm{loc}}(X, m)$, просто добавив достаточно большую положительную константу. Однако если нас интересуют V с отрицательными локальными особенностями, то нам нужны более сильные локальные условия на V, чтобы доказать замкнутость формы Q.

Определение 3.5. Пусть число $p \ge 1$ фиксировано. Будем говорить, что потенциал V лежит в $L^p + L^\infty$, если его можно представить в виде $V = V' + V''$, где $V' \in L^p(X, m)$ и $V'' \in L^\infty(X, m)$. Это разложение не единственно, и если оно возможно, то можно сделать так, чтобы норма $\|V'\|_p$ была сколь угодно малой.

Теорема 3.6. *Рассмотрим кольцо $X = \mathbb{Q}_p$, наделенное мерой Хаара m. Пусть $L = \mathfrak{D}^\gamma$ — оператор, действующий в $L^2(\mathbb{Q}_p, m)$, и $Q = Q_L + Q_V$ — квадратичная форма (3.1), в которой $V \in L^p + L^\infty$ для некоторого $p > 1/\gamma$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Форма Q является плотно определенной ограниченной снизу замкнутой квадратичной формой. В частности, Q отвечает ограниченному снизу самосопряженному оператору H.*

2. *Если $2 \le 1/\gamma < p$, то $\operatorname{dom}(H) = \operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\gamma)$. То же верно при $1/\gamma < 2$ и $p = 2$.*

Доказательство. Множество $\mathcal{D}$ лежит как в $\operatorname{dom}(Q_L)$, так и в $\operatorname{dom}(Q_V)$, поэтому Q плотно определена. Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем найти разложение $|V| = W + W'$ такое, что $\|W\|_p < \varepsilon$ и $W' \in L^\infty(X, m)$. Мы утверждаем, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то

$$\big\|W^{1/2}u\big\|_2^2 \le \frac{1}{2}Q_L(u,u) + c_0\|u\|_2^2 \tag{3.14}$$

для некоторой константы $c_0 > 0$ и всех $u \in \operatorname{dom}(Q_L)$. В силу неравенства (3.14) мы имеем

$$\int |V| \cdot |u|^2\, dm \le \big\|W^{1/2}u\big\|_2^2 + \|W'\|_\infty \|u\|_2^2 \le \frac{1}{2}Q_L(u,u) + c_1\|u\|_2^2$$

для некоторой константы $c_1 > 0$ и всех $u \in \operatorname{dom}(Q_L)$. Таким образом, для $c_2 > 2c_1$ получаем

$$\frac{1}{2}\big\{Q_L(u,u) + c_2\|u\|_2^2\big\} \le Q(u,u) + c_2\|u\|_2^2 \le \frac{3}{2}\big\{Q_L(u,u) + c_2\|u\|_2^2\big\}.$$

Отсюда следует, что квадратичная форма $u \to Q(u,u) + c_2\|u\|_2^2$ неотрицательна и замкнута, поэтому ей соответствует неотрицательный самосопряженный оператор, который, очевидно, равен $H + c_2 I$. Для доказательства неравенства (3.14) нам потребуются некоторые вспомогательные L^p-оценки, представляющие самостоятельный интерес.

(E1) *Если $0 < \alpha \le 1/(2\gamma)$ и $2 \le p < 2/(1 - 2\alpha\gamma)$, то $(\mathfrak{D}^\gamma + \mathrm{I})^{-\alpha}$ — ограниченный линейный оператор из $L^2(X,m)$ в $L^p(X,m)$. Если $\alpha > 1/(2\gamma)$, то $(\mathfrak{D}^\gamma + \mathrm{I})^{-\alpha}$ — ограниченный линейный оператор из $L^2(X,m)$ в $L^\infty(X,m)$.*

(E2) *Если $0 < \alpha \le 1/(2\gamma)$ и $\mathcal{W} \in L^q(X,m)$, то $\mathcal{A} := \mathcal{W} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda\mathrm{I})^{-\alpha}$ — ограниченный линейный оператор на $L^2(X,m)$ при условии, что $1/(\alpha\gamma) < q \le \infty$. При этом существует константа $c > 0$ такая, что $\|\mathcal{A}\|_{L^2 \to L^2} \le c\|\mathcal{W}\|_q$ для всех таких $\mathcal{W}$. Такая же оценка справедлива в случае $\alpha > 1/(2\gamma)$ и $q = 2$. В обоих случаях оператор $\mathcal{A}$ является компактным оператором на L^2. Кроме того,*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \big\|\mathcal{W} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda\mathrm{I})^{-\alpha}\big\|_{L^2 \to L^2} = 0.$$

Доказательство утверждения (E1). Предположим сначала, что $0 < \alpha \le 1/(2\gamma)$. Определим функцию $g(y) := (\|y\|_p^\gamma + 1)^{-\alpha}$ и предположим, что $1/(\alpha\gamma) < s < \infty$. Тогда

$$\|g\|_s^s = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{dm(y)}{(\|y\|_p^\gamma + 1)^{\alpha s}} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{p^\tau}{(p^{\tau\gamma} + 1)^{\alpha s}} < \infty.$$

Если $k = \widehat{(\mathfrak{D}^\gamma + I)^{-\alpha} f}$ и $f \in L^2$, то $k(y) = g(y)\widehat{f}(y)$. Положим $1/q = 1/s + 1/2$, $1/(\alpha\gamma) < s \le \infty$. Тогда $1 < q \le 2$ и

$$\|k\|_q \le \|g\|_s \|\widehat{f}\|_2 = c_1\|f\|_2.$$

Если $1/p + 1/q = 1$, то $2 \le p < \infty$ и в силу теоремы Хаусдорфа–Юнга

$$\|(\mathfrak{D}^\gamma + I)^{-\alpha} f\|_p = \|\widehat{k}\|_p \le \|k\|_q \le c_1\|f\|_2.$$

Имеем $1/p = 1 - 1/q = 1/2 - 1/s$ и $1/(\alpha\gamma) < s \le \infty$, поэтому p возрастает от 2 до $2/(1 - 2\alpha\gamma)$, когда s убывает от ∞ до $1/(\alpha\gamma)$. Если $\alpha > 1/(2\gamma)$, то определенная выше функция g лежит в L^2 и мы заключаем, что

$$\|k\|_1 = \|g\widehat{f}\|_1 \le \|g\|_2 \|\widehat{f}\|_2 = c_2\|f\|_2,$$

поэтому, как и выше,

$$\|(\mathfrak{D}^\gamma + I)^{-\alpha} f\|_\infty = \|\widehat{k}\|_\infty \le \|k\|_1 \le c_2\|f\|_2,$$

что и требовалось.

Доказательство утверждения (E2). Для любого фиксированного $\lambda > 0$ при $0 < \alpha \le 1/(2\gamma)$ имеем

$$\big\|\mathcal{W} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda I)^{-\alpha} f\big\|_2 \le \|\mathcal{W}\|_q \|(\mathfrak{D}^\gamma + \lambda I)^{-\alpha} f\|_p$$

при условии, что $1/2 = 1/p + 1/q$. Условие $2 \le p < 2/(1 - 2\alpha\gamma)$ эквивалентно условию $1/(\alpha\gamma) < q \le \infty$. Тогда нужный результат получается из утверждения (E1). Случай $\alpha > 1/(2\gamma)$ аналогичен, при этом

$$\big\|\mathcal{W} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda I)^{-\alpha} f\big\|_2 \le \|\mathcal{W}\|_2 \|(\mathfrak{D}^\gamma + \lambda I)^{-\alpha} f\|_\infty.$$

Для доказательства компактности оператора $\mathcal{A} = \mathcal{W} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda I)^{-\alpha}$ выберем последовательность $\mathcal{W}_n \in \mathcal{D}$ такую, что $\mathcal{W}_n \to \mathcal{W}$ в L^q. Пусть Φ_n — строго возрастающая функция такая, что $\Phi_n(\tau) = \tau^\gamma$ для $0 \le \tau \le n$ и $\Phi_n(\tau) \asymp e^\tau$ при $\tau \to \infty$. Если положить $\mathcal{A}_n = \mathcal{W}_n \cdot (\Phi_n(\mathfrak{D}) + \lambda I)^{-\alpha}$, то $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ в операторной норме. Поскольку множество компактных операторов замкнуто относительно взятия предела по норме, достаточно доказать, что каждый оператор $\mathcal{A}_n$ является оператором Гильберта–Шмидта. Каждый оператор $\mathcal{A}_n$ унитарно эквивалентен интегральному оператору $\widehat{\mathcal{A}}_n \colon \widehat{u} \to \widehat{\mathcal{A}_n u}$ с ядром

$$\widehat{\mathcal{A}}_n(\theta, \zeta) = \widehat{\mathcal{W}}_n(\theta - \zeta)\big(\Phi_n(\|\zeta\|) + \lambda\big)^{-\alpha} := \widehat{\mathcal{W}}_n(\theta - \zeta)\mathcal{G}(\zeta),$$

так что для нормы Гильберта–Шмидта $\|\widehat{\mathcal{A}}_n\|$ оператора $\widehat{\mathcal{A}}_n$ имеем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_n\| = \|\mathcal{W}_n\|_2 \|\mathcal{G}\|_2 < \infty.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A} = \mathcal{W} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda I)^{-\alpha}$ компактен и, очевидно, его норма стремится к нулю при $\lambda \to \infty$.

Перейдем к доказательству оценки (3.14). В случае $0 < \gamma \le 1$ и $p > 1/\gamma$ имеем

$$\begin{aligned}
\big\|W^{1/2}u\big\|_2^2 &= \big\|W^{1/2} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + I)^{-1/2} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + I)^{1/2} u\big\|_2^2 \le \\
&\le \big\|W^{1/2} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + I)^{-1/2}\big\|_{L^2 \to L^2}^2 \big\|(\mathfrak{D}^\gamma + I)^{1/2} u\big\|_2^2 = \\
&= \big\|W^{1/2} \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + I)^{-1/2}\big\|_{L^2 \to L^2}^2 \big(Q_L(u,u) + \|u\|_2^2\big) \le \\
&\le c\|W^{1/2}\|_q^2 \big(Q_L(u,u) + \|u\|_2^2\big) \le \frac{1}{2} Q_L(u,u) + c_1 \|u\|_2^2
\end{aligned}$$

при условии, что $\varepsilon > 0$ выбрано достаточно малым и $q = 2p > 2/\gamma$, как в утверждении (E2) при $\alpha = 1/2$.

