



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бравый, О регуляризации сингулярных функционально-дифференциальных уравнений, *Дифференц. уравнения*, 1994, том 30, номер 1, 26–34

<https://www.mathnet.ru/de8266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

27 апреля 2025 г., 10:54:20



УДК 517.929

Е. И. БРАВЫЙ

### О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В монографии [1] развита «теория линейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения», где показано, что для многих сингулярных уравнений можно так выбрать пространство (понятие решения), что в этом пространстве уравнение становится регулярным [2, 3]. В настоящей работе рассматривается сингулярный линейный оператор  $n$ -го порядка

$$(\mathcal{L}x)(t) = \prod_{i=1}^p (t-a_i)^{\mu_i} x^{(n)}(t) + (Tx)(t), \quad t \in [a, b],$$

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_p = b, \quad n \geq 2, \quad \mu_i - \text{целые}, \quad 0 \leq \mu_1, \mu_p \leq n-1,$$

$$1 \leq \mu_i \leq n-1, \quad i=2, \dots, p-1.$$

Выбирается такое банахово пространство  $D$  и формулируются такие ограничения на оператор  $T$ , что  $\mathcal{L}$  как оператор, действующий из  $D$  в пространство суммируемых на отрезке  $[a, b]$  функций, будет непрерывным нётеровым оператором. Таким образом, уравнение  $\mathcal{L}x=f$  и краевые задачи для этого уравнения являются объектом изучения монографии [1, гл. 6].

В работе [3] С. М. Лабовский изучал уравнение

$$(t-a)^q (t-b)^{n-q} x^{(n)}(t) + \int_a^b x(s) d_s r(t, s) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad 1 \leq q \leq n-1.$$

В нашем распространении подхода работы [3] на уравнение  $\mathcal{L}x=f$  число точек, в которых множитель перед  $n$ -й производной может иметь нули, а также сумма кратностей этих нулей произвольны.

Используются следующие обозначения:  $R^k$  —  $k$ -мерное вещественное пространство с нормой  $\|\alpha\|_{R^k} = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|$ ;  $L[a, b]$  — банахово пространство суммируемых на отрезке  $[a, b]$  функций  $x: [a, b] \rightarrow R^1$  с нормой  $\|x\|_{L[a, b]} = \int_a^b |x(s)| ds$ ;  $W^m[a, b]$  — банахово пространство  $m$  раз дифференцируемых функций  $x: [a, b] \rightarrow R^1$  с абсолютно непрерывной производной  $(m-1)$ -го порядка и нормой  $\|x\|_{W^m[a, b]} = \|x^{(m)}\|_{L[a, b]} + \sum_{i=0}^{m-1} |x^{(i)}(a)|$ ;

$\chi_e(\cdot)$  — характеристическая функция множества  $e$ ;  $\pi(t) = \prod_{i=1}^p (t-a_i)^{\mu_i}$ .

1. Введем линейное пространство  $D$  таких функций  $x: [a, b] \rightarrow R^1$ , что

1)  $x^{(n-1)}$  локально абсолютно непрерывна в  $[a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ ;

2)  $\int_a^b |\pi(s) x^{(n)}(s)| ds < \infty$ ;

3) функции  $x^{(j)}$  непрерывны при  $j=0, 1, \dots, n-1-\mu_i$  в точке  $a_i$ ,  $i=1, \dots, p$ .

При  $p=2$ ,  $\mu_1 + \mu_2 = n$  пространство  $D$  совпадает с пространством, используемым в работе [3]. Аналогично лемме 1 этой работы доказывается

**Лемма 1.** Если  $x^{(n-1)}$  локально абсолютно непрерывна в  $[a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$  и  $\int_a^b |\pi(s)x^{(n)}(s)| ds < \infty$ , то существуют конечные односторонние пределы  $\lim_{t \rightarrow a_i+0} x^{(j)}(t)$ ,  $i=1, \dots, p-1$ ,  $\lim_{t \rightarrow a_i-0} x^{(j)}(t)$ ,  $i=2, \dots, p$ , при  $j=0, 1, \dots, n-1 - \mu_i$ .

Таким образом, существование конечных пределов в условии 3) определения пространства  $D$  гарантируется леммой 1.

