4. Кузнецов М. И. Модулярные простые алгебры Ли с разрешимой максимальной подалгеброй.— Матем. сб., 1976, **101**, № 1, с. 77—86.
5. Zassenhaus H. Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Ringe bei Charakteristik $p>0$.— J. reine und angew. Math., 1940, **182**, p. 150—155.

Поступила в редакцию
15.10.81

УДК 512.55

И. З. Голубчик, А. В. Михалёв

О МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБР С ПОЛУГРУППОВЫМ ТОЖДЕСТВОМ

Настоящая работа продолжает исследования авторов [1, 2].

Пусть F — поле, $\operatorname{char} F=0$. Полиномиальное тождество

$$v(x_1, \ldots, x_k) - u(x_1, \ldots, x_k) = 0,$$

где $v=v(x_1, \ldots, x_k)$, $u=u(x_1, \ldots, x_k)$ — различные мономы, называется полугрупповым. Полугрупповое тождество $v-u=0$ назовем приведенным, если мономы v и u начинаются и кончаются различными буквами. Положим:

$$f_1(x, y)=x, \quad g_1(x, y)=y,$$
$$f_{m+1}(x, y)=f_m(x, y)\,g_m(x, y),$$
$$g_{m+1}(x, y)=g_m(x, y)\,f_m(x, y).$$

Полугрупповое тождество $f_n(x, y)-g_n(x, y)=0$ назовем тождеством энгелевости в смысле А. И. Мальцева [3]. Отметим, что

$$f_n(x, y)-g_n(x, y)=[f_1, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}].$$

Через $\operatorname{var}(A)$ обозначим многообразие F-алгебр, порожденное F-алгеброй A. Пусть $T_2(F)$ — алгебра верхнетреугольных (2×2)-матриц над полем F; G — алгебра Грассмана счетного ранга. Тождества алгебр, близких к изучаемым в настоящей работе, рассмотрены в [4, 5, 6, 7, 1, 8, 9].

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр над полем F. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *в $\mathfrak{M}$ выполнено некоторое полугрупповое тождество;*
2) *в $\mathfrak{M}$ выполнено нетривиальное тождество вида*

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i y x^{m-i} = 0, \text{ где } \alpha_i \in F;$$

3) *в $\mathfrak{M}$ выполнено тождество вида*

$$y^n [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}]\, y^n = 0;$$

4) $T_2(F) \notin \mathfrak{M}$.

Отметим, что $T_2(F) \in \operatorname{var}(G \otimes_F G)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр над полем F. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *в $\mathfrak{M}$ выполнено некоторое приведенное полугрупповое тождество;*
2) *в $\mathfrak{M}$ выполнено тождество энгелевости в смысле А. И. Мальцева;*
3) *в $\mathfrak{M}$ выполнено тождество вида*

$$[x, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{n}] = 0,$$

где n — некоторое натуральное число.

Из теоремы 1 и следствия 4 работы [10] вытекает

Теорема 3. *Многообразие алгебр над полем F, удовлетворяющих некоторому полугрупповому тождеству, шпехтово.*

Для полилинейных полугрупповых тождеств утверждение теоремы 3 доказано В. Н. Латышевым [4].

Следствие 4. *Пусть R — алгебра с единицей над полем F и в R выполнено некоторое полугрупповое тождество. Тогда в R выполнено тождество вида* $[x, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{n}]=0$ *для некоторого натурального числа n.*

Пример 5. Пусть B — подалгебра алгебры матриц F_3 с образующими $e_{22}, e_{12}, e_{13}, e_{23}$. Тогда:

1) многообразие $\mathrm{var}(B)$ удовлетворяет полугрупповому тождеству

$$yx[x, y, yx]yx = yx^2y^2xyx - yxyx^2y^2x = 0;$$

2) многообразие $\mathrm{var}(B)$ не является локально слабо нётеровым [11].