Случай $\gamma > 1$ аналогичен. Ограничение $p > 1/\gamma$ переходит в $p \ge 1$. Положим $Y = \{|V| > \tau\}$ и $W = |V| \mathbf{1}_Y$. По неравенству Маркова $m(Y) \le \tau^{-p} \|V\|_p^p < \infty$, поэтому $\|W\|_1 = o(1)$ при $\tau \to \infty$. В частности, $W^{1/2} \in L^2$ и $\|W^{1/2}\|_2 = o(1)$ при $\tau \to \infty$. Применяя вторую часть утверждения (E2) при $\alpha = 1/2$ и $q = 2$, заключаем, что

$$\big\|W^{1/2}u\big\|_2^2 \le c\|W^{1/2}\|_2^2 \big(Q_L(u,u) + \|u\|_2^2\big) \le \frac{1}{2} Q_L(u,u) + c_1 \|u\|_2^2,$$

как и требовалось. Чтобы доказать, что $\operatorname{dom}(H) = \operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\gamma)$, сначала представим V в виде $V = V' + V''$, где $V' \in L^p(X, m)$ и $V'' \in L^\infty(X, m)$. Из утверждения (E2) получаем

$$\lim_{\lambda \to \infty} \big\|V' \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda \mathrm{I})^{-1}\big\|_{L^2 \to L^2} = 0.$$

Также имеем

$$\big\|V'' \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda \mathrm{I})^{-1}\big\|_{L^2 \to L^2} \le \|V''\|_\infty \|(\mathfrak{D}^\gamma + \lambda \mathrm{I})^{-1}\|_{L^2 \to L^2} = \lambda^{-1} \|V''\|_\infty$$

при всех $\lambda > 0$, откуда

$$\lim_{t\to\infty} \big\| V \cdot (\mathfrak{D}^\gamma + \lambda \mathrm{I})^{-1} \big\|_{L^2 \to L^2} = 0.$$

Для любого достаточно малого $1 > \delta > 0$ мы можем выбрать достаточно большое $\lambda > 0$ так, что

$$\|Vf\|_2 \le \delta \|\mathfrak{D}^\gamma f\|_2 + \lambda\delta \|f\|_2$$

для всех $f \in \operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\gamma)$. Таким образом, V — относительно ограниченное возмущение оператора $\mathfrak{D}^\gamma$ с относительной оценкой $\delta < 1$. Поэтому $\operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\gamma + V) = \operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\gamma)$ в силу [14, Theorem 1.4.2], что завершает доказательство. □

Замечание 3.7. Число $N := 2/\gamma$ — это так называемая *спектральная размерность*, связанная с оператором $\mathfrak{D}^\gamma$ (напомним, что топологическая размерность пространства состояний $\mathbb{Q}_p$ равна нулю). Значение числа N в наших условиях аналогично значению топологической размерности в классической теории потенциала; например, утверждения (E1) и (E2) можно рассматривать как вариант известных оценок для оператора $-\Delta$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ (см. [14, Sect. 3.6]). Еще один пример дает соотношение

$$p_\gamma(t, x, x) \asymp t^{-N/2}, \tag{3.15}$$

которое справедливо для ядра теплопроводности $p_\gamma(t, x, y)$ оператора $\mathfrak{D}^\gamma$ (см. (2.15), а также более глубокое исследование асимптотического соотношения (3.15) в [4]).

3.3. Положительный спектр. Мы найдем критерии того, что спектр потенциала оператора типа Шрёдингера $H = L + V$ лежит в интервале $[0, \infty)$. Предположим, что квадратичная форма $Q = Q_L + Q_V$ плотно определена, ограничена снизу и замкнута, множество $\mathcal{D}$ является ее ядром и, следовательно, H — ограниченный снизу самосопряженный оператор, отвечающий Q. Напомним, что это так, например, если потенциал V удовлетворяет одному из условий приведенных выше теорем 3.3 и 3.6. Однако отметим, что даже если $\operatorname{Spec}(H)$ содержится в интервале $[0, \infty)$, форма Q не будет формой Дирихле без условия $V \ge 0$.

В дальнейшем будем обозначать через $\Gamma(u, v)$ *квадратичный градиент*, определяемый следующим образом: для любых $u, v \in \mathcal{D}$ полагаем

$$\Gamma(u, v) := \frac{1}{2}\big\{uLv + vLu - L(uv)\big\}. \tag{3.16}$$

Пусть $J(x - y)$ — плотность скачков, соответствующая (нелокальному) иерархическому лапласиану L (см. (2.17) и (2.19)). Несложно показать, что справедливы следующие тождества:

$$\Gamma(u, v)(x) = \frac{1}{2}\int_X \big(u(y) - u(x)\big)\big(v(y) - v(x)\big)\, J(x - y)\, dm(y), \tag{3.17}$$

$$Q_L(u, v) = \int_X \Gamma(u, v)\, dm, \tag{3.18}$$

$$Q_L(uv, w) = \int_X v\Gamma(u, w)\, dm + \int_X u\Gamma(v, w)\, dm, \tag{3.19}$$

$$\int_X v\Gamma(u^2, w)\, dm - 2\int_X vu\Gamma(u, w)\, dm = \\ = \frac{1}{2}\int_{X\times X} \big(u(y) - u(x)\big)^2 \big(w(y) - w(x)\big)\big(v(y) - v(x)\big)\, J(x - y)\, dm(x)\, dm(y). \tag{3.20}$$

В частности, имеем

$$\int_X w\Gamma(u^2,w)\,dm - 2\int_X wu\Gamma(u,w)\,dm = \\ = \frac{1}{2}\int_{X\times X}\big(u(y)-u(x)\big)^2\big(w(y)-w(x)\big)^2 J(x-y)\,dm(x)\,dm(y) \ge 0. \quad (3.21)$$

Представленные выше тождества можно распространить на множество всех ограниченных функций u, v и w из $\operatorname{dom}(Q_L)$. Подробности см. в [20, Sect. 5].

С помощью интерполяции оператор $L\colon \mathcal{D} \to L^2(X,m)$ можно продолжить на каждое из банаховых пространств $C_\infty(X)$ и $L^q(X,m)$, $1 \le q < \infty$, как марковский генератор с обратным знаком. Для упрощения формул мы по-прежнему будем обозначать продолженный оператор через L и при необходимости указывать его область определения.

Теорема 3.8. *Предположим, что существует функция $0 < f \in \operatorname{dom}_{C_\infty(X)}(L)$ такая, что неравенство*

$$V(x) \ge -\frac{Lf(x)}{f(x)}$$

справедливо m-почти всюду. Тогда существует самосопряженный оператор $H \ge 0$, отвечающий квадратичной форме $Q = Q_L + Q_V$, т.е. такой, что $Q(u,u) = (Hu,u)$ для всех $u \in \operatorname{dom}(H) \subset \operatorname{dom}(Q)$. В частности, $\operatorname{Spec}(H) \subseteq [0,\infty)$.

Доказательство. Предположим сначала, что f — локально постоянная функция. Положим $W_f := (-Lf)/f$, и пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда для функции $\psi := \varphi/f \in \mathcal{D}$ с помощью уравнений (3.18)–(3.21) получим

$$Q(\varphi,\varphi) = \int_X \big(\varphi L\varphi + V\varphi^2\big)\,dm \ge \int_X \big(\varphi L\varphi + W_f\varphi^2\big)\,dm = \\ = \int_X \big(\psi Lf - 2\Gamma(f,\psi) + fL\psi + W_f f\psi\big) f\psi\,dm.$$

Так как $Lf + W_f f = 0$, то правую часть данного неравенства можно записать в виде

$$\int_X \big(-2\psi f\Gamma(f,\psi) + f^2\psi L\psi\big)\,dm = \int_X \big(-2\psi f\Gamma(f,\psi)\big)\,dm + Q_L(f^2\psi,\psi).$$

Тогда

$$Q(\varphi,\varphi) \ge \int_X \big(-2\psi f\Gamma(f,\psi)\big)\,dm + Q_L(f^2\psi,\psi) = \\ = \int_X \big\{-2\psi f\Gamma(f,\psi) + f^2\Gamma(\psi,\psi) + \psi\Gamma(f^2,\psi)\big\}\,dm,$$

откуда окончательно в силу (3.21) получаем

$$Q(\varphi,\varphi) \ge \int_X f^2\Gamma(\psi,\psi)\,dm + \int_X \big\{-2\psi f\Gamma(f,\psi) + \psi\Gamma(f^2,\psi)\big\}\,dm \ge \int_X f^2\Gamma(\psi,\psi)\,dm \ge 0.$$

Мы уже показали, что $Q(\varphi,\varphi) \ge 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Поскольку такие функции φ образуют ядро для Q, результат получается применением вариационной формулы

$$E = \inf\big\{Q(\varphi,\varphi)\colon\ \varphi \in \mathcal{D},\ \|\varphi\|_2 = 1\big\}, \quad (3.22)$$

где E — нижняя грань спектра оператора H. В общем случае можно выбрать последовательность локально постоянных функций f_n такую, что $W_{f_n} \to W_f$ локально равномерно по X. Например, можно выбрать δ-последовательность $\phi_n \in \mathcal{D}_+$ и положить $f_n := f * \phi_n$. Тогда для функций $\psi_n := \varphi/f_n$ имеем

$$Q(\varphi,\varphi) = \int\limits_X \bigl(\varphi L\varphi + V\varphi^2\bigr)\,dm \geq \int\limits_X \bigl(\varphi L\varphi + W_f\varphi^2\bigr)\,dm =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \bigl(\varphi L\varphi + W_{f_n}\varphi^2\bigr)\,dm \geq \limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n^2 \Gamma(\psi_n,\psi_n)\,dm \geq 0,$$

что завершает доказательство теоремы. □

Следствие 3.9. *Рассмотрим квадратичную форму $Q = Q_{\mathfrak{D}^\alpha} + Q_V$ с областью определения $\mathcal{D}$. Предположим, что $0 < \alpha < 1$ и почти всюду выполнено неравенство*

$$V_-(x) \leq \left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2 \|x\|_p^{-\alpha}.$$

Тогда $Q(\varphi,\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$.

Предположим также, что неотрицательно определенная квадратичная форма $(Q,\mathcal{D})$ замыкаема, и пусть $\mathfrak{D}^\alpha + V$ — неотрицательно определенный оператор, соответствующий ее минимальному замкнутому расширению. Тогда

$$\operatorname{Spec}(\mathfrak{D}^\alpha + V) \subseteq [0,\infty).$$

Доказательство. Положим $\mathfrak{u}_\beta(x) := \|x\|_p^\beta$. В силу [39, § 8, п. 1, формула (1.6)] функция $\mathfrak{u}_\beta$ задает распределение (обобщенную функцию) из $\mathcal{D}'$, голоморфное по β на всей вещественной прямой. Оператор $\mathfrak{D}^\alpha\colon \psi \to \mathfrak{D}^\alpha\psi$ можно определить как свертку распределений $\mathfrak{u}_{-\alpha-1}/\Gamma_p(-\alpha)$ и ψ (см. [39, § 9]). Мы утверждаем, что

$$\mathfrak{D}^\alpha \mathfrak{u}_\beta = \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\,\mathfrak{u}_{\beta-\alpha} \qquad \forall \beta \neq \alpha \tag{3.23}$$

в смысле распределений. Случай $\beta = 0$ тривиален. Для $\beta \neq 0$ мы применим преобразование Фурье. Напомним, что преобразование Фурье $f \to \widehat{f}$ является линейным изоморфизмом $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$. В силу результатов из [39, § 7, п. 5] уравнение

$$\widehat{\mathfrak{u}}_{\gamma-1}(\xi) = \Gamma_p(\gamma)\mathfrak{u}_{-\gamma}(\xi) \tag{3.24}$$

справедливо для всех $\gamma \neq 1$. Применяя (3.24), получаем

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha \mathfrak{u}_\beta}(\xi) = \mathfrak{u}_\alpha(\xi)\widehat{\mathfrak{u}}_\beta(\xi) = \mathfrak{u}_\alpha(\xi)\widehat{\mathfrak{u}}_{\beta+1-1}(\xi) = \mathfrak{u}_\alpha(\xi)\Gamma_p(\beta+1)\mathfrak{u}_{-\beta-1}(\xi) =$$

$$= \Gamma_p(\beta+1)\mathfrak{u}_{-(1+\beta-\alpha)}(\xi) = \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\Gamma_p(\beta+1-\alpha)\mathfrak{u}_{-(1+\beta-\alpha)}(\xi) =$$

$$= \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\widehat{\mathfrak{u}}_{(1+\beta-\alpha)-1}(\xi) = \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\widehat{\mathfrak{u}}_{\beta-\alpha}(\xi),$$

тогда требуемый результат вытекает из теоремы единственности. Для $\phi \in \mathcal{D}_+$ и $\beta := (\alpha-1)/2$ определим функцию

$$W_\phi := \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\,\frac{\mathfrak{u}_{\beta-\alpha} * \phi}{\mathfrak{u}_\beta * \phi} = \left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2 \frac{\mathfrak{u}_{-(1+\alpha)/2} * \phi}{\mathfrak{u}_{-(1-\alpha)/2} * \phi}.$$

Докажем, что функция W_ϕ принадлежит $C_\infty(X)$ и $W_\phi = \mathfrak{D}^\alpha f/f$, где

$$0 < f = \mathfrak{u}_{-(1-\alpha)/2} * \phi \in \operatorname{dom}_{C_\infty(X)}(\mathfrak{D}^\alpha).$$