Рассмотрим «модельное» уравнение

$$\pi(t)x^{(n)}(t) = z(t), \quad t \in [a, b]. \quad (1)$$

**Лемма 2.** Уравнение (1) разрешимо в  $D$  при каждом  $z \in L[a, b]$ .

**Доказательство.** Выберем произвольно точки  $t_i \in (a_i, a_{i+1})$ ,  $i=1, \dots, p-1$ . Функция  $\tilde{x}$ , определенная на каждом интервале  $(a_i, a_{i+1})$  равенством  $\tilde{x}(t) = \int_{t_i}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{z(s)}{\pi(s)} ds$ , удовлетворяет условиям леммы 1. Положим  $\tilde{x}(a_1) = \tilde{x}(a_1+0)$ ,  $\tilde{x}(a_i) = \tilde{x}(a_i-0)$ ,  $i=2, \dots, p$ . Функция

$$y(t) = \tilde{x}(t) - \sum_{i=2}^{p-1} \sum_{j=0}^{n-\mu_i-1} [\tilde{x}^{(j)}(a_i+0) - \tilde{x}^{(j)}(a_i-0)] \frac{(t-a_i)^j}{j!} \chi_{[a_i, b]}(t),$$

$$t \in [a, b],$$

принадлежит пространству  $D$  и удовлетворяет уравнению (1).

Положим  $N = \sum_{i=2}^{p-1} \mu_i + n$ .

**Лемма 3.** Однородное уравнение  $\pi x^{(n)} = 0$  имеет  $N$ -мерное множество решений в пространстве  $D$ .

**Доказательство.** Множество решений уравнения  $\pi x^{(n)} = 0$  совпадает с множеством решений уравнения  $x^{(n)} = 0$ . Любое решение последнего уравнения в пространстве  $D$  является линейной комбинацией линейно независимых функций  $\frac{(t-a)^j}{j!}$ ,  $j=0, 1, \dots, n-1$ , и  $\frac{(t-a_i)^j}{j!} \chi_{[a_i, b]}(t)$ ,  $i=2, \dots, p-1$ ,  $j=n-\mu_i-1, \dots, n-1$ .

Пусть  $r = \{r_1, \dots, r_N\}: D \rightarrow R^N$  — линейный  $N$ -мерный вектор-функционал. В силу лемм 2 и 3 условия однозначной разрешимости краевой задачи

$$\pi x^{(n)} = z, \quad rx = \alpha \quad (2)$$

и краевой задачи

$$x^{(n)} = z, \quad rx = \alpha \quad (3)$$

состоят в невырожденности одной и той же  $(N \times N)$ -матрицы, составленной из значений функционалов  $r_i$  на элементах базиса множества решений однородного уравнения. Следовательно, справедлива

**Лемма 4.** Краевые задачи (2) и (3) однозначно разрешимы в  $D$  для всех  $z \in L[a, b]$ ,  $\alpha \in R^N$  одновременно.

Для построения однозначно разрешимой модельной задачи (2) можно использовать вектор-функционал, соответствующий краевым условиям многоточечной задачи:

$$rx = \{x(c_1), \dot{x}(c_1), \dots, x^{(\rho_1-1)}(c_1), \dots, x(c_i), \dot{x}(c_i), \dots, x^{(\rho_i-1)}(c_i), \dots, x(c_q), \dot{x}(c_q), \dots, x^{(\rho_q-1)}(c_q)\}, \quad (4)$$

где  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_q \leq b$ ,  $1 \leq \rho_i \leq n-1$ ,  $i=1, \dots, q$ ,  $\sum_{i=1}^q \rho_i = N$  (если точка  $c_j$  совпадает с точкой  $a_i$ , то  $\rho_j \leq n - \mu_i$ ). Из леммы 4 и результатов работы [4] непосредственно вытекает следующий критерий. Если  $\max_{1 \leq i \leq q, c_i \in (a, b)} \rho_i + \max_{2 \leq i \leq p-1} \mu_i \leq n$ , то для однозначной разрешимости задачи (2) с вектор-функционалом  $r$  вида (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{1 \leq i \leq q, c_i \in [a, a_j]} \rho_i \leq n + \sum_{i=2}^{j-1} \mu_i, \quad j=2, \dots, p-1, \quad (5)$$

$$\sum_{1 \leq i \leq q, c_i \in [a_j, b]} \rho_i \leq n + \sum_{i=j+1}^{p-1} \mu_i, \quad j=2, \dots, p-1; \quad (6)$$

здесь  $\sum_{i=k}^l \mu_i = 0$ , если  $l < k$ .

