Н. А. Евсеев, А. В. Меновщиков, Оператор композиции на пространствах Лебега со смешанной нормой,
Матем. заметки, 2019, том 105, выпуск 6, 816–823

Математические заметки

Том 105 выпуск 6 июнь 2019

УДК 517

Оператор композиции на пространствах Лебега со смешанной нормой

Н. А. Евсеев, А. В. Меновщиков

Известно, что ограниченность оператора композиции на пространствах Лебега эквивалентна суммируемости объемной производной измеримого отображения, индуцирующего данный оператор. В настоящей работе доказывается аналогичный результат для пространств Лебега со смешанной нормой в классе отображений, сохраняющих приоритет переменных.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: оператор композиции, пространства Лебега со смешанной нормой, измеримые отображения.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11976

1. Введение

Целью настоящей работы является описание тех измеримых отображений $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$, которые по правилу композиции индуцируют следующий ограниченный оператор C_φ на пространствах Лебега со смешанной нормой:

$$C_\varphi\colon L_{p_1,p_2}(\Omega') \to L_{q_1,q_2}(\Omega).$$

Обзор теории операторов композиции в целом можно найти в книге [1]. Для случая обычных пространств Лебега эта задача решена в полной мере в работе Водопьянова и Ухлова [2] (см. также [3; теорема 4]): *измеримое отображение φ индуцирует ограниченный оператор $C_\varphi\colon L_p(\Omega') \to L_q(\Omega)$ тогда и только тогда, когда объемная производная*

$$J_{\varphi^{-1}}^{1/q}(y) \in L_\varkappa(\Omega'), \qquad \varkappa = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q}, & \text{если } q > p, \\ \infty, & \text{если } q = p. \end{cases} \tag{1.1}$$

При этом норма оператора $\|C_\varphi\|$ равна $\|J_{\varphi^{-1}}^{1/q}\|_{L_\varkappa(\Omega')}$. В работах [2], [3] развит достаточно общий подход, использующий дифференцируемость квазиаддитивных

Работа выполнена в Российском университете дружбы народов при финансовой поддержке РНФ, проект № 16-41-02004.

функций множеств, который в дальнейшем позволил описать операторы композиции и для ряда других L_p-пространств (см. [4]–[7]). Оператор композиции на пространствах Лебега со смешанной нормой изучался в работах Стевича для случая голоморфных функций (см. например [8], [9]). Случай, когда оператор композиции действует из одного пространства Лебега со смешанной нормой в другое, ранее не рассматривался.

В настоящей работе поставленная задача решена для отображений, сохраняющих приоритет переменных, что в силу отсутствия свойства инвариантности относительно перестановок является естественным ограничением. Кроме того, смешанные пространства находят свое применение в исследовании дифференциальных уравнений, в которых одна из переменных может быть выделена (например время). Этим мотивировано изучение замен переменных вида $\varphi(s,x) = (\psi(s), u(s,x))$. Мы развиваем методы из [2], [3] для более общего случая оператора композиции с операторозначным весом. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Измеримое отображение $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ вида $\varphi(s,x) = (\psi(s), u(s,x))$ индуцирует ограниченный оператор композиции $C_\varphi\colon L_{p_1,p_2}(\Omega') \to L_{q_1,q_2}(\Omega)$ по правилу $C_\varphi f(s,x) = f(\psi(s), u(s,x))$ тогда и только тогда, когда*

$$J_{\psi^{-1}}^{1/q_1}(t) J_{u^{-1}}^{1/q_2}(t,y) \in L_{p_1q_1/(p_1-q_1),p_2q_2/(p_2-q_2)}(\Omega'). \tag{1.2}$$

Очевидным образом результат распространяется и на случай большего числа переменных (см., например, [10]).

2. Предварительные сведения

2.1. Пространство Лебега со смешанной нормой. Пространства Лебега со смешанной нормой впервые введены в работе [11]. Такие пространства находят свое применение в уравнениях в частных производных, например, при выводе априорных оценок [12].