Действительно, если $\|x\|_p > \|y\|_p$, то $\|x-y\|_p = \|x\|_p$, поэтому для любого фиксированного шара B с центром в нейтральном элементе, содержащего множество $\{\phi > 0\}$, и для любого x такого, что $\|x\|_p > \operatorname{diam}(B)$, имеем

$$0 < \mathfrak{u}_{-(1\mp\alpha)/2} * \phi(x) = \int\limits_B \frac{\phi(y)}{\|x-y\|_p^{(1\mp\alpha)/2}}\, dm(y) = \frac{1}{\|x\|_p^{(1\mp\alpha)/2}} \int\limits_B \phi\, dm. \tag{3.25}$$

Отсюда следует, что функции $\mathfrak{u}_{-(1-\alpha)/2} * \phi$, $\mathfrak{u}_{-(1+\alpha)/2} * \phi$ и W_ϕ принадлежат $C_\infty(X)$. В частности, применяя формулу (3.23), получаем $f \in C_\infty(X)$ и

$$\mathfrak{D}^\alpha f = \left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2 \mathfrak{u}_{-(1+\alpha)/2} * \phi := F \tag{3.26}$$

в смысле распределений. Поэтому в силу [39, § 9, п. 3] имеем

$$f(x) = \mathfrak{D}^{-\alpha} F(x) = \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)} \int \frac{F(y)}{\|x-y\|_p^{1-\alpha}}\, dm(y). \tag{3.27}$$

Наконец, соотношения (3.27) и (3.25) показывают, что функция f (являющаяся потенциалом Грина функции $F \in C_\infty(X)$) принадлежит $C_\infty(X)$ — области определения оператора $\mathfrak{D}^\alpha$. В частности, равенство (3.26) выполнено в сильном смысле. Очевидно, $W_\phi = \mathfrak{D}^\alpha f/f$, и утверждение доказано. Таким образом, теорема 3.8 применима, и мы заключаем, что

$$Q_{W_\phi}(\varphi,\varphi) \le Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Выберем последовательность $\{B_n\colon n = 1,2,\dots\}$ шаров с центром в нейтральном элементе 0 такую, что $\bigcap_{n=1}^\infty B_n = \{0\}$, и положим $\phi_n = \mathbf{1}_{B_n}/m(B_n)$. Очевидно, $\phi_n * f \to f$ для любой непрерывной функции f, так что

$$W_{\phi_n}(x) \to W(x) = \left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2 \frac{\mathfrak{u}_{-(1+\alpha)/2}(x)}{\mathfrak{u}_{-(1-\alpha)/2}(x)} = \left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2 \|x\|_p^{-\alpha}.$$

Применяя теперь лемму Фату, заключаем, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство ($\mathbb{Q}_p$-версия классического неравенства Харди в $\mathbb{R}^N$)

$$Q_W(\varphi,\varphi) \le Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(\varphi,\varphi).$$

Поэтому для всех $\varphi \in \mathcal{D}$

$$-Q_V(\varphi,\varphi) \le Q_{V_-}(\varphi,\varphi) \le Q_W(\varphi,\varphi) \le Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(\varphi,\varphi),$$

или, что эквивалентно,

$$Q(\varphi,\varphi) := Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(\varphi,\varphi) + Q_V(\varphi,\varphi) \ge 0.$$

Множество $\mathcal{D}$ образует ядро для $Q(\varphi,\varphi)$ в силу предположений относительно V, и доказательство завершается применением вариационной формулы (3.22). $\square$

Пример 3.10. Рассмотрим квадратичную форму $Q = Q_{\mathfrak{D}^\alpha} + Q_V$, где $V(x) = b\|x\|_p^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $b \ge -\{\Gamma_p((1+\alpha)/2)\}^2$, с областью определения $\operatorname{dom}(Q) = \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — множество всех локально постоянных функций с компактным носителем. Для доказательства полуограниченности и замыкаемости формы Q мы не можем просто воспользоваться теоремой 3.6, поскольку $V \in L^p + L^\infty$, только если $p < 1/\alpha$. Однако заметим, что теорема 3.6 применима в случае $Q = Q_{\mathfrak{D}^\alpha} + Q_{b\|\cdot\|_p^{-\beta}}$, где $0 < \beta < \alpha < 1$ и $b \in \mathbb{R}^1$, поскольку $V \in L^p + L^\infty$ для всех $1/\alpha < p < 1/\beta$.

В случае $Q = Q_{\mathfrak{D}^\alpha} + Q_{b\|\cdot\|_p^{-\alpha}}$ будем рассуждать следующим образом. Рассмотрим оператор $H = \mathfrak{D}^\alpha + b\|x\|_p^{-\alpha}$, определенный на всюду плотном множестве $\mathcal{D}_0 = \{\varphi \in \mathcal{D}\colon \varphi(0) = 0\}$. Очевидно, оператор $H\colon \mathcal{D}_0 \to L^2$ симметричен и мы можем записать

$$Q(\varphi,\varphi) := Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(\varphi,\varphi) + Q_{b\|\cdot\|_p^{-\alpha}}(\varphi,\varphi) = (H\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_0.$$

Так как $b \geq -\{\Gamma_p((1+\alpha)/2)\}^2$, мы можем применить следствие 3.9, в силу которого $Q(\varphi,\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. В частности, оператор H является неотрицательно определенным и симметричным. Так как каждый неотрицательно определенный симметричный оператор замыкаем, а его минимальное замкнутое расширение $\overline{H}$ является неотрицательно определенным самосопряженным оператором, то квадратичная форма Q с областью определения $\mathcal{D}_0$ замыкаема.

Чтобы доказать замыкаемость неотрицательной квадратичной формы Q с областью определения $\mathcal{D}$, достаточно показать, что индикаторную функцию $\mathbf{1}_B$ любого шара B, содержащего нейтральный элемент 0, можно приблизить в Q-метрике последовательностью функций из $\mathcal{D}_0$. Пусть $B_n \downarrow \{0\}$ — убывающая последовательность шаров из B такая, что любые два шара $B_n \subset B_{n-1}$ являются ближайшими соседями, и пусть $\mathbf{1}_{B\setminus B_n} \in \mathcal{D}_0$ — последовательность индикаторов множеств $B \setminus B_n$. Покажем, что

$$Q\big(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B\setminus B_n}, \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B\setminus B_n}\big) = Q(\mathbf{1}_{B_n}, \mathbf{1}_{B_n}) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Ясно, что $Q_V(\mathbf{1}_{B_n}, \mathbf{1}_{B_n}) \to 0$, поэтому достаточно показать, что $Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(\mathbf{1}_{B_n}, \mathbf{1}_{B_n}) \to 0$. Применяя неравенство (3.2), получаем

$$\frac{1}{2} m(B_n)\lambda(B_{n-1}) < Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(\mathbf{1}_{B_n}, \mathbf{1}_{B_n}) < 2m(B_n)\lambda(B_{n-1}).$$

Мы также можем предположить, что $m(B_n) = p^{-n}$ для всех достаточно больших n. Тогда собственное значение $\lambda(B_{n-1})$ равно $p^{\alpha(n-1)}$. Поскольку $0 < \alpha < 1$, мы получаем $m(B_n)\lambda(B_{n-1}) = p^{-(1-\alpha)(n-1)-1} \to 0$, что и требовалось. Таким образом, форма Q с $\operatorname{dom}(Q) = \mathcal{D}$ неотрицательно определена и замыкаема, а ее минимальное замыкание соответствует неотрицательно определенному самосопряженному оператору $\overline{H}$,

$$Q(u,u) = \big(\overline{H}^{1/2}u, \overline{H}^{1/2}u\big) \qquad \forall u \in \operatorname{dom}(Q).$$

3.4. Отрицательный спектр. Далее мы обсудим несколько результатов, дающих информацию об отрицательной части спектра оператора типа Шрёдингера $H = L + V$. Рассмотрим оператор $L = \mathfrak{D}^\gamma$, действующий в $L^p(\mathbb{Q}_p, m)$, где m — мера Хаара.

Теорема 3.11. *Пусть $L = \mathfrak{D}^\gamma$, и пусть $V \in L^p(\mathbb{Q}_p, m)$ для некоторого $p > 1/\gamma$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Оператор $H = L + V$ имеет существенный спектр, совпадающий со спектром оператора L.*

2. *В частности, если H имеет какой-либо отрицательный спектр, то он состоит из последовательности отрицательных собственных значений конечной кратности. Если эта последовательность бесконечна, то она стремится к нулю.*

3. *Предположим, что существует открытое множество $U \subset X$, на котором функция V отрицательна. Если E_λ — нижняя грань спектра оператора $H_\lambda = L + \lambda V$, то $E_\lambda \leq 0$ для всех $\lambda \geq 0$ и $\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda = -\infty$.*

Доказательство. 1. По теореме 3.6 если $c > 0$ достаточно велико, то оператор $H + cI$ неотрицателен и

$$\frac{1}{2}\big\|(L+cI)^{1/2}u\big\|_2 \leq \big\|(H+cI)^{1/2}u\big\|_2 \leq \frac{3}{2}\big\|(L+cI)^{1/2}u\big\|_2 \tag{3.28}$$

для всех $u \in \operatorname{dom}(Q_L)$. Определим $\Delta := (L+cI)^{-1} - (H+cI)^{-1}$. Тогда

$$\Delta = (L+cI)^{-1}V(H+cI)^{-1} = ABCDE,$$

где $A = (L+cI)^{-1/2}$, $B = (L+cI)^{-1/2}|V|^{1/2}$, $C = \operatorname{sign}(V)B^*$, $D = (L+cI)^{1/2}(H+cI)^{-1/2}$ и $E = (H+cI)^{-1/2}$. Ясно, что A и E — ограниченные операторы в $L^2(\mathbb{Q}_p, m)$, B^* и C — компактные операторы в $L^2(\mathbb{Q}_p, m)$ (см. утверждение (E2) в доказательстве теоремы 3.6), а D — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{Q}_p, m)$ в силу (3.28). Таким образом, разность двух резольвент Δ является компактным оператором на L^2, как произведение компактных и ограниченных операторов. По теории возмущений линейных операторов H и L имеют один и тот же существенный спектр (см., например, [24]). Поскольку $\operatorname{Spec}_{\text{ess}}(L) = \operatorname{Spec}(L) \subset [0, \infty)$, любая отрицательная точка спектра оператора H должна быть изолированным собственным значением конечной кратности. Любой предел отрицательных собственных значений лежит в существенном спектре, поэтому единственно возможный предел равен нулю.

2. То, что $E_\lambda \le 0$ для всех $\lambda \ge 0$, следует из включения $0 \in \operatorname{Spec}_{\text{ess}}(L)$ и равенства $\operatorname{Spec}_{\text{ess}}(L+\lambda V) = \operatorname{Spec}_{\text{ess}}(L)$. Для доказательства второго утверждения заметим, что $\mathcal{D}$ является ядром формы $Q_L + Q_{\lambda V}$, поэтому

$$E_\lambda = \inf\bigl\{Q_L(u,u) + Q_{\lambda V}(u,u)\colon\ u \in \mathcal{D}\ \text{ и }\ \|u\|_2 = 1\bigr\}. \tag{3.29}$$

Выберем $u \in \mathcal{D}$ с носителем в множестве U. Тогда при $\lambda \to \infty$ получаем

$$E_\lambda \le Q_L(u,u) + Q_{\lambda V}(u,u) = Q_L(u,u) - \lambda \int\limits_U |V| \cdot |u|^2 \, dm \to -\infty,$$

что и требовалось. □

Следующий пример показывает, что решающее значение для существования отрицательных собственных значений в теореме 3.11 при всех $\lambda > 0$ имеет скорость, с которой потенциал $V(x)$ стремится к нулю при $\|x\|_p \to \infty$.

Пример 3.12. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $H_\lambda = \mathfrak{D}^\alpha - \lambda V$, где

$$V(x) = (\|x\|_p + 1)^{-\beta}$$

для некоторого $0 < \beta < 1$ и $\lambda > 0$.

1. Если $\beta \ge \alpha$, то теорема 3.11 и следствие 3.9 применимы и имеется положительный порог существования отрицательных собственных значений оператора H_λ.