**Лемма 5.** Для каждого многочлена  $\pi$  существует вектор-функционал вида (4), для которого сингулярная краевая задача (2) однозначно разрешима при любых  $z \in L[a, b]$  и  $\alpha \in R^N$ .

**Доказательство.** Пусть  $q=N$ ,  $\rho_1 = \dots = \rho_q = 1$ . Выберем точки  $c_i$  так, чтобы они не совпадали ни с одной из точек  $a_j$ . На интервале  $(a_1, a_2)$  возьмем  $n$  точек, на интервалах  $(a_j, a_{j+1})$ ,  $j=2, \dots, p-1$ , — по  $\mu_j$  точек. Тогда в условиях (5) имеет место равенство при каждом  $j=2, \dots, p-1$ . Кроме того,  $\sum_{i=1}^q \rho_i = N$ . Условия (6) выполнены, так как

$n + \sum_{i=j+1}^{p-1} \mu_i - \sum_{1 \leq i \leq q, c_i \in [a_j, b]} \rho_i = n - \mu_j > 0$  при  $j=2, \dots, p-1$ . Следовательно, задача (2) однозначно разрешима.

2. Пусть краевая задача (2) однозначно разрешима всюду. Введем на линейном пространстве  $D$  норму

$$\|x\| = \|\pi x^{(n)}\|_{L[a, b]} + \|rx\|_{R^N}. \quad (7)$$

Теперь  $D$  — банахово пространство, изоморфное произведению  $L[a, b] \times R^N$ , а оператор  $x \rightarrow \{\pi x^{(n)}, rx\} : D \rightarrow L[a, b] \times R^N$  является изоморфизмом. Линейный непрерывный оператор  $x \rightarrow \pi x^{(n)} : D \rightarrow L[a, b]$  будем обозначать  $\delta$ . Так как  $\delta$  действует из  $D$  на все пространство  $L[a, b]$  и  $\dim \ker \delta = N$ , то  $\delta$  — нётеров оператор,  $\text{ind } \delta = N$ .

Отметим, что в отличие от пространств, введенных в работе [2], пространство  $D$  изоморфно произведению  $R^N$  и всего пространства  $L[a, b]$ , а не его подпространства.

**Теорема 1.** Все нормы (7), введенные в  $D$  с помощью различных вектор-функционалов (4), для которых краевая задача (2) однозначно разрешима, эквивалентны.

**Доказательство.** Пусть вектор-функционал  $r$  определен равенством (4), и краевая задача (2) однозначно разрешима. Выберем произвольно точки  $t_i \in (a_i, a_{i+1})$ ,  $i=1, \dots, p-1$ , и введем в  $D$  новую норму

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| + \int_a^b |\pi(s)x^{(n)}(s)| ds. \quad (8)$$

Покажем, что в норме (8) оператор  $[\delta, r] : D_{\|\cdot\|_1} \rightarrow L[a, b] \times R^N$  непрерывен, следовательно, является изоморфизмом. Тогда оператор  $x \rightarrow x : D_{\|\cdot\|_1} \rightarrow D_{\|\cdot\|_1}$  также изоморфизм, что означает эквивалентность всех норм вида (7) с такими вектор-функционалами (4), что краевая задача (2) однозначно разрешима.