В доказательстве теорем 1 и 2 существенную роль играет

Лемма 6. *Пусть R — алгебра над полем F и в R выполнено тождество*

$$y^m\Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y^i x y^{n-i}\Big) y^k = 0,$$

где $\alpha_i \in F$, $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_n \neq 0$. Тогда в R выполнено тождество

$$y^m [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{3n}] y^k = 0.$$

Доказательство. Индукцией по n докажем, что в R выполнено тождество

$$y^{m+n} [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}] y^k = 0.$$

Действительно,

$$y^m\Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y^i x y^{n-i}\Big) y^k = g(x, y) = y^m\Big(\sum_{i=0}^{n} \beta_i [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-i}] y^i\Big) y^k,$$

причем $\alpha_0 = \beta_0 \neq 0$. Совершим подстановку $y = y + \lambda y^2$, где $\lambda \in F$, и соберем члены, при которых λ стоит в первой степени. Тогда

$$0 = myg(x, y) + kg(x, y)y +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \{(n-i)\beta_i ([x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-i}] y^{i+1} + y [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-i}] y^i) +$$

$$+ i\beta_i [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-i}] y^{i+1}\} = myg(x, y) + (k+n) g(x, y) y + y^{m+1} \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\beta_i [[x, y], \underbrace{y, \ldots, y}_{n-1-i}] y^i\Big) y^k.$$

Применяя индукционное предположение, получаем, что в R выполнено тождество

$$y^{m+1+n-1} [[x, y], \underbrace{y, \ldots, y}_{n-1}] y^k = y^{m+n} [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}] y^k = 0.$$

Аналогично проверяем, что в алгебре R выполнено тождество

$$y^m [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}] y^{k+n} = 0$$

и, следовательно, в R выполнено тождество

$$y^m [x, \underbrace{y, \ldots, y}_{3n}] y^k = 0.$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство теорем 1 и 2. В теореме 1 импликация 1)⇒2) осуществляется редукцией к полугрупповому тождеству от двух переменных x, z и последующей подстановкой $z=y+\lambda x$. Импликация 2)⇒3) доказана в лемме 6. Аналогично доказывается импликация 1)⇒3) в теореме 2. Импликация 2)⇒1) в теореме 2 очевидна.

Проведем доказательство импликации 3)⇒2) в теореме 2. (Доказательство импликации 3)⇒1) в теореме 1 аналогично.)

В работе [9] доказано, что выполнение тождества $\underbrace{[x, y, \ldots, y]}_{n}=0$ влечет выполнение тождества $[x_1, x_2, \ldots, x_m]=0$. Далее, из равенства

$$f_m(x, y) - g_m(x, y) = [f_1, g_1, \ldots, g_{m-1}]$$

следует, что в многообразии $\mathfrak{M}$ выполнено тождество энгелевости в смысле А. И. Мальцева. Импликация 3)⇒1) доказана.

Осталось доказать импликации 3)⇒4) и 4)⇒2) в теореме 1. Выполнив подстановку $x=e_{12}$, $y=e_{22}-e_{11}$, получим

$$y^n \underbrace{[x, y, \ldots, y]}_{n} y^n = (-1)^n 2^n e_{12} \neq 0,$$

что доказывает импликацию 3)⇒4). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)=0$ — полилинейное тождество, выполненное в многообразии $\mathfrak{M}$ и не выполненное в алгебре $T_2(F)$. Разлагая f по базе Шпехта, получаем, что

$$f = h + \sum_{i=1}^{m} g_i,$$

где h, g_i — полилинейные многочлены,

$$g_i = a_i b_i c_i, \tag{1}$$

a_i, b_i — коммутаторы длины, большей 1, и h — линейная комбинация многочленов вида

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n}. \tag{2}$$

Пусть k_1 — наибольшее число, для которого многочлен вида (2) входит в разложение h с ненулевым коэффициентом. Отметим, что $h \neq 0$, ибо $g_i=0$ выполнено в алгебре $T_2(F)$. Пользуясь тождеством Якоби, получаем, что $h=h_1+h_2+h_3$, где h_3 — сумма многочленов вида (1); h_1 — сумма многочленов вида (2) с условиями $i_1<\ldots<i_k$, $i_{k+1}<\ldots<i_n$ и h_2 — сумма многочленов вида (2) с условием $i_1 \neq 1$, $i_2 \neq 1$. Тогда многочлен $[x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}] x_{k_1+1} \ldots x_n$ входит в разложение h_1 с ненулевым коэффициентом. Выполним подстановку $x_1=x$, $x_2=\ldots=x_k=y^2$, $x_{k+1}=\ldots=x_n=y$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x, y^2, \ldots, y^2, y, \ldots, y) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i y^{m-i} x y^i.$$

Импликация 4)⇒2) в теореме 1 доказана.

Авторы благодарны В. Н. Латышеву и В. Т. Маркову за ценные обсуждения и конструктивные замечания.

I. Z. Golubchik, A. V. Mikhalev

ON VARIETIES OF ALGEBRAS WITH SEMIGROUP IDENTITIES

It is shown that a variety $\mathfrak{M}$ of algebras over a field F of characteristic zero satisfies a semigroup identity if and only if $\mathfrak