2. Если $\beta > \alpha$, то количество отрицательных собственных значений оператора H_λ с учетом их кратности можно оценить следующим образом:

$$\operatorname{Neg}(H_\lambda) \le c(\alpha,\beta)\lambda^{1/\alpha}.$$

Действительно, в силу [33, Theorem 2.1, Remark 2.2] получаем

$$\operatorname{Neg}(H_\lambda) \le c(\alpha) \int\limits_{\mathbb{Q}_p} (\lambda V)^{1/\alpha} \, dm = c(\alpha)\lambda^{1/\alpha} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{dm(x)}{(\|x\|_p + 1)^{\beta/\alpha}} = c(\alpha,\beta)\lambda^{1/\alpha}.$$

3. Если $0 < \beta < \alpha$, то результат совершенно другой.

Теорема 3.13. *В обозначениях примера 3.12 предположим, что $0 < \beta < \alpha$. Тогда H_λ имеет непустой отрицательный спектр для всех $\lambda > 0$.*

Доказательство. Пусть $f := \mathfrak{D}^{-\alpha}\mathbf{1}_B$, где B — шар с центром в нейтральном элементе, радиус которого мы укажем позднее. Функция f принадлежит $\operatorname{dom}(\mathfrak{D}^\alpha)$, и расчеты на основе

формулы спектрального разрешения и формулы (2.12) показывают, что

$$\mathfrak{D}^{-\alpha}\frac{\mathbf{1}_B}{m(B)} = \mathfrak{D}^{-\alpha}\sum_{T\colon B\subseteq T} f_T = \sum_{T\colon B\subseteq T}\mathfrak{D}^{-\alpha} f_T = \sum_{T\colon B\subseteq T}\left(\frac{m(T')}{p}\right)^{\alpha} f_T =$$

$$= \sum_{T\colon B\subseteq T} m(T)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{1}_T}{m(T)} - \frac{\mathbf{1}_{T'}}{m(T')}\right) = m(B)^{\alpha-1}\sum_{T\colon B\subseteq T}\left(\frac{m(T)}{m(B)}\right)^{\alpha-1}\left(\mathbf{1}_T - \frac{1}{p}\,\mathbf{1}_{T'}\right).$$

В частности, $W := (\mathfrak{D}^{\alpha} f)/f$ выражается формулой

$$W = \frac{\mathbf{1}_B}{\mathfrak{D}^{-\alpha}\mathbf{1}_B} = \frac{p-p^{\alpha}}{p-1}\,\frac{\mathbf{1}_B}{m(B)^{\alpha}} = \frac{p-p^{\alpha}}{p-1}\,\frac{\mathbf{1}_B}{\operatorname{diam}(B)^{\alpha}}.$$

Если $\lambda > 0$ и $0 < \beta < \alpha$, то существует шар B достаточно большого диаметра $\operatorname{diam}(B)$ такой, что

$$W(x) < \frac{\lambda}{(\|x\|_p + 1)^{\beta}} = \lambda V(x)$$

для всех $x \in \mathbb{Q}_p$. Следовательно, поскольку f принадлежит $\operatorname{dom}(\mathfrak{D}^{\alpha})$, получаем

$$Q_{H_\lambda}(f,f) = Q_{\mathfrak{D}^{\alpha}}(f,f) - Q_{\lambda V}(f,f) < Q_{\mathfrak{D}^{\alpha}}(f,f) - Q_W(f,f) = (\mathfrak{D}^{\alpha} f, f) - (W\cdot f, f) = 0,$$

и требуемый результат следует из формул Рэлея–Ритца. □

4. ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА

В этом разделе мы рассматриваем оператор типа Шрёдингера $H = L + V$, где L — однородный иерархический лапласиан, и показываем, что при определенных условиях уравнение $Hu = v$ имеет единственное решение u, которое можно представить в виде

$$u(x) = \int g_H(x,y)\, v(y)\, dm(y).$$

Ядро $g_H(x,y)$ — непрерывная строго положительная функция, ограниченная вне диагонального множества Δ, причем $g_H|_{\Delta} = +\infty$. Назовем $g_H(x,y)$ функцией Грина, определяемой оператором $H = L + V$.

Наша цель здесь — сравнить функции Грина $g_H(x,y)$ и $g_L(x,y)$. Мы проводим наш анализ, предполагая, что $L = \mathfrak{D}^{\alpha}$ и $V(x) = b\|x\|_p^{-\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ и $b \geq b_*$, где

$$b_* := -\left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2$$

— критическое значение параметра b, о котором пойдет речь в теореме 4.1 ниже. Мы докажем (см. следствие 4.8 ниже), что для любого $b \geq b_*$ существует единственное β, $(\alpha-1)/2 \leq \beta < \alpha$, такое, что[3]

$$\frac{g_H(x,y)}{g_{\mathfrak{D}^{\alpha}}(x,y)} \asymp \left(\frac{\|x\|_p}{\|y\|_p} \wedge \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p}\right)^{\beta}.$$

4.1. Предварительные результаты. Напомним, что p-адическая гамма-функция определяется как

$$\Gamma_p(z) = (1-p^{z-1})(1-p^{-z})^{-1}.$$

[3] Это соотношение стоит сравнить с оценками функции Грина для операторов Шрёдингера на римановых многообразиях (см. [22]).

Функция $\Gamma_p(z)$ мероморфна в комплексной плоскости и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z)=1$$

(см. [39, § 8, п. 2]).

Для вещественного β мы рассматриваем функцию $h(x)=\|x\|_p^\beta$ как распределение в духе [39]. Для $\beta\neq\alpha$ из уравнения (3.23) следует, что (в смысле распределений)

$$Lh(x)=\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\|x\|_p^{\beta-\alpha}.$$

В частности, для $\beta>\alpha-1$ и $0<\alpha<1$ распределения $h(x)$ и $Lh(x)$ регулярны (т.е. порождены локально интегрируемыми функциями) и функция

$$V(x):=-\frac{Lh(x)}{h(x)}=-\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}\|x\|_p^{-\alpha} \tag{4.1}$$

принадлежит $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p)$, поэтому она также определяет регулярное распределение.

Теорема 4.1. *Пусть функция $V(x)$ определена уравнением (4.1). Предположим, что $\alpha-1<\beta<\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *При $0<\beta<\alpha$ функция $V(x)$ строго положительна и принадлежит $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p)$. Более того, для любого $b>0$ существует β, $0<\beta<\alpha$, являющееся решением уравнения*

$$-\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}=b, \tag{4.2}$$

такое, что $V(x)=b\|x\|_p^{-\alpha}$ для данного β.

2. *При $\alpha-1<\beta<0$ функция $V(x)$ строго отрицательна, и при всех этих значениях β*

$$V_-(x)=-V(x)\le\left(\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right)^2\|x\|_p^{-\alpha}.$$

Более того, при $b_*:=-\{\Gamma_p((1+\alpha)/2)\}^2$ для любого b, $0>b\ge b_*$, существуют два значения β, являющиеся решениями уравнения (4.2), $1<\beta_1\le(\alpha-1)/2$ и $(\alpha-1)/2\le\beta_2<0$, такие, что $V(x)=b\|x\|_p^{-\alpha}$ для этих значений β.

Доказательство. Положим $\vartheta=\beta+(1-\alpha)/2$ и запишем

$$-\frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta+1-\alpha)}=-\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}+\vartheta\right)\Gamma_p\left(\frac{1+\alpha}{2}-\vartheta\right)=:C_\alpha(\vartheta).$$

Функция $C_\alpha(\vartheta)$ четная, непрерывная и возрастающая на каждом из интервалов $[0,(1+\alpha)/2)$ и $((1+\alpha)/2,+\infty)$. Используя само определение функции $\Gamma_p(\xi)$, несложно показать, что $C_\alpha(\vartheta)$ обладает следующими свойствами (рис. 2):

(1) $C_\alpha(0)=-\{\Gamma_p((1+\alpha)/2)\}^2$ и $C_\alpha((1-\alpha)/2)=0$;

(2) $C_\alpha((1+\alpha)/2-0)=+\infty$ и $C_\alpha((1+\alpha)/2+0)=-\infty$;

(3) $C_\alpha(+\infty)=-p^\alpha<C_\alpha(0)$.

Ясно, что из свойств (1)–(3) вытекает нужный результат. □

Определим линейное пространство $\mathcal{D}_0:=\{u\in\mathcal{D}\colon u(0)=0\}$. Для V указанного выше вида и $L=\mathfrak{D}^\alpha$ определим линейный оператор $H=L+V$ с областью определения $\mathrm{dom}(H)=\mathcal{D}_0$. Очевидно, оператор $H\colon\mathcal{D}_0\to L^2(\mathbb{Q}_p)$ симметричен и

$$Q(u,u)=(Hu,u)\qquad\forall u\in\mathrm{dom}(H).$$

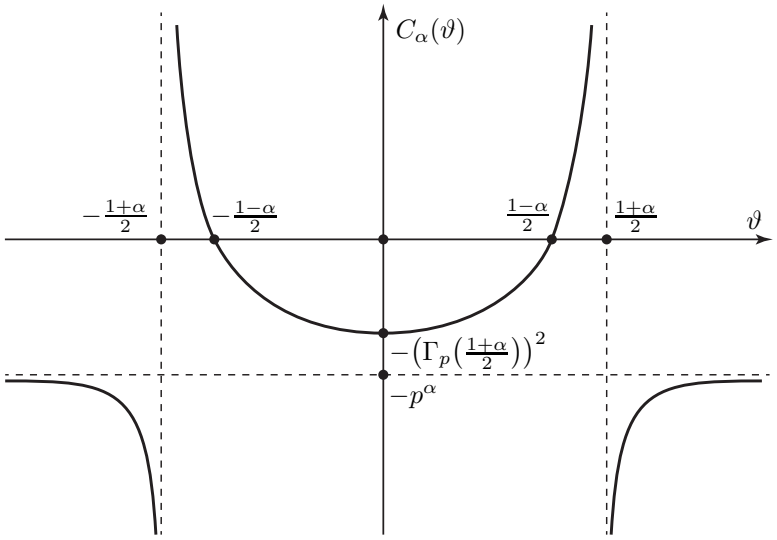

Рис. 2. Функция C_α

Теорема 4.2. *Предположим, что $\alpha - 1 < \beta < \alpha$. Тогда для L и V указанного выше вида оператор $H = L + V$ симметричен и неотрицательно определен. В частности, H замыкаем и его минимальное замыкание $\overline{H}$ представляет собой неотрицательно определенный самосопряженный оператор, отвечающий квадратичной форме $Q = Q_L + Q_V$, т.е.*

$$Q(u,u) = (\overline{H}u, u) \qquad \forall u \in \operatorname{dom}(\overline{H}).$$

Доказательство. В случае $0 < \beta < \alpha$ мы можем применить утверждение 1 теоремы 4.1 и теорему 3.3. В случае $\alpha - 1 < \beta < 0$ мы можем применить утверждение 2 теоремы 4.1, пример 3.10 и следствие 3.9. □

4.2. h-Преобразование формы Дирихле. В уравнении (4.1) выберем функцию $h(x) = \|x\|_p^\beta$, где $(\alpha - 1)/2 < \beta < \alpha$. Полагая $V = (-Lh)/h$ и $H = L + V$, мы можем применить результаты предыдущего пункта, поэтому H — неотрицательно определенный симметричный оператор, действующий в $L^2(X, m)$ (мы сохраняем обозначение X для кольца $\mathbb{Q}_p$, снабженного мерой Хаара m). Его минимальное замыкание $\overline{H}$ — неотрицательный самосопряженный оператор, отвечающий квадратичной форме Q.