Оператор  $\delta: D_{\|\cdot\|} \rightarrow L[a, b]$  ограничен. Осталось доказать, что каждая из компонент вектор-функционала  $r$  является ограниченным функционалом. Пусть  $c_l \in [t_i, a_{i+1}]$ . Из леммы 1 следует, что при  $j=0, 1, \dots, n-1$ , если  $c_l \neq a_{i+1}$ , и при  $j=0, 1, \dots, n-1-\mu_{i+1}$ , если  $c_l = a_{i+1}$ , выполнено равенство

$$x^{(j)}(c_l) = \sum_{k=j}^{n-1} x^{(k)}(t_i) \frac{(c_l - t_i)^{k-j}}{(k-j)!} + \int_{t_i}^{c_l} \frac{(c_l - s)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} x^{(n)}(s) ds.$$

Тогда при тех же  $j$

$$\begin{aligned} |x^{(j)}(c_l)| &\leq \sum_{k=j}^{n-1} |x^{(k)}(t_i)| \frac{(c_l - t_i)^{k-j}}{(k-j)!} + \\ &+ \frac{1}{(n-1-j)!} \max_{t_i \leq s < c_l} \left| \frac{(c_l - s)^{n-1-j}}{\pi(s)} \right| \int_{t_i}^{c_l} |\pi(s) x^{(n)}(s)| ds \leq K \|x\|_1 \end{aligned}$$

при некотором  $K$  для всех  $x \in D$ . То же самое получаем, если  $c_l \in [a_i, t_i]$ . Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что норма в  $D$  введена равенством (7) с помощью одного из вектор-функционалов (4).

**Теорема 2.**  $D \subset W^m[a, b]$  ( $m = n - \max_{1 \leq i \leq p} \mu_i$ ), норма в  $D$  не слабее нормы в  $W^m[a, b]$ .

**Доказательство.** Покажем, что норма (8) не слабее нормы в  $W^m[a, b]$ . Если  $x \in D$ , то при  $i=1, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{a_{i+1}} |x^{(m)}(s)| ds &\leq \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(a_{i+1} - t_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} + \\ &+ \int_{t_i}^{a_{i+1}} \int_{t_i}^t \frac{(t-s)^{n-1-m}}{(n-1-m)!} |x^{(n)}(s)| ds dt = \\ &= \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(a_{i+1} - t_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} + \int_{t_i}^{a_{i+1}} \frac{(a_{i+1} - s)^{n-m}}{(n-m)!} |x^{(n)}(s)| ds \leq \\ &\leq \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(a_{i+1} - t_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} + \frac{1}{(n-m)!} \times \\ &\times \max_{t_i \leq s \leq a_{i+1}} \left| \frac{(a_{i+1} - s)^{n-m-\mu_{i+1}}}{\prod_{j=1, j \neq i+1}^p (s - a_j)^{\mu_j}} \right| \int_{t_i}^{a_{i+1}} |\pi(s) x^{(n)}(s)| ds, \\ \int_{a_i}^{t_i} |x^{(m)}(s)| ds &\leq \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(t_i - a_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} + \frac{1}{(n-m)!} \times \\ &\times \max_{a_i \leq s \leq t_i} \left| \frac{(a_i - s)^{n-m-\mu_i}}{\prod_{j=1, j \neq i}^p (s - a_j)^{\mu_j}} \right| \int_{a_i}^{t_i} |\pi(s) x^{(n)}(s)| ds. \end{aligned}$$

Кроме того, при  $j=0, 1, \dots, m-1$

$$|x^{(j)}(a)| \leq \sum_{k=j}^{n-1} |x^{(k)}(t_1)| \frac{(t_1 - a)^{k-j}}{(k-j)!} + \int_a^{t_1} \frac{(s-a)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} |x^{(n)}(s)| ds \leq$$

$$\leq \sum_{k=j}^{n-1} |x^{(k)}(t_1)| \frac{(t_1-a)^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{1}{(n-1-j)!} \times \\ \times \max_{a \leq s \leq t_1} \left| \frac{(s-a)^{n-1-j-\mu_1}}{\prod_{i=2}^p (s-a_i)^{\mu_i}} \right| \int_a^{t_1} |\pi(s)x^{(n)}(s)| ds.$$

Суммируя полученные выше неравенства, имеем, что  $x \in W^m[a, b]$ , и существует такая постоянная  $K$ , что  $\|x\|_{W^m[a, b]} \leq K\|x\|_1$  для всех  $x \in D$ . Так как нормы (7) и (8) эквивалентны, то теорема доказана. Отметим, что приведенные доказательства теорем 1 и 2 существенно используют идеи работы [3].