Пусть (T,Σ,μ), (Y,Ξ,μ_Y) – пространства с σ-конечными мерами. Определим на $U \subset T \times Y$ пространство Лебега со смешанной нормой $L_{p_1,p_2}(U)$ как множество измеримых функций, для которых конечна величина

$$\|f\|_{L_{p_1,p_2}(U)} = \left(\int_T \|f(t,y)\|^{p_1}_{L_{p_2}(U_t)}\, d\mu \right)^{1/p_1},$$

где

$$U_t = \{y \in Y \mid (t,y) \in U\}.$$

Обычно пространства Лебега со смешанной нормой рассматривают в случае, когда множество U совпадает с декартовым произведением. Тогда норма может быть записана в виде

$$\|f\|_{L_{p_1,p_2}(U)} = \big\| \|f(t,y)\|_{L_{p_2}(Y)} \big\|_{L_{p_1}(T)}.$$

В данной работе мы используем подход из [13] и рассматриваем пространства на произвольных измеримых множествах. Это приводит к тому, что $L_{p_1,p_2}(U)$ нельзя представить как L_{p_1}-пространство функций со значениями в банаховом пространстве L_{p_2}. Однако это пространство является частным случаем L_p-прямого интеграла банаховых пространств [14].

2.2. Формула замены переменной. Нам потребуется следующая формула [15; § 39, теорема 4]:

$$\int_S f(\psi(s))\,d\nu = \int_T f(t)J(t)\,d\mu, \tag{2.1}$$

которая верна, если мера $\nu\circ\psi^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно μ. Измеримая функция $J(t)$ является производной Радона–Никодима $d\nu\circ\psi^{-1}/d\mu$.

Для описания связи между нормой оператора и искажением меры под действием отображений мы дополнительно вовлекаем метрические структуры (см. [3]).

Определение 1. *Пространство однородного типа* (X,d,μ) – это квазиметрическое пространство с мерой, для которого выполняются следующие два свойства (*поглощение* и *удвоение*):

1) существует постоянная $c_1 \geqslant 1$ такая, что для всех $x,y\in X$ и $\delta>0$, если шары $B_\delta(x)$, $B_\delta(y)$ пересекаются, то

$$B_\delta(y)\subset B_{c_1\delta}(x);$$

2) для любого шара $B_\delta(x)\subset X$ с положительным радиусом выполнено $0<\mu(B_\delta(x))<\infty$ и существует такая постоянная c_2, что

$$\mu(B_{c_1\delta}(x))\leqslant c_2\mu(B_\delta(x)).$$

В настоящей работе пространства T, S являются пространствами однородного типа. Тогда в формуле (2.1) функция $J(t)$ совпадает с объемной производной обратного отображения

$$J_{\psi^{-1}}(t) = \lim_{r\to 0}\frac{\nu(\psi^{-1}(B(t,r)))}{\mu(B(t,r))}.$$

3. Ограниченность смешанного оператора

Пусть (S,ρ,ν), (X,ρ_X,ν_X), (T,d,μ), (Y,d_Y,μ_Y) – пространства однородного типа и $\Omega\subset S\times X$, $\Omega'\subset T\times Y$.

Рассмотрим измеримое инъективное отображение $\psi\colon S\to T$ и операторнозначную функцию $P(t)\colon L_{p_2}(\Omega'_t)\to L_{q_2}(\Omega_{\psi^{-1}(t)})$ для всех t из образа $\psi(S)$. Для определенности полагаем, что $P(t)=0$ для всех $t\in T\setminus\psi(S)$. Функции ψ и P индуцируют *смешанный оператор*

$$M_{P\psi}\colon L_{p_1,p_2}(\Omega')\to L_{q_1,q_2}(\Omega),$$

действующий по правилу

$$M_{P\psi}[f](s,x) = P(\psi(s))[f(\psi(s),y)]$$

при условии, что $M_{P\psi}[f]\in L_{q_1,q_2}(\Omega)$ для всех $f\in L_{p_1,p_2}(\Omega')$.