Согласно нашему выбору $h^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, m)$, поэтому $h^2\, m$ — мера Радона. В частности, оператор

$$Ug = hg\colon\ L^2(X, h^2\, m) \to L^2(X, m)$$

является изометрией. Рассмотрим неотрицательный самосопряженный оператор

$$\mathcal{H} = U^{-1} \circ \overline{H} \circ U\colon\ L^2(X, h^2\, m) \to L^2(X, h^2\, m)$$

и зададим следующую неотрицательно определенную квадратичную форму:

$$Q_{\mathcal{H}}(u,u) = \begin{cases} (\mathcal{H}^{1/2}u, \mathcal{H}^{1/2}u), & u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}^{1/2}), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $Q = Q_L + Q_V$, мы получаем равенство

$$Q_{\mathcal{H}}(u,u) = Q(hu, hu) = Q_L(hu, hu) + Q_V(hu, hu) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_X \int\limits_X \bigl(h(x)u(x) - h(y)u(y)\bigr)^2 J(x,y)\, dm(y)\, dm(x) + \int\limits_X V(x)\, u^2(x) h^2(x)\, dm(x),$$

где ядро $J(x,y)$ имеет вид

$$J(x,y)=-\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\,\frac{1}{\|x-y\|_p^{1+\alpha}}. \tag{4.3}$$

Теорема 4.3. *Предположим, что $0<\alpha<1$ и $(\alpha-1)/2<\beta<\alpha$. Тогда $\mathcal{D}\subset\operatorname{dom}(Q_{\mathcal{H}})$ и справедливо следующее равенство*:

$$Q_{\mathcal{H}}(u,u)=\frac{1}{2}\iint\big(u(x)-u(y)\big)^2J(x,y)\,h(y)\,dm(y)\,h(x)\,dm(x). \tag{4.4}$$

В частности, форма $Q_{\mathcal{H}}$ является плотно определенной замкнутой марковской квадратичной формой в $L^2(X,h^2\,m)$. Другими словами, $Q_{\mathcal{H}}$ — регулярная форма Дирихле относительно $L^2(X,h^2\,m)$, для которой $\mathcal{D}$ является ядром.

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{D}\subset\operatorname{dom}(Q_{\mathcal{H}})$. Достаточно показать, что форма $Q_{\mathcal{H}}(u,u)$ конечна для любой u вида $u=\mathbf{1}_B$ — индикатора открытого шара в X. Имеем $Q_{\mathcal{H}}(u,u)=$ $=Q_L(hu,hu)+Q_V(hu,hu)$. Так как $V(x)=b\|x\|_p^{-\alpha}$ и $\beta>(\alpha-1)/2$, то

$$|Q_V(hu,hu)|=|b|\int\limits_B\|x\|_p^{-\alpha+2\beta}\,dm(x)<\infty.$$

Если $0\notin B$, то, очевидно, $hu\in\mathcal{D}\subset\operatorname{dom}(L)$ и, следовательно,

$$Q_L(hu,hu)=(Lhu,hu)<\infty.$$

Предположим теперь, что $0\in B$, и положим $h_B:=h\cdot\mathbf{1}_B$. Тогда

$$\begin{aligned}Q_L(hu,hu)&=\frac{1}{2}\iint\big(h_B(x)-h_B(y)\big)^2J(x,y)\,dm(x)\,dm(y)=\\&=\iint\limits_{\{(x,y)\in B\times B\colon\,\|x\|_p<\|y\|_p\}}\big(h(x)-h(y)\big)^2J(x,y)\,dm(x)\,dm(y)+\int\limits_B h^2(x)\,dm(x)\int\limits_{B^{\mathrm{c}}}J(x,y)\,dm(y).\end{aligned}$$

Второе слагаемое, которое мы обозначим через II, конечно. Действительно,

$$\mathrm{II}=\int\limits_B h^2(x)\,dm(x)\int\limits_{B^{\mathrm{c}}}J(0,z)\,dm(z)<\infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{diam}(B)=1$. В силу ультраметрического неравенства при $\|x\|_p<\|y\|_p$ имеем $\|x-y\|_p=\|y\|_p$, поэтому первое слагаемое, которое мы обозначим через I, можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=-\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\int\limits_{\|x\|_p=p^{-k}}dm(x)\int\limits_{\|y\|_p=p^{-k+l}}dm(y)\big(\|x\|_p^{\beta}-\|y\|_p^{\beta}\big)^2\|y\|_p^{-(1+\alpha)}=\\&=-\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}p^{-k}p^{-k+l}p^{-(1+\alpha)(-k+l)}\big(p^{-k\beta}-p^{(-k+l)\beta}\big)^2=\\&=-\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k(1-\alpha+2\beta)}\sum_{l=1}^{k}p^{-l\alpha}(1-p^{l\beta})^2.\end{aligned}$$

То, что член I конечен при $(\alpha-1)/2<\beta<\alpha$, проверяется непосредственно. Чтобы доказать равенство (4.4), достаточно проверить его для индикатора $u=\mathbf{1}_B$ открытого шара B. Докажем сначала тождество

$$Q_V(hu,hu)=-Q_L(hu,h). \tag{4.5}$$

Достаточно проверить тождество, предполагая, что нейтральный элемент не лежит в B. Для обоснования этого утверждения поступим, как в примере 3.10: если $0 \in B$, выберем убывающую последовательность шаров B_n в B, сходящуюся к $\{0\}$. Тогда согласно нашему утверждению $Q_V(h \cdot \mathbf{1}_{B\setminus B_n}, h \cdot \mathbf{1}_{B\setminus B_n}) = -Q_L(h \cdot \mathbf{1}_{B\setminus B_n}, h)$ и левая и правая части этого равенства стремятся к $Q_V(h \cdot \mathbf{1}_B, h \cdot \mathbf{1}_B)$ и $-Q_L(h \cdot \mathbf{1}_B, h)$ соответственно. Рассмотрим распределение $f_\gamma(x) = \|x\|_p^{\gamma-1}/\Gamma_p(\gamma)$. Согласно [39, § 9] имеем $h(x) = \Gamma_p(\beta+1)f_{\beta+1}$ и

$$-Lh = f_{-\alpha} * \Gamma_p(\beta+1)f_{\beta+1} = \Gamma_p(\beta+1)f_{\beta-\alpha+1} \in L^1_{\mathrm{loc}}.$$

Поскольку мы предполагаем, что $0 \in B$, функции $Vhu = (-Lh)u$ и $hu := h_B$ принадлежат $\mathcal{D}$ и

$$\begin{aligned} Q_V(hu, hu) &= \int (-Lh)h_B\,dm = ((-Lh) * h_B)(0) = \Gamma_p(\beta+1)\big((f_{-\alpha} * f_{\beta+1}) * h_B\big)(0) = \\ &= \Gamma_p(\beta+1)\big(f_{\beta+1} * (f_{-\alpha} * h_B)\big)(0) = \int h(-Lh_B)\,dm = \\ &= -\iint \big(h_B(x) - h_B(y)\big)h(x)\,J(x,y)\,dm(x)\,dm(y). \end{aligned}$$

В силу симметрии $J(x,y) = J(y,x)$ получаем

$$\begin{aligned} Q_V(hu, hu) &= -\iint \big(h_B(y) - h_B(x)\big)h(y)\,J(x,y)\,dm(x)\,dm(y) = \\ &= -\frac{1}{2}\iint \big(h_B(x) - h_B(y)\big)\big(h(x) - h(y)\big)\,J(x,y)\,dm(x)\,dm(y), \end{aligned}$$

или, другими словами, $Q_V(hu, hu) = -Q_L(hu, h)$, что и требовалось. С другой стороны, для $u = \mathbf{1}_B$ имеем

$$Q_L(hu, hu) = \frac{1}{2}\iint \big(h_B(x) - h_B(y)\big)^2 J(x,y)\,dm(x)\,dm(y). \tag{4.6}$$

Из равенств (4.5) и (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{H}}(u,u) &= Q_L(hu, hu - h) = \\ &= \frac{1}{2}\iint \big(h_B(x) - h_B(y)\big)\big[\big(h_B(x) - h(x)\big) - \big(h_B(y) - h(y)\big)\big]J(x,y)\,dm(x)\,dm(y), \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{H}}(u,u) = \frac{1}{2}\iint \Big[&h_B(x)\big(h_B(x) - h(x)\big) + h_B(y)\big(h_B(y) - h(y)\big) - \\ &- h_B(x)\big(h_B(y) - h(y)\big) - h_B(y)\big(h_B(x) - h(x)\big)\Big]J(x,y)\,dm(x)\,dm(y). \end{aligned}$$

В силу симметрии получаем

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{H}}(u,u) &= \iint \big[h_B(x)\big(h_B(x) - h(x)\big) - h_B(x)\big(h_B(y) - h(y)\big)\big]J(x,y)\,dm(x)\,dm(y) = \\ &= \iint \big[\big(h_B(x)^2 - h(x)h_B(x)\big) - h_B(x)\big(h_B(y) - h(y)\big)\big]J(x,y)\,dm(x)\,dm(y) = \\ &= \iint h_B(x)\big(h(y) - h_B(y)\big)J(x,y)\,dm(x)\,dm(y). \end{aligned}$$

Аналогично, преобразуя правую часть равенства (4.4), находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint \bigl(\mathbf{1}_B(x)-\mathbf{1}_B(y)\bigr)^2 J(x,y)\,h(y)\,dm(y)h(x)\,dm(x) &= \\ &= \frac{1}{2}\iint \bigl(h_B(x)h(y)-2h_B(x)h_B(y)+h_B(y)h(x)\bigr)J(x,y)\,dm(y)\,dm(x) = \\ &= \frac{1}{2}\iint \bigl[h_B(x)\bigl(h(y)-h_B(y)\bigr)+h_B(y)\bigl(h(x)-h_B(x)\bigr)\bigr]J(x,y)\,dm(y)\,dm(x) = \\ &= \iint h_B(x)\bigl(h(y)-h_B(y)\bigr)J(x,y)\,dm(y)\,dm(x).\end{aligned}$$

Это доказывает равенство (4.4) вместе с тем фактом, что квадратичная форма $Q_{\mathcal{H}}(u,u)$ является регулярной формой Дирихле в $L^2(X,h^2\,m)$, как и утверждалось. $\square$

Определение 4.4. Симметричная марковская полугруппа $(P_t)_{t>0}$ в $L^2(X,\mu)$ называется *невозвратной*, если ее резольвенту $(G_\lambda)_{\lambda>0}$ также можно определить для $\lambda=0$ как самосопряженный (возможно, неограниченный) оператор $G_0=\int_0^\infty P_t\,dt$ такой, что $\mathbf{1}_K\in\operatorname{dom}(G_0)$ для любого компакта $K\subset X$.

Форма Дирихле $Q(u,u)$ относительно $L^2(X,\mu)$ называется *невозвратной*, если соответствующая ей симметричная марковская полугруппа $(P_t)_{t>0}$ является невозвратной.

Можно показать, что форма $Q(u,u)$ является невозвратной тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для любого компакта $K\subset X$ существует константа $C_K>0$ такая, что[4]

$$\int_X |u|\,d\mu \le C_K\sqrt{Q(u,u)} \qquad \forall u\in\operatorname{dom}(Q).$$

Теорема 4.5. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.3.*

1. *Существует иерархический лапласиан $\mathcal{L}$, связанный с (неоднородным) ультраметрическим пространством с мерой $(X,h\,m)$, такой, что*

$$Q_{\mathcal{H}}(u,u)=Q_{\mathcal{L}}(u,u) \qquad \forall u\in L^2(X,h\,m)\cap L^2(X,h^2\,m).$$

2. *В частности, $\mathcal{D}\subset\operatorname{dom}(Q_{\mathcal{L}})$ является ядром для $Q_{\mathcal{L}}$ (т.е. $Q_{\mathcal{L}}(u,u)$ — регулярная форма Дирихле относительно $L^2(X,h\,m)$).*

3. *Форма Дирихле $Q_{\mathcal{L}}$ является невозвратной.*[5]

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$J(B):=-\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\,\frac{1}{m(B)^{1+\alpha}}, \qquad B\in\mathcal{B},$$

определенную на множестве $\mathcal{B}$ всех открытых шаров. Так как в p-адической метрике $m(B)=\operatorname{diam}(B)$ для любого шара B, то

$$J(x,y)=J(x\curlywedge y),$$

где $x\curlywedge y$ — минимальный шар, содержащий x и y. Рассмотрим также меру Радона $\widetilde{m}=h\,m$.