Пусть  $[\delta, r]$  — изоморфизм. Обозначим  $[\delta, r]^{-1} = \{\Lambda, Y\} : \{\Lambda, Y\} \times \{z, \beta\} = \Lambda z + Y\beta$ ,  $z \in L[a, b]$ ,  $\beta \in R^N$ . Из теоремы 2 следует, что линейный непрерывный оператор  $\Lambda : L[a, b] \rightarrow D$  непрерывно действует из  $L[a, b]$  в  $W^1[a, b]$ , а такой оператор имеет интегральное представление (см., например, [1, с. 51]) и его ядро — функция Грина краевой задачи (2)  $\Lambda(t, s)$  — ограничено в существенном на  $[a, b] \times [a, b]$  [5, с. 100]. При каждом  $t \in [a, b]$  сечение ядра  $\Lambda(t, \cdot)$  как функция переменной  $s$  определено на отрезке  $[a, b]$  с точностью до множества нулевой меры. Поэтому, не оговаривая это в дальнейшем, считаем, что все утверждения относительно  $\Lambda(t, s)$  при каждом  $t \in [a, b]$  выполняются при почти всех  $s \in [a, b]$ .

**Теорема 3.**  $\Lambda(t, s) = \frac{G(t, s)}{\pi(s)}$  при  $t, s \in [a, b]$ , где  $G(t, s)$  — функция Грина краевой задачи (3).

**Доказательство.** Для таких  $z \in L[a, b]$ , что  $\int_a^b \left| \frac{z(s)}{\pi(s)} \right| ds < \infty$ , выполнено  $(\Lambda z)(t) = \int_a^b \frac{G(t, s)}{\pi(s)} z(s) ds$ ,  $t \in [a, b]$ . Таким образом,

$\Lambda(t, s) = \frac{G(t, s)}{\pi(s)}$  при  $t, s \in [a, b]$ ,  $|s - a_i| > \varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, p$ , для каждого  $\varepsilon > 0$ . Это значит, что  $\Lambda(t, s) = \frac{G(t, s)}{\pi(s)}$  при  $t, s \in [a, b]$ .

Итак, для построения изоморфизма пространств  $D$  и  $L[a, b] \times R^N$  достаточно найти функцию Грина краевой задачи (3). Следует отметить, что пространство решений задачи (3) состоит из функций без разрывов производных (т. е. является пространством  $W^n[a, b]$ ) только если  $p = 2$ . Пространство решений сопряженной задачи [4] к задаче (3) может быть пространством  $W^n[a, b]$  лишь тогда, когда  $\sum_{i=1}^p \mu_i \leq n$ . В работе [3] рассматривается случай, когда оба эти условия выполнены. В нашем же случае приходится пользоваться более широким пространством, чем  $W^n[a, b]$ .

3. Следующие две теоремы посвящены вопросу об условиях сохранения знака функции Грина  $\Lambda(t, s)$  задачи (2).

**Теорема 4.** *Функция Грина  $\Lambda(t, s)$  краевой задачи (2) с функционалом  $r$  вида (4), где  $c_1 = a$ ,  $c_q = b$ ,  $\max_{2 \leq i \leq p-1} \mu_i + \max_{2 \leq i \leq q-1} \rho_i \leq n$ , сохраняет знак тогда и только тогда, когда  $\rho_i$  четны при  $i = 2, \dots, q-1$ . В этом случае  $(-1)^{\mu_p + \rho_q} \Lambda(t, s) \geq 0$ ,  $t, s \in [a, b]$ .*

**Доказательство.** Из теоремы 2 работы [4] следует, что

$$(-1)^{\rho_q} \prod_{i=2}^{q-1} (t - c_i)^{\rho_i} \prod_{i=2}^{p-1} (s - a_i)^{\mu_i} G(t, s) \geq 0, \quad t, s \in [a, b],$$

где  $G$  — функция Грина задачи (3). Отсюда

$$(-1)^{\rho_q + \mu_p} \prod_{i=2}^{q-1} (t - c_i)^{\rho_i} \Lambda(t, s) \geq 0, \quad t, s \in [a, b].$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.** Если  $\mu_i \leq n - 2, i = 1, 2, \dots, p$ , то существует такой вектор-функционал  $r$  вида (4), что функция Грина краевой задачи (2) неотрицательна.