Отметим, что оператор $M_{P\psi}$ изменяет как аргумент функции, так и ее значение, тем самым сочетая в себе свойства оператора композиции и оператора суперпозиции. Также будет уместен термин *оператор композиции с операторнозначным весом*.

Исследуем условия, обеспечивающие ограниченность оператора $M_{P\psi}$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 [16]. *Пусть оператор* $M_{P\psi}$ *ограничен и* $p_1 > q_1$. *Тогда*

$$\Phi(A) = \sup_{f \in L_{p_1,p_2}(A \times Y \cap \Omega')} \left(\frac{\|M_{P\psi} f\|_{L_{q_1,q_2}(\psi^{-1}(A) \times X \cap \Omega)}}{\|f\|_{L_{p_1,p_2}(A \times Y \cap \Omega')}} \right)^{\varkappa}, \qquad \varkappa = \frac{p_1 q_1}{p_1 - q_1},$$

является счетно-аддитивной функцией, определенной на борелевских подмножествах $A \subset T$, $\mu(A) > 0$.

Заметим, что в силу аддитивности на борелевских множествах указанная функция будет также обладать свойством монотонности. Функции множеств данного вида, позволяющие охарактеризовать поведение нормы оператора, введены в работах [2], [3]. В статье [3] получены следующие свойства счетно-аддитивных функций множеств.

Предложение 1 [3; следствие 5]. *Пусть* Φ – *монотонная счетно-аддитивная функция множеств, определенная на системе открытых множеств в пространстве однородного типа и принимающая конечные значения на открытых шарах. Тогда*

1) *почти всюду существует конечная производная*

$$\lim_{\delta \to 0,\, x \in B_\delta} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)} = \Phi'(x);$$

2) $\Phi'(x)$ – *измеримая функция*;

3) *для любого открытого множества* U *из данной системы открытых множеств справедливо неравенство*

$$\int_U \Phi'(x)\, d\mu \leqslant \Phi(U). \tag{3.1}$$

В следующей теореме сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности смешанного оператора.

Теорема 2. *Пусть мера* $\nu \circ \psi^{-1}$ *абсолютно непрерывна относительно меры* μ, *и пусть отображение* $\psi\colon S \to T$ *инъективно. Тогда смешанный оператор*

$$M_\psi \colon L_{p_1,p_2}(\Omega') \to L_{q_1,q_2}(\Omega), \qquad p_1 \geqslant q_1,$$

ограничен тогда и только тогда, когда

$$\|P(t)\| \cdot J_{\psi^{-1}}^{1/q_1}(t) \in L_\varkappa(T) \qquad (\varkappa = \infty \quad \textit{при} \quad p_1 = q_1),$$

где $J_{\psi^{-1}}(t)$ – *объемная производная обратного отображения* ψ^{-1}. *Норма оператора* C_φ *эквивалентна величине*

$$\big\| \|P(\,\cdot\,)\| \cdot J_{\psi^{-1}}^{1/q_1}(\,\cdot\,) \big\|_{L_\varkappa(T)}.$$

Доказательство. Случай $p_1 = q_1$ рассмотрен в [10].

Пусть $p_1 > q_1$. Тогда в силу леммы 1, для любого шара $B(\xi,r) \subset T$ и функции $f \in L_{p_1,p_2}(B(\xi,r) \times Y \cap \Omega')$ выполнено следующее неравенство:

$$\|M_{P\psi} f\|_{L_{q_1,q_2}(\psi^{-1}(B(\xi,r)) \times X \cap \Omega)} \leqslant \Phi^{1/\varkappa}(B(\xi,r)) \|f\|_{L_{p_1,p_2}(B(\xi,r) \times Y \cap \Omega')}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим такую функцию $g \in L_{p_1,p_2}(B(\xi, r) \times Y \cap \Omega')$, что

$$\|g(t, \cdot)\|_{L_{p_2}(\Omega'_t)} = 1.$$

Тогда

$$\|g\|_{L_{p_1,p_2}(B(\xi,r)\times Y\cap\Omega')} = (\mu(B(\xi, r)))^{1/p_1}.$$

Из неравенства (3.2) выводим

$$\left(\int_{\psi^{-1}(B(\xi,r))} \|P(\psi(s))[g(\psi(s)]\|^{q_1}_{L_{q_2}(\Omega_s)}\,d\nu\right)^{1/q_1} \leqslant \Phi^{1/\varkappa}(B(\xi, r))(\mu(B(\xi, r)))^{1/p_1}.$$