[4] Это условие невозвратности было впервые введено А. Бёрлингом и Ж. Дени в незаменимой статье [12]. Оно несколько более ограничительное, чем определение невозвратности, данное М. Фукусимой [20, Sect. 1.5].

[5] Справедлив следующий аналог теоремы 4.5: пусть $X^{\mathcal{H}}$ и $X^{\mathcal{L}}$ — процессы Ханта, связанные с формами Дирихле $Q_{\mathcal{H}}$ и $Q_{\mathcal{L}}$ соответственно. Согласно [20, Theorem 5.5.2, Example 5.5.1] их траектории связаны случайной заменой времени $X^{\mathcal{H}}_t=X^{\mathcal{L}}_{\tau_t}$, где $\tau_t=\inf\{s>0\colon A_t>t\}$ и $A_t=\int_0^t h(X^{\mathcal{H}}_s)\,ds$ — положительный непрерывный аддитивный функционал. Отсюда, в частности, следует, что характеристические операторы Дынкина для этих процессов связаны уравнением $(-\mathcal{H}u)(x)=(-\mathcal{L}u)(x)/h(x)$. Мы используем этот факт в следующих пунктах для решения уравнения $Hu=v$.

Мы утверждаем, что введенная функция обладает следующими свойствами:

(i) $S \subset T \Rightarrow J(S) > J(T)$ и $J(T) \to 0$ при $T \to X$;

(ii) $\widetilde{\lambda}(B) := \sum_{S\colon B \subseteq S} \widetilde{m}(S)(J(S) - J(S')) < \infty$ для любого $B \in \mathcal{B}$;

(iii) $\widetilde{\lambda}(B) \to +\infty$ при $B \to \{x\}$ для любого $x \in X$.

Свойство (i) очевидно. Чтобы доказать свойство (ii), запишем

$$\widetilde{\lambda}(B) = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\biggl(1 - \frac{1}{p^{1+\alpha}}\biggr) \sum_{S\colon B \subseteq S} \frac{\widetilde{m}(S)}{m(S)^{1+\alpha}} = (p^\alpha - 1) \sum_{S\colon B \subseteq S} \frac{\widetilde{m}(S)}{m(S)^{1+\alpha}}.$$

Далее, используя тождество

$$\int f(\|x\|_p)\, dm(x) = \biggl(1 - \frac{1}{p}\biggr) \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(p^\gamma) p^\gamma,$$

мы находим, что если $0 \in S$, то

$$\widetilde{m}(S) = \frac{p-1}{p - p^{-\beta}} m(S)^{1+\beta}, \tag{4.7}$$

откуда

$$\frac{\widetilde{m}(S)}{m(S)^{1+\alpha}} = \frac{p-1}{p - p^{-\beta}} \frac{1}{m(S)^{\alpha-\beta}}. \tag{4.8}$$

Очевидно, что из равенства (4.8) вытекает свойство (ii). С другой стороны, для достаточно малых $B \in \mathcal{B}(x)$ имеем

$$\widetilde{\lambda}(B) \geq (p^\alpha - 1)\frac{\widetilde{m}(B)}{m(B)^{1+\alpha}} > (p^\alpha - 1) m(B)^{-\alpha} \min_{y \in B} \|y\|_p^\beta \tag{4.9}$$

и

$$\min_{y \in B} \|y\|_p^\beta = \begin{cases} \|x\|_p^\beta, & \text{если } \ x \neq 0, \\ m(B)^\beta, & \text{если } \ x = 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

поэтому из (4.9) и (4.10) вытекает свойство (iii). Согласно [3, Sect. 2] из свойств (i)–(iii) следует, что оператор

$$\mathcal{L}u(x) = \int \bigl(u(x) - u(y)\bigr) J(x,y)\, d\widetilde{m}(y) \tag{4.11}$$

является иерархическим лапласианом в $L^2(X, \widetilde{m})$. В частности, $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom}(\mathcal{L})$ и для $u \in \mathcal{D}$ имеем

$$Q_{\mathcal{L}}(u,u) = \frac{1}{2} \iint \bigl(u(x) - u(y)\bigr)^2 J(x,y)\, d\widetilde{m}(y)\, d\widetilde{m}(x) = Q_{\mathcal{H}}(u,u).$$

То, что $\mathcal{D}$ является ядром формы $Q_{\mathcal{L}}$, следует из существенной самосопряженности $\mathcal{L}$ как иерархического лапласиана. Действительно, в этом случае $(Q_{\mathcal{L}}, \operatorname{dom}(Q_{\mathcal{L}}))$ совпадает с минимальным расширением $(Q_{\mathcal{L}}, \mathcal{D})$, которое имеет $\mathcal{D}$ в качестве ядра. Доказательство того, что марковская полугруппа $(e^{-t\mathcal{L}})_{t>0}$ невозвратная, т.е. что $\mathbf{1}_K$ принадлежит $\operatorname{dom}(G_0)$ для любого компакта K, основано на специальном рассуждении, и мы отложим его до следующего пункта (теорема 4.6). Покажем, как вывести условие невозвратности Бёрлинга–Дени из невозвратности полугруппы $(e^{-t\mathcal{L}})_{t>0}$. Для любой функции $u \in \operatorname{dom}(Q_{\mathcal{L}})$ имеем $|u| \in \operatorname{dom}(Q_{\mathcal{L}})$ и $Q_{\mathcal{L}}(|u|,|u|) \leq Q_{\mathcal{L}}(u,u)$. Кроме того, $v := G_0\, \mathbf{1}_K$ лежит в $\operatorname{dom}(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}v = \mathbf{1}_K$, поэтому

$$\int\limits_K |u|\, d\widetilde{m} = Q_{\mathcal{L}}(|u|, v) \leq \sqrt{Q_{\mathcal{L}}(v,v)}\sqrt{Q_{\mathcal{L}}(u,u)}.$$

Полагая $C_K := \sqrt{Q_{\mathcal{L}}(v,v)}$, получаем требуемый результат. $\square$

4.3. Функция Грина $g_{\mathcal{L}}(x,y)$. Далее мы предполагаем, что $(\alpha-1)/2<\beta<\alpha$. Марковская резольвента $G_\lambda=(\mathcal{L}+\lambda\mathrm{I})^{-1}$, $\lambda>0$, действует в банаховых пространствах $C_\infty(X)$ и $L^p(X,\widetilde{m})$, где $\widetilde{m}=h\,m$, как ограниченный оператор и допускает следующее представление:

$$G_\lambda u(x)=\int g_{\mathcal{L}}(\lambda,x,y)\,u(y)\,d\widetilde{m}(y).$$

Здесь функция $g_{\mathcal{L}}(\lambda,x,y)$, называемая λ-функцией Грина, непрерывна и принимает конечные значения вне диагонального множества. Как функция от λ она убывает, поэтому существует (конечный или бесконечный) предел

$$g_{\mathcal{L}}(x,y):=\lim_{\lambda\to0}g_{\mathcal{L}}(\lambda,x,y).$$

Функция $g_{\mathcal{L}}(x,y)$ называется функцией Грина оператора $\mathcal{L}$.

Теорема 4.6. *Функция Грина $g_{\mathcal{L}}(x,y)$ — непрерывная функция, принимающая конечные значения вне диагонального множества (т.е. марковская полугруппа $(e^{-t\mathcal{L}})_{t>0}$ является невозвратной). При этом имеет место соотношение*

$$g_{\mathcal{L}}(x,y)\asymp\frac{\|x-y\|_p^{\alpha-1}}{(\|x\|_p\vee\|y\|_p)^{2\beta}},\tag{4.12}$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{g_{\mathcal{L}}(x,y)}{g_L(x,y)}\asymp\left(\frac{1}{\|x\|_p}\wedge\frac{1}{\|y\|_p}\right)^{2\beta}.\tag{4.13}$$

Доказательство. Снабдим $X=\mathbb{Q}_p$ ультраметрикой $d(x,y)=p^{-\alpha}\|x-y\|_p^\alpha$, внутренней для иерархического лапласиана L, и определим следующие переменные:

$$F(x,R)=\left(\int_R^\infty\left(\frac{1}{m(B_r(x))}\int_{B_r(x)}h\,dm\right)\frac{dr}{r^2}\right)^{-1}\qquad\text{и}\qquad\widetilde{d}(x,y)=F(x,d(x,y)).\tag{4.14}$$

Так как при каждом фиксированном x функция $R\to F(x,R)$ непрерывна, строго возрастает и принимает значения 0 в 0 и ∞ в ∞, то $\widetilde{d}(x,y)$ — ультраметрика на X. Через $\widetilde{B}_{\widetilde{R}}(x)$ обозначим $\widetilde{d}$-шар радиуса $\widetilde{R}$ с центром в x. Тогда $\widetilde{B}_{\widetilde{R}}(x)=B_R(x)$, если

$$\widetilde{R}=F(x,R).$$

Поскольку L — иерархический лапласиан, действующий в $L^2(X,m)$, а $d(x,y)$ — его внутренняя ультраметрика, имеем (см. [8, формула (3.11)])

$$J(x,y)=\int_{d(x,y)}^\infty\frac{1}{m(B_R(x))}\frac{dR}{R^2}=\int_{\widetilde{d}(x,y)}^\infty\frac{1}{\widetilde{m}\big(\widetilde{B}_{\widetilde{R}}(x)\big)}\frac{d\widetilde{R}}{\widetilde{R}^2}.\tag{4.15}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{d}(x,y)$ — внутренняя ультраметрика, соответствующая иерархическому лапласиану $\mathcal{L}$, а

$$\widetilde{V}(x,\widetilde{R}):=\widetilde{m}\big(\widetilde{B}_{\widetilde{R}}(x)\big)=\widetilde{m}(B_R(x))=\int_{B_R(x)}h\,dm$$

— его функция объема. Мы утверждаем, что

$$\frac{\widetilde{m}(B_R(x))}{m(B_R(x))}\asymp\begin{cases}m(B_R(x))^\beta, & \text{если}\ \ d(0,x)\le R,\\ h(x), & \text{если}\ \ d(0,x)>R.\end{cases}\tag{4.16}$$

Действительно, если $d(0,x) \le R$, то $B_R(x) = B_R(0)$; поэтому, применяя (4.7), получим

$$\frac{\widetilde{m}(B_R(x))}{m(B_R(x))} = \frac{1}{m(B_R(x))} \int\limits_{B_R(x)} h\,dm = \frac{1}{m(B_R(0))} \int\limits_{B_R(0)} h\,dm =$$

$$= \frac{p-1}{p-p^{-\beta}}\, m(B_R(0))^{\beta} = \frac{p-1}{p-p^{-\beta}}\, m(B_R(x))^{\beta}.$$

С другой стороны, если $d(0,x) > R$, то для $y \in B_R(x)$ имеем $d(y,0) = d(x,0)$, поэтому

$$\frac{\widetilde{m}(B_R(x))}{m(B_R(x))} = \frac{1}{m(B_R(x))} \int\limits_{B_R(x)} h(y)\,dm(y) = \frac{1}{m(B_R(x))} \int\limits_{B_R(x)} h(x)\,dm(y) = h(x).$$

Заметим, что асимптотическое соотношение (4.16) выполнено равномерно по x и R в том смысле, что соответствующее двустороннее неравенство содержит константы, не зависящие от x и R. В свою очередь, из (4.16) вытекает следующее (равномерное) асимптотическое соотношение:

$$\widetilde{R} = F(x,R) \asymp \begin{cases} \dfrac{R}{h(x)}, & \text{если} \quad R < d(0,x), \\ R^{(\alpha-\beta)/\alpha}, & \text{если} \quad R \ge d(0,x). \end{cases} \tag{4.17}$$