**Доказательство.** Пусть  $c_1 = a, c_q = b, \rho_1$  и  $\rho_q$  равны либо 1, либо 2, причем четность  $\rho_q$  совпадает с четностью  $\mu_p$ , а четность  $\rho_1$  совпадает с четностью  $n + \sum_{i=2}^{p-1} \mu_i - \rho_q$ . Точки  $c_i, i = 2, \dots, q - 1$ , выберем так,

чтобы они не совпадали с точками  $a_j$ . Число точек  $c_i$  на интервале  $(a_j, a_{j+1})$  обозначим  $\alpha_j, j = 1, \dots, p - 1$ . Положим  $\rho_i = 2, i = 2, \dots, q - 1$ . Выбираем точки  $c_i$  так, что  $\alpha_1 = \left[ \frac{n - \rho_1}{2} \right], \alpha_k = \left[ \frac{1}{2} \left( n + \sum_{i=2}^k \mu_i - \rho_1 \right) \right] - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i,$

$k = 2, \dots, p - 2$  ( $[l]$  — целая часть  $l$ ),  $\alpha_{p-1} = \frac{1}{2} \left( n + \sum_{i=2}^{p-1} \mu_i - \rho_1 - \rho_q \right) - \sum_{i=1}^{p-2} \alpha_i$ . Таким образом, условие  $\sum_{i=1}^q \rho_i = N$  и условия (5) выполнены.

Кроме того,  $n + \sum_{i=2}^{j-1} \mu_i - \rho_1 - 2 \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \leq 1$  при  $j = 2, \dots, p - 1$ . Тогда  $n + \sum_{i=j+1}^{p-1} \mu_i - \rho_q - 2 \sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i = n - \mu_j - \left( n + \sum_{i=2}^{j-1} \mu_i - \rho_1 - 2 \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \right) > 0$  при  $j = 2, \dots, p - 1$ , т. е. условия (6) также выполнены. Таким образом, задача (2) однозначно разрешима, и вектор-функционал  $r$  удовлетворяет условиям теоремы 4. Так как  $\mu_p + \rho_q$  четно, то теорема доказана.

4. Рассмотрим линейный непрерывный оператор  $\mathcal{L}: D \rightarrow L[a, b]$

$$(\mathcal{L}x)(t) = \pi(t)x^{(n)}(t) + (Tx)(t), \quad t \in [a, b],$$

где оператор  $T: D \rightarrow L[a, b]$  вполне непрерывен (в силу теоремы 2 для этого достаточно полной непрерывности  $T$  как оператора из  $W^m[a, b]$  в  $L[a, b]$ ). Так как оператор  $\delta$  нётеров, то оператор  $\mathcal{L}$  также нётеров,  $\text{ind } \mathcal{L} = \text{ind } \delta = N$ . Получили, что уравнение  $\mathcal{L}x = f, x \in D, f \in L[a, b]$ , не является сингулярным, а представляет собой одну из реализаций абстрактного функционально-дифференциального уравнения (см. § 6.1 монографии [1]). При этом главная часть оператора  $\mathcal{L}$  — оператор  $Q = \mathcal{L}\Lambda$  — является фредгольмовым оператором, действующим в пространстве  $L[a, b]$ . Краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad l^i x = \alpha_i, \quad \alpha_i \in R^1, \quad i = 1, \dots, N, \quad f \in L[a, b], \quad x \in D, \quad (9)$$

с линейно независимой системой линейных ограниченных функционалов  $l^i: D \rightarrow R^1, i = 1, \dots, N$ , также будет фредгольмовой задачей [1, с. 103].

В частности, справедлива теорема [1, с. 105]:

следующие утверждения эквивалентны:

а) уравнение  $\mathcal{L}x = f$  разрешимо для каждого  $f \in L[a, b]$ ;

б)  $\dim \ker \mathcal{L} = N$ ;

в) существует такой ограниченный вектор-функционал  $l: D \rightarrow R^N$ , что краевая задача (9) однозначно разрешима.