Применяя формулу замены переменной (2.1) $\psi(s) = t$ и деля обе части неравенства на $(\mu(B(\xi, r)))^{1/q_1}$, получаем

$$\left(\frac{1}{\mu(B(\xi, r))}\int_{B(\xi,r)} \|P(t)[g(t)]\|^{q_1}_{L_{q_2}(\Omega_{\psi^{-1}(t)})} J_{\psi^{-1}}(t)\,d\mu\right)^{1/q_1} \leqslant \left(\frac{\Phi(B(\xi, r))}{\mu(B(\xi, r))}\right)^{1/\varkappa}.$$

По теореме Лебега и свойству 1) из предложения 1 имеем

$$J^{\varkappa/q_1}_{\psi^{-1}}(\xi)\|P(\xi)(g(\xi))\|^{\varkappa}_{L_{q_2}(\Omega_{\psi^{-1}(\xi)})} \leqslant \Phi'(\xi) \qquad \text{для п.в.} \quad \xi \in T.$$

Переходя к супремуму по всем $g(\xi) \in L_{p_2}(\Omega'_\xi)$ (напомним, $\|g(\xi)\|_{L_{p_2}(\Omega'_\xi)} = 1$), заключаем, что нормы операторов $J^{1/q_1}_{\psi^{-1}}(\xi)P(\xi)$ ограничены производной функции множеств:

$$J^{\varkappa/q_1}_{\psi^{-1}}(\xi)\|P(\xi)\|^{\varkappa} \leqslant \Phi'(\xi) \qquad \text{для п.в.} \quad \xi \in T.$$

Из свойства 3) предложения 1 следует, что $J^{1/q_1}_{\psi^{-1}}(t)\|P(t)\| \in L_\varkappa(T)$.

Пусть теперь $J^{1/q_1}_{\psi^{-1}}(t)\|P(t)\| \in L_\varkappa(T)$. Поскольку оператор $P(t)$ ограничен для почти всех t, имеем

$$\begin{aligned}\|M_{P\psi}f\|_{L_{q_1,q_2}(\Omega)} &= \left(\int_S \|P(\psi(s))[f(\psi(s))]\|^{q_1}_{L_{q_2}(\Omega_s)}\,d\nu\right)^{1/q_1}\\ &\leqslant \left(\int_S (\|P(\psi(s))\|\,\|f(\psi(s))\|_{L_{p_2}(\Omega'_{\psi(s)})})^{q_1}\,d\nu\right)^{1/q_1}.\end{aligned}$$

Используя формулу замены переменной и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}&\left(\int_S (\|P(\psi(s))\|\,\|f(\psi(s))\|_{L_{p_2}(\Omega'_{\psi(s)})})^{q_1}\,d\nu\right)^{1/q_1}\\ &\quad= \left(\int_T (\|P(t)\|\,\|f(t)\|_{L_{p_2}(\Omega'_t)})^{q_1} J_{\psi^{-1}}(t)\,d\mu\right)^{1/q_1}\\ &\quad\leqslant \left(\int_T \|P(t)\|^{p_1q_1/(p_1-q_1)} J^{p_1/(p_1-q_1)}_{\psi^{-1}}(t)\,d\mu\right)^{(p_1-q_1)/(p_1q_1)} \left(\int_T \|f(t)\|^{p_1}_{L_{p_2}(\Omega'_t)}\,d\mu\right)^{1/p_1}\\ &\quad= \|J^{1/q_1}_{\psi^{-1}}(t)\|P(t)\|\,\|_{L_\varkappa(T)}\|f\|_{L_{p_1,p_2}(\Omega')},\end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