Рассмотрим сначала случай $d(0,x) \le R$. Имеем

$$\int\limits_R^{\infty} \frac{\widetilde{m}(B_r(x))}{m(B_r(x))}\,\frac{dr}{r^2} \asymp \int\limits_R^{\infty} m(B_r(x))^{\beta}\,\frac{dr}{r^2} \asymp \int\limits_R^{\infty} r^{-(2-\beta/\alpha)}\,dr \asymp R^{-(1-\beta/\alpha)},$$

откуда

$$\widetilde{R} := F(x,R) \asymp R^{1-\beta/\alpha}.$$

В случае $d(0,x) > R$ существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$\int\limits_R^{\infty} \frac{\widetilde{m}(B_r(x))}{m(B_r(x))}\,\frac{dr}{r^2} = \int\limits_R^{d(0,x)} \frac{\widetilde{m}(B_r(x))}{m(B_r(x))}\,\frac{dr}{r^2} + \int\limits_{d(0,x)}^{\infty} \frac{\widetilde{m}(B_r(x))}{m(B_r(x))}\,\frac{dr}{r^2} =$$

$$= C_1 d(0,x)^{\beta/\alpha}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d(0,x)}\right) + \frac{C_2}{d(0,x)^{1-\beta/\alpha}} \asymp \frac{d(0,x)^{\beta/\alpha}}{R} \asymp \frac{h(x)}{R},$$

откуда

$$\widetilde{R} := F(x,R) \asymp \frac{R}{h(x)}.$$

Далее, из асимптотических соотношений (4.16) и (4.17) вытекает следующее (равномерное) асимптотическое соотношение:

$$\widetilde{V}(x,\widetilde{R}) = \widetilde{m}(B_R(x)) \asymp \begin{cases} h(x)R^{1/\alpha}, & \text{если} \quad R < d(0,x), \\ R^{(1+\beta)/\alpha}, & \text{если} \quad R \ge d(0,x), \end{cases} \tag{4.18}$$

или, что эквивалентно,

$$\widetilde{V}(x,\widetilde{R}) \asymp \begin{cases} (h(x))^{1+1/\alpha}\widetilde{R}^{1/\alpha}, & \text{если} \quad \widetilde{R} < \widetilde{d}(0,x), \\ \widetilde{R}^{(1+\beta)/(\alpha-\beta)}, & \text{если} \quad \widetilde{R} \ge \widetilde{d}(0,x). \end{cases} \tag{4.19}$$

1. Рассмотрим случай $\|x-y\|_p = \|x\|_p \vee \|y\|_p$. Тогда, очевидно, $d(x,y) = d(0,x) \vee d(0,y)$ и аналогичное равенство имеет место для метрики $\widetilde{d}$. Если $R \geq d(0,x)$, то

$$\widetilde{R} := F(x,R) \asymp R^{1-\beta/\alpha} \tag{4.20}$$

и

$$\widetilde{V}(x,\widetilde{R}) \asymp R^{(1+\beta)/\alpha} \asymp \widetilde{R}^{(1+\beta)/(\alpha-\beta)}. \tag{4.21}$$

Из соотношения (4.21) вытекают следующие два результата.

(i) Поскольку $\delta := (1+\beta)/(\alpha-\beta) > 1$, функция $\widetilde{R} \to 1/\widetilde{V}(x,\widetilde{R})$ интегрируема в точке ∞ для любого фиксированного x, поэтому марковская полугруппа $(e^{-t\mathcal{L}})_{t>0}$ (или, что эквивалентно, форма Дирихле $Q_{\mathcal{L}}$) является невозвратной (см. [8, теорема 2.28]), как указано в теореме 4.5.

(ii) Тот факт, что $\widetilde{V}(x,\widetilde{R}) \asymp \widetilde{R}^{\delta}$, $\delta > 1$, для $\widetilde{R} \geq \widetilde{d}(0,x)$, влечет за собой следующее асимптотическое соотношение:

$$g_{\mathcal{L}}(x,y) = \int\limits_{\widetilde{d}(x,y)}^{\infty} \frac{d\widetilde{R}}{\widetilde{V}(x,\widetilde{R})} \asymp \frac{\widetilde{d}(x,y)}{\widetilde{V}(x,\widetilde{d}(x,y))}, \tag{4.22}$$

или, что эквивалентно (см. (4.20) и (4.21)),

$$g_{\mathcal{L}}(x,y) \asymp \|x-y\|_p^{\alpha-1-2\beta} = \frac{\|x-y\|_p^{\alpha-1}}{(\|x\|_p \vee \|y\|_p)^{2\beta}} \tag{4.23}$$

при условии, что $\|x\|_p \leq \|x-y\|_p$. Аналогично, в силу симметрии соотношение (4.23) выполнено при $\|y\|_p \leq \|x-y\|_p$. Таким образом, наконец, из предположения, что $\|x-y\|_p = \|x\|_p \vee \|y\|_p$, следует (4.23), как и утверждалось.

2. Рассмотрим случай $\|x-y\|_p < \|x\|_p \vee \|y\|_p$. В этом случае имеем $\|x\|_p = \|y\|_p$ и $\|x-y\|_p < \|x\|_p$ и аналогичные соотношения выполнены для метрик d и $\widetilde{d}$. С учетом этого запишем

$$g_{\mathcal{L}}(x,y) = \int\limits_{\widetilde{d}(x,y)}^{\infty} \frac{d\widetilde{R}}{\widetilde{V}(x,\widetilde{R})} = \left(\int\limits_{\widetilde{d}(x,y)}^{\widetilde{d}(0,x)} + \int\limits_{\widetilde{d}(0,x)}^{\infty} \right) \frac{d\widetilde{R}}{\widetilde{V}(x,\widetilde{R})} = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Так как при $\widetilde{d}(0,x) \leq \widetilde{R}$ мы имеем $\widetilde{V}(x,\widetilde{R}) \asymp \widetilde{R}^{(1+\beta)/(\alpha-\beta)}$, то

$$\mathrm{II} \asymp \frac{\widetilde{d}(0,x)}{\widetilde{V}(x,\widetilde{d}(0,x))} \asymp \frac{1}{(\widetilde{d}(0,x))^{(1-\alpha+2\beta)/(\alpha-\beta)}}.$$

Для оценки первого члена запишем

$$\mathrm{I} = \int\limits_{\widetilde{d}(x,y)}^{\widetilde{d}(0,x)} \frac{d\widetilde{R}}{\widetilde{V}(x,\widetilde{R})} \asymp \frac{1}{(h(x))^{1+1/\alpha}} \int\limits_{\widetilde{d}(x,y)}^{\widetilde{d}(0,x)} \frac{d\widetilde{R}}{\widetilde{R}^{1/\alpha}}$$

и

$$\frac{1}{(h(x))^{1+1/\alpha}} \int\limits_{\widetilde{d}(x,y)}^{\widetilde{d}(0,x)} \frac{d\widetilde{R}}{\widetilde{R}^{1/\alpha}} = \frac{1}{(h(x))^{1+1/\alpha}} \left(\frac{1}{(\widetilde{d}(x,y))^{1/\alpha-1}} - \frac{1}{(\widetilde{d}(0,x))^{1/\alpha-1}} \right) =$$

$$= \frac{(\widetilde{d}(x,y))^{1-1/\alpha}}{(h(x))^{1+1/\alpha}} \left(1 - \left(\frac{\widetilde{d}(x,y)}{\widetilde{d}(0,x)} \right)^{1/\alpha-1} \right).$$

Наконец, поскольку $\|x\|_p = \|y\|_p$ и $\|x-y\|_p < \|x\|_p$, получаем

$$g_{\mathcal{L}}(x,y) = \mathrm{I} + \mathrm{II} \asymp \frac{(\widetilde{d}(x,y))^{1-1/\alpha}}{(h(x))^{1+1/\alpha}} \left(1 - \left(\frac{\widetilde{d}(x,y)}{\widetilde{d}(0,x)}\right)^{1/\alpha-1}\right) + \frac{1}{(\widetilde{d}(0,x))^{(1-\alpha+2\beta)/(\alpha-\beta)}} =$$

$$= \frac{(\widetilde{d}(x,y))^{1-1/\alpha}}{(h(x))^{1+1/\alpha}} \left(\left(1 - \left(\frac{\widetilde{d}(x,y)}{\widetilde{d}(0,x)}\right)^{1/\alpha-1}\right) + \frac{(\widetilde{d}(x,y))^{1/\alpha-1}(h(x))^{1+1/\alpha}}{(\widetilde{d}(0,x))^{(1-\alpha+2\beta)/(\alpha-\beta)}}\right).$$

Согласно (4.20) мы имеем $h(x) \asymp (\widetilde{d}(0,x))^{\beta/(\alpha-\beta)}$, откуда

$$\frac{(h(x))^{1+1/\alpha}}{(\widetilde{d}(0,x))^{(1-\alpha+2\beta)/(\alpha-\beta)}} \asymp \frac{(\widetilde{d}(0,x))^{(\beta/(\alpha-\beta))(1+1/\alpha)}}{(\widetilde{d}(0,x))^{(1-\alpha+2\beta)/(\alpha-\beta)}} \asymp \frac{1}{(\widetilde{d}(0,x))^{1/\alpha-1}}$$

и в итоге с учетом (4.17) получаем

$$g_{\mathcal{L}}(x,y) \asymp \frac{(\widetilde{d}(x,y))^{1-1/\alpha}}{(h(x))^{1+1/\alpha}} \asymp \left(\frac{d(x,y)}{h(x)}\right)^{1-1/\alpha} \frac{1}{(h(x))^{1+1/\alpha}} =$$

$$= \frac{(d(x,y))^{1-1/\alpha}}{(h(x))^2} \asymp \frac{\|x-y\|_p^{\alpha-1}}{\|x\|_p^{2\beta}} = \frac{\|x-y\|_p^{\alpha-1}}{(\|x\|_p \vee \|y\|_p)^{2\beta}}.$$

Доказательство теоремы завершено. □

4.4. Решение уравнения $Hu = v$. На протяжении всего этого пункта мы предполагаем, что $(\alpha-1)/2 \le \beta < \alpha$ и что b и β связаны уравнением (4.2). Тогда по теореме 4.1

$$H = \mathfrak{D}^\alpha + b\|x\|_p^{-\alpha}$$

— самосопряженный неотрицательно определенный оператор, действующий в $L^2(X,m)$.

Отметим, что b — возрастающая непрерывная функция от β, значения которой заполняют весь интервал $[b_*, +\infty)$, где $b_* = -\{\Gamma_p((1+\alpha)/2)\}^2$. В частности, b пробегает интервал $[b_*, 0)$, когда β пробегает интервал $[(\alpha-1)/2, 0)$, и b пробегает $[0, +\infty)$, когда β пробегает $[0, \alpha)$.

Теорема 4.7. *Уравнение $Hu = v$ имеет единственное решение*

$$u(x) = \int_X g_H(x,y) v(y)\, dm(y),$$

где $g_H(x,y)$ — непрерывная функция, заданная формулой

$$g_H(x,y) = h(x)\, g_{\mathcal{L}}(x,y)\, h(y).$$

Мы называем $g_H(x,y)$ функцией Грина оператора H или фундаментальным решением уравнения $Hu = v$.