Можно заменить операцию  $x^{(n)}$  линейным неосциллирующим на отрезке  $[a, b]$  дифференциальным оператором  $n$ -го порядка

$$(\delta x)(t) = x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t)x^{(i)}(t), \quad t \in [a, b], \quad p_i \in L[a, b],$$

а пространство  $L[a, b]$  любым лебеговым пространством  $L_p[a, b]$ ,  $p > 1$ . Все приведенные выше утверждения при этом сохраняются.

5. Для измеримой  $h: [a, b] \rightarrow R^1$  обозначим

$$x_h(t) = \begin{cases} x(h(t)), & \text{если } h(t) \in [a, b], \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [a, b]. \end{cases}$$

Рассмотрим вопрос об условиях однозначной разрешимости краевой задачи

$$\begin{aligned} \pi(t)x^{(n)}(t) + p(t)x_h(t) &= f(t), \quad t \in [a, b], \\ rx &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $p, f \in L[a, b]$ ,  $r: D \rightarrow R^N$  — вектор-функционал вида (4), для которого однозначно разрешима краевая задача (2),  $x \in D$ .

Подстановка  $x(t) = \int_a^b \Lambda(t, s)z(s)ds$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами решений краевой задачи (10) и уравнения относительно  $z \in L[a, b]$

$$z(t) + p(t) \int_a^b \Lambda(h(t), s)z(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

где  $\Lambda(t, s) = 0$  при  $(t, s) \notin [a, b] \times [a, b]$ . Оценивая норму интегрального оператора в левой части последнего уравнения, получаем достаточное условие однозначной разрешимости задачи (10)

$$M \int_a^b |p(t)| \chi_{[a, b]}(h(t)) dt < 1,$$

где  $M = v. \sup_{a \leq t, s \leq b} |\Lambda(t, s)|$ .

В каждом конкретном случае число  $M$  можно вычислить. Например, при  $t \in [-a, a]$

а) если  $n=3$ ,  $\pi(t) = (t+a)t(t-a)$ ,  $rx = \{x(-a), \dot{x}(-a), x(a), \dot{x}(a)\}$ , то  $M = \frac{1}{4a}$ ;

б) если  $n=3$ ,  $\pi(t) = (t+a)^2(t-a)^2$ ,  $rx = \{x(-a), x(0), x(a)\}$ , то  $M = \frac{1}{8a^2}$ ;

в) если  $n=4$ ,  $\pi(t) = (t+a)^3(t-a)^3$ ,  $rx = \{x(-a), x(0), \dot{x}(0), x(a)\}$ , то  $M = \frac{1}{48a^3}$ ;

г) если  $n=4$ ,  $\pi(t) = (t+a)t^2(t-a)$ ,  $rx = \{x(-a), \dot{x}(-a), \ddot{x}(-a), x(a), \dot{x}(a), \ddot{x}(a)\}$ , то  $M = \frac{1}{12a}$  (см. [6]). Оценки величины  $M$  при  $\pi(t) = (t-a)^q(t-b)^{n-q}$ ,  $1 \leq q \leq n-1$ , можно получить с помощью теоремы 2 работы Ю. В. Покорного [7].

6. В заключение рассмотрим вариационную задачу, которая становится регулярной, если искать решение в пространстве  $D$ . Здесь при определении пространства  $D$  заменяем пространство  $L[a, b]$  пространством  $L_2[a, b]$ . Получим условие существования в  $D$  решения задачи



$$\int_a^b \left\{ \frac{1}{2} [\pi(s)x^{(n)}(s)]^2 + (T_1x)(s)(T_2x)(s) + (T_3x)(s) \right\} ds \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$rx = \alpha, \quad \alpha \in R^N,$$

где  $D$  изоморфно  $L_2[a, b] \times R^N$ , а изоморфизмом является оператор  $[\delta, r]: D \rightarrow L_2[a, b] \times R^N$  ( $(\delta x)(t) = \pi(t)x^{(n)}(t)$ ,  $[\delta, r]^{-1} = \{\Lambda, Y\}$ ). Кроме того,  $T_1, T_2: D \rightarrow L_2[a, b]$ ,  $T_3: D \rightarrow L[a, b]$  — линейные ограниченные операторы, операторы  $T_1\Lambda, T_2\Lambda: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$  интегральные:

$$(T_i\Lambda z)(t) = \int_a^b Q_i(t, s)z(s)ds, \quad t \in [a, b], \quad i = 1, 2.$$