В п. 2.1 отмечалось, что пространство Лебега со смешанной нормой $L_{p_1,p_2}(U)$, $U \subset T \times Y$ может рассматриваться как пространство суммируемых в степени p_1 функций, принимающих значения в наборе $\{L_{p_2}(U_t)\}_{t\in T}$. Если вместо "внутренних" $L_{p_2}(U_t)$ рассмотреть произвольный набор банаховых пространств $\{W_t\}_{t\in T}$, то при некоторых дополнительных ограничениях мы придем к определению L_p-прямого интеграла $\bigl(\int_T^{\oplus} W_t\,d\mu\bigr)_{L_p}$. Это пространство снабженно нормой

$$\|f\|_{L_p(T,\mathscr{W})} = \biggl(\int_T \|f(t)\|_{W_t}^p\,d\mu\biggr)^{1/p}$$

(подробные сведения читатель сможет найти в [14]).

При доказательстве приведенной выше теоремы 2 фактически использовалось представление пространств Лебега со смешанной нормой в виде прямого интеграла. Приведенная схема рассуждений допускает обобщение на случай L_p-прямых интегралов, а именно, верна следующая теорема.

Теорема 3 [16]. *Пусть мера $\nu \circ \psi^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно меры μ и отображение $\psi\colon S \to T$ инъективно. Тогда оператор*

$$M_\psi\colon \biggl(\int_T^{\oplus} W_t\,d\mu\biggr)_{L_p} \to \biggl(\int_S^{\oplus} V_s\,d\nu\biggr)_{L_q}, \qquad p \geqslant q,$$

ограничен тогда и только тогда, когда

$$\|P(t)\| \cdot J_{\psi^{-1}}^{1/q}(t) \in L_{\varkappa}(T), \tag{3.3}$$

где $\{W_t\}_{t\in T}$ и $\{V_s\}_{s\in S}$ – измеримые семейства банаховых пространств, а $J_{\psi^{-1}}(t)$ – объемная производная обратного отображения ψ^{-1}.

3.1. Оператор композиции на пространствах Лебега со смешанной нормой. Пусть $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$, где Ω' – подмножество в декартовом произведении двух пространств однородного типа T, Y. Рассмотрим вопрос о том, когда отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$C_\varphi\colon L_{p_1,p_2}(\Omega') \to L_{q_1,q_2}(\Omega) \qquad \text{по правилу} \qquad C_\varphi f = f\circ\varphi.$$

Зачастую корректность определения оператора композиции на пространствах типа Лебега обеспечивается наличием у отображения $\mathscr{N}^{-1}$-свойства Лузина: *прообраз множества нулевой меры имеет меру нуль.* Поскольку мы рассматриваем отображения вида $\varphi(s,x) = (\psi(s), u(s,x))$, то оператор композиции C_φ определен корректно, если ψ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина и $u(s,\,\cdot\,)$ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина для п.в. $s \in S$.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы является следствием теоремы 2. В качестве операторов $P(t)\colon L_{p_2}(\Omega'_t) \to L_{q_2}(\Omega_{\psi^{-1}(t)})$ рассмотрим операторы композиции на пространствах Лебега. Для фиксированного $s \in S$ оператор $P_{\psi(s)}$ порождается функцией $u(s,\,\cdot\,)$, т.е.

$$(P(\psi(s))[f](s,x) = f(\psi(s), u(t,x)).$$

Согласно [3; теорема 4] нормы этих операторов эквивалентны

$$\|J_{u^{-1}}^{1/q_2}(t,\,\cdot\,)\|_{L_{p_2q_1/(p_2-q_2)}(\Omega'_t)}.$$

Уточним, что $J_{u^{-1}}(t,\cdot)$ – это объемная производная отображения, обратного к $u(s,\cdot)$ при фиксированном $s=\psi^{-1}(t)$; см. рис. 1.