Доказательство. Мы знаем, что $\mathcal{L}\colon \mathcal{D} \to L^2(X, h\,m) \cap C_\infty(X)$. Покажем, что $\mathcal{L}\colon \mathcal{D} \to$ $\to L^q(X,m)$ для всех q, $1 \le q \le \infty$. Это свойство достаточно проверить для индикатора $\psi = \mathbf{1}_B$ открытого шара B. В этом случае существует константа $C > 0$ такая, что при $x \to \infty$ выполнено следующее асимптотическое соотношение:

$$\mathcal{L}\psi(x) = -\int_B J(x,y) h(y)\, dm(y) = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \frac{1}{\|x\|_p^{1+\alpha}} \int_B h\, dm \asymp \frac{C}{\|x\|_p^{1+\alpha}}.$$

Ясно, что это соотношение и ограниченность $\mathcal{L}\psi(x)$ доказывают утверждение. В частности, $\mathcal{L}\psi \in L^2(X,m)$ и, следовательно, $(1/h)\mathcal{L}\psi \in L^2(X, h^2\, m)$ для любого $\psi \in \mathcal{D}$. С учетом этого для $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ имеем

$$|Q_{\mathcal{H}}(\varphi,\psi)| = |Q_{\mathcal{L}}(\varphi,\psi)| = \left|(\mathcal{L}\psi,\varphi)_{L^2(hm)}\right| = \left|\left(\frac{1}{h}\mathcal{L}\psi, \varphi\right)_{L^2(h^2m)}\right| \le \left\|\frac{1}{h}\mathcal{L}\psi\right\|_{L^2(h^2m)} \|\varphi\|_{L^2(h^2m)}.$$

Приведенная оценка означает, что $\varphi \to Q_{\mathcal{H}}(\varphi, \psi)$ — ограниченный линейный функционал в $L^2(X, h^2\, m)$ для любого $\psi \in \mathcal{D}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom}(\mathcal{H})$ и

$$\mathcal{H}\psi = \frac{1}{h}\mathcal{L}\psi \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}. \tag{4.24}$$

Рассмотрим уравнение $\mathcal{H}u = v$ для $v \in \mathcal{D}$. Поскольку $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom}(\mathcal{H})$, имеем

$$(\mathcal{H}u, \psi)_{L^2(X,h^2\, m)} = (u, \mathcal{H}\psi)_{L^2(X,h^2\, m)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

Применяя (4.24), получаем

$$(\mathcal{H}u, \psi)_{L^2(X,h^2\, m)} = \left(u, \frac{1}{h}\mathcal{L}\psi\right)_{L^2(X,h^2\, m)} = (u, \mathcal{L}\psi)_{L^2(X,h\, m)}.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{H}u, \psi)_{L^2(X,h^2\, m)} = (v, \psi)_{L^2(X,h^2\, m)} = (hv, \psi)_{L^2(X,h\, m)}.$$

Проделанные выше вычисления показывают, что для пары сопряженных показателей (p, q) справедлива оценка

$$\bigl|(u, \mathcal{L}\psi)_{L^2(X,h\, m)}\bigr| = \bigl|(hv, \psi)_{L^2(X,h\, m)}\bigr| \le \|hv\|_{L^p(X,h\, m)}\|\psi\|_{L^q(X,h\, m)}.$$

Отсюда следует, что если мы выберем $1 < p < (1+\alpha)/(1-\alpha)$, то $\psi \to (u, \mathcal{L}\psi)_{L^2(X,h\, m)}$ будет ограниченным линейным функционалом в $L^q(X, h\, m)$ при условии, что $q = p/(p-1)$, т.е. $(1 + 1/\alpha)/2 < q < \infty$. Поскольку $(e^{-t\mathcal{L}})_{t>0}$ — непрерывная симметричная марковская полугруппа, применение интерполяционной теоремы Рисса–Торина показывает, что ее можно продолжить на все $L^q(X, h\, m)$ как непрерывную сжимающую полугруппу. Пусть $\mathcal{L}_q$ — ее инфинитезимальный генератор с обратным знаком. Тогда $\mathcal{L}_q$ является продолжением $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_q^* = \mathcal{L}_p$. Все сказанное выше означает, что u должна принадлежать множеству $\operatorname{dom}(\mathcal{L}_p)$ и $\mathcal{L}_p u = hv$. Уравнение $\mathcal{L}_p u = hv$ имеет единственное решение

$$u(x) = \int\limits_X g_{\mathcal{L}}(x, y)(hv)(y)h(y)\, dm(y) = \int\limits_X g_{\mathcal{L}}(x, y)v(y)h^2(y)\, dm(y).$$

Отсюда следует, что действующий в $L^2(X, h^2\, m)$ оператор $\mathcal{H}$ обладает функцией Грина $g_{\mathcal{H}}(x, y)$ и что $g_{\mathcal{H}}(x, y)$ совпадает с функцией Грина $g_{\mathcal{L}}(x, y)$ оператора $\mathcal{L}$, действующего в $L^2(X, h\, m)$:

$$g_{\mathcal{H}}(x, y) = g_{\mathcal{L}}(x, y). \tag{4.25}$$

Наконец, рассмотрим уравнение $Hu = v$. Так как $H = U \circ \mathcal{H} \circ U^{-1}$, то $\mathcal{H}(U^{-1}u) = U^{-1}v$. Отсюда следует, что

$$(U^{-1}u)(x) = \int\limits_X g_{\mathcal{H}}(x, y)(U^{-1}v)(y)(h(y))^2\, dm(y),$$

или, что эквивалентно,

$$u(x) = \int\limits_X h(x)\, g_{\mathcal{H}}(x, y)\, h(y)\, v(y)\, dm(y).$$

Это означает, что уравнение $Hu = v$ имеет фундаментальное решение

$$g_H(x, y) := h(x)\, g_{\mathcal{H}}(x, y)\, h(y) = h(x)\, g_{\mathcal{L}}(x, y)\, h(y)$$

в силу (4.25), и завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 4.8. *Функция Грина $g_H(x,y)$ — непрерывная функция, принимающая конечные значения вне диагонального множества. При этом имеет место соотношение*

$$g_H(x,y) \asymp \frac{\|x\|_p^{\beta}\|x-y\|_p^{\alpha-1}\|y\|_p^{\beta}}{(\|x\|_p \vee \|y\|_p)^{2\beta}}, \tag{4.26}$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{g_H(x,y)}{g_L(x,y)} \asymp \left(\frac{\|x\|_p}{\|y\|_p} \wedge \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p}\right)^{\beta}.$$

Доказательство. Это следует непосредственно из теорем 4.6 и 4.7. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aizenman M., Molchanov S.* Localization at large disorder and at extreme energies: An elementary derivation // Commun. Math. Phys. 1993. V. 157, N 2. P. 245–278.
2. *Albeverio S., Karwowski W.* A random walk on p-adics—the generator and its spectrum // Stochastic Processes Appl. 1994. V. 53, N 1. P. 1–22.
3. *Bendikov A.* Heat kernels for isotropic-like Markov generators on ultrametric spaces: A survey // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2018. V. 10, N 1. P. 1–11.
4. *Bendikov A., Cygan W., Woess W.* Oscillating heat kernels on ultrametric spaces // J. Spectr. Theory. 2019. V. 9, N 1. P. 195–226.
5. *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* On the spectrum of the hierarchical Schrödinger type operators: E-print, 2020. arXiv: 2006.02263v1 [math.SP].
6. *Бендиков А.Д., Григорьян А.А., Молчанов С.А., Самородницкий Г.П.* Об одном классе случайных возмущений иерархического лапласиана // Изв. РАН. Сер. мат. 2015. Т. 79, № 5. С. 3–38.
7. *Bendikov A., Grigor'yan A., Pittet Ch.* On a class of Markov semigroups on discrete ultra-metric spaces // Potential Anal. 2012. V. 37, N 2. P. 125–169.
8. *Бендиков А.Д., Григорьян А.А., Питтэ К., Вёсс В.* Изотропные марковские полугруппы на ультраметрических пространствах // УМН. 2014. Т. 69, № 4. С. 3–102.
9. *Bendikov A., Krupski P.* On the spectrum of the hierarchical Laplacian // Potential Anal. 2014. V. 41, N 4. P. 1247–1266.
10. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.
11. *Berg Ch., Forst G.* Potential theory on locally compact abelian groups. Berlin: Springer, 1975. (Ergeb. Math. Grenzgeb.; Bd. 87).
12. *Beurling A., Deny J.* Dirichlet spaces // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. P. 208–215.
13. *Bovier A.* The density of states in the Anderson model at weak disorder: A renormalization group analysis of the hierarchical model // J. Stat. Phys. 1990. V. 59. P. 745–779.
14. *Davies E.B.* Spectral theory and differential operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 42).
15. *Del Muto M., Figà-Talamanca A.* Diffusion on locally compact ultrametric spaces // Expo. math. 2004. V. 22, N 3. P. 197–211.
16. *Derfel G., Grabner P.J., Vogl F.* Laplace operators on fractals and related functional equations // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. V. 45, N 46. Pap. 463001.
17. *Dyson F.J.* Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet // Commun. Math. Phys. 1969. V. 12. P. 91–107.
18. *Dyson F.J.* An Ising ferromagnet with discontinuous long-range order // Commun. Math. Phys. 1971. V. 21. P. 269–283.
19. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. 2nd ed. New York: J. Wiley & Sons, 1971. V. 2. Рус. пер.: *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: URSS, 2010. Т. 2.
20. *Fukushima M.* Dirichlet forms and Markov processes. Amsterdam: North-Holland, 1980. (North-Holland Math. Libr.; V. 23).
21. *Grabner P.J., Woess W.* Functional iterations and periodic oscillations for simple random walk on the Sierpiński graph // Stochastic Processes Appl. 1997. V. 69, N 1. P. 127–138.
22. *Grigor'yan A.* Heat kernels on weighted manifolds and applications // The ubiquitous heat kernel: AMS spec. sess., Boulder, 2003. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. P. 93–191. (Contemp. Math.; V. 398).

23. *Hewitt E., Ross K.A.* Abstract harmonic analysis. V. 1: Structure of topological groups. Integration theory. Group representations. Berlin: Springer, 1963. (Grundl. Math. Wiss.; Bd. 115).
24. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Berlin: Springer, 1966. (Grundl. Math. Wiss.; Bd. 132).
25. *Koblitz N.* p-Adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions. New York: Springer, 1977. (Grad. Texts Math.; V. 58). Рус. пер.: *Коблиц Н.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.
26. *Kochubei A.N.* Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields. New York: M. Dekker, 2001. (Pure Appl. Math.; V. 244).
27. *Козырев С.В.* Всплески и спектральный анализ ультраметрических псевдодифференциальных операторов // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 1. С. 103–126.
28. *Kritchevski E.* Hierarchical Anderson Model // Probability and mathematical physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 309–322. (CRM Proc. Lect. Notes; V. 42).
29. *Kritchevski E.* Spectral localization in the hierarchical Anderson model // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. V. 135, N 5. P. 1431–1440.
30. *Kritchevski E.* Poisson statistics of eigenvalues in the hierarchical Anderson model // Ann. Henri Poincaré. 2008. V. 9, N 4. P. 685–709.
31. *Molchanov S.* Lectures on random media // Lectures on probability theory: Summer sch., Saint-Flour, 1992. Berlin: Springer, 1994. P. 242–411. (Lect. Notes Math.; V. 1581).
32. *Molchanov S.* Hierarchical random matrices and operators. Application to Anderson model // Multidimensional statistical analysis and theory of random matrices: Proc. 6th Eugene Lukacs Symp., Bowling Green, USA, 1996. Utrecht: VSP, 1996. P. 179–194.
33. *Molchanov S., Vainberg B.* On general Cwikel–Lieb–Rozenblum and Lieb–Thirring inequalities // Around the research of Vladimir Maz'ya. III: Analysis and applications / Ed. by A. Laptev. Dordrecht: Springer, 2010. P. 201–246. (Int. Math. Ser.; V. 13).
34. *Molchanov S., Vainberg B.* On the negative spectrum of the hierarchical Schrödinger operator // J. Funct. Anal. 2012. V. 263, N 9. P. 2676–2688.
35. *Rodríguez-Vega J.J., Zúñiga-Galindo W.A.* Taibleson operators, p-adic parabolic equations and ultrametric diffusion // Pac. J. Math. 2008. V. 237, N 2. P. 327–347.
36. *Taibleson M.H.* Fourier analysis on local fields. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1975. (Math. Notes; V. 15).
37. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции над полем p-адических чисел // УМН. 1988. Т. 43, № 5. С. 17–53.
38. *Vladimirov V.S., Volovich I.V.* p-Adic Schrödinger-type equation // Lett. Math. Phys. 1989. V. 18, N 1. P. 43–53.
39. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* p-Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
40. *Zúñiga-Galindo W.A.* Parabolic equations and Markov processes over p-adic fields // Potential Anal. 2008. V. 28, N 2. P. 185–200.

Перевод с английского К. Шубика