Подстановка  $x(t) = \int_a^b \Lambda(t, s)z(s)ds + Y\alpha$ ,  $z \in L_2[a, b]$  сводит задачу (11) к задаче в  $L_2[a, b]$ :

$$\int_a^b \left\{ \frac{z^2(t)}{2} + \int_a^b Q_1(t, s)z(s)ds \int_a^b Q_2(t, s)z(s)ds + (Tz)(t) \right\} \rightarrow \min, \quad (12)$$

где  $T: L_2[a, b] \rightarrow L[a, b]$  — линейный ограниченный оператор.

Можно показать, что достаточным условием однозначной разрешимости задачи (12) является неравенство  $\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)dt ds < 1$ , где  $K(t, s) = \int_a^b \{ Q_2(\tau, t)Q_1(\tau, s) + Q_1(\tau, t)Q_2(\tau, s) \} d\tau$ ,  $t, s \in [a, b]$ .

Если  $(T_1x)(t) = p_1(t)x_{h_1}(t)$ ,  $(T_2x)(t) = p_2(t)x_{h_2}(t)$ , где  $h_1, h_2: [a, b] \rightarrow R^1$  измеримы,  $p_1, p_2 \in L[a, b]$ ,  $M = \underset{a \leq t, s \leq b}{v. \sup} |\Lambda(t, s)|$ , то справедлива

**Теорема 6.** *Задача (11) имеет единственное решение в пространстве  $D$  при любых  $\alpha \in R^N$  и  $T_3: D \rightarrow L[a, b]$ , если*

$$\int_a^b |p_1(\tau)p_2(\tau)| \chi_{[a, b]}(h_1(\tau)) \chi_{[a, b]}(h_2(\tau)) d\tau < \frac{1}{2M^2(b-a)}.$$

**Пример 1.** Если  $T_1 = 0$ , то задача (11) имеет единственное решение в пространстве  $D$ .

**Пример 2:** Рассмотрим вариационную задачу

$$\int_{-1}^1 \{ [(s-1)s^2(s+1)x^{IV}(s)]^2 + p(s)[x_h(s)]^2 + (Tx)(s) \} ds \rightarrow \min,$$

$$x(-1) = \alpha_1, \quad \dot{x}(-1) = \alpha_2, \quad \ddot{x}(-1) = \alpha_3,$$

$$x(1) = \alpha_4, \quad \dot{x}(1) = \alpha_5, \quad \ddot{x}(1) = \alpha_6, \quad x \in D.$$

Здесь  $D$  — пространство абсолютно непрерывных функций  $x: [-1, 1] \rightarrow R^1$ , у которых  $\dot{x}$  абсолютно непрерывна в  $[-1, 1]$ ,  $\ddot{x}$  локально абсолютно непрерывна в  $[-1, 0]$  и  $(0, 1]$ ,  $\dot{x}$  локально абсолютно непрерывна в  $(-1, 0)$  и  $(0, 1)$  и  $\int_{-1}^1 [(s-1)s^2(s+1)x^{IV}(s)]^2 ds < \infty$ .

Так как в данном случае  $M = 1/12$ , то из теоремы 6 следует, что если  $\int_{-1}^1 |p(t)| dt < 72$ , то задача имеет единственное решение при всех измеримых  $h: [-1, 1] \rightarrow R^1$ , при любом линейном ограниченном операторе  $T: D \rightarrow L[a, b]$  и любых  $\alpha_i \in R^1$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

## Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.
2. Шиндяпин А. И. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 450—455.
3. Лабовский С. М. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 10. С. 1695—1704.
4. Дерр В. Я. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 11. С. 1861—1872.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М., 1968.
6. Бравый Е. И. // Краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 1991. С. 12—19.
7. Покорный Ю. В. // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 5. С. 653—664.

*Пермский политехнический институт*

*Поступила в редакцию*

*2 июля 1992 г.*