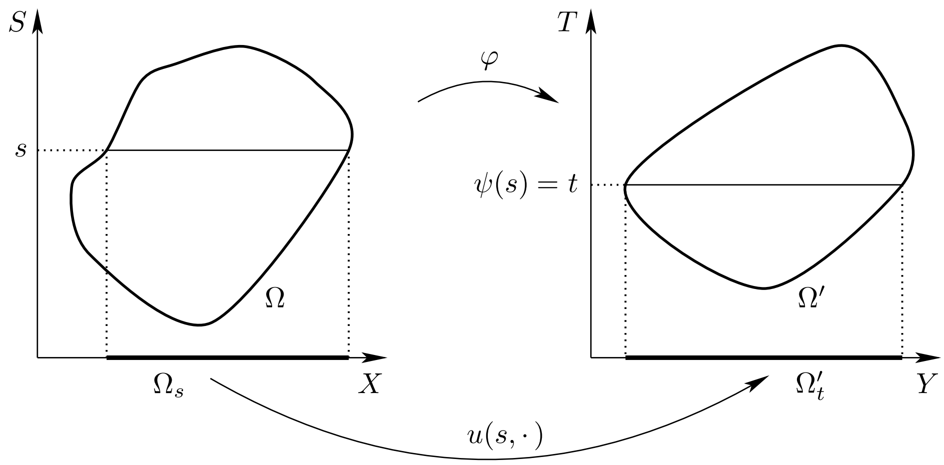

Рис. 1

Замечание. Открытым остается вопрос о том, при каких условиях измеримое отображение общего вида $\varphi\colon\Omega\to\Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции на пространствах Лебега со смешанной нормой. По-видимому, наши методы здесь не применимы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. K. Singh, J. S. Manhas, *Composition Operators on Function Spaces*, North-Holland Math. Stud., **179**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1993.

[2] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества”, *Владикавк. матем. журн.*, **4**:1 (2002), 11–33.

[3] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I”, *Матем. тр.*, **6**:2 (2003), 14–65.

[4] С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев, “Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений”, *Докл. АН*, **464**:2 (2015), 131–135.

[5] Н. А. Евсеев, “Операторы композиции в весовых пространствах Соболева на группе Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **56**:6 (2015), 1304–1325.

[6] Н. А. Евсеев, “Ограниченный оператор композиции на пространствах Лоренца”, *Матем. заметки*, **102**:6 (2017), 836–843.

[7] А. В. Меновщиков, “Операторы композиции в пространствах Соболева–Орлича”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:5 (2016), 1088–1101.

[8] S. Stević, “Weighted composition operators between mixed norm spaces and $\mathscr{H}_a^\infty$ spaces in the unit ball”, *J. Inequal. Appl.*, 2007, Art. ID 28629.

[9] С. Стевич, “Произведения операторов интегрального типа и операторов композиции из пространства со смешанной нормой в пространства типа Блоха”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:4 (2009), 915–927.

[10] N. Evseev, A. Menovschikov, “Bounded operators on mixed norm Lebesgue spaces”, *Complex Anal. Oper. Theory*, 2018.

[11] A. Benedek, R. Panzone, “The spaces L^p, with mixed norm”, *Duke. Math. J.*, **28** (1961), 301–324.

[12] S. Berhanu, P. Cordaro, V. Hounie, *An Introduction to Involutive Structures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[13] О. В. Бесов, "Оценки производных в смешанной L_p-норме на области и распространение функций", *Матем. заметки*, **7**:2 (1970), 147–154.

[14] R. Haydon, M. Levy, Y. Raynaud, *Randomly Normed Spaces*, Hermann, Paris, 1991.

[15] П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953.

[16] N. Evseev, A. Menovschikov, *Mixed Operators on L^p-Direct Integrals*, 2019, arXiv: 1902.02983.

Н. А. Евсеев
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
г. Новосибирск;
Новосибирский государственный университет;
Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: evseev@math.nsc.ru

Поступило
21.02.2018
После доработки
17.06.2018
Принята к публикации
27.06.2018

А. В. Меновщиков
Новосибирский государственный университет;
Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: menovschikov@math.nsc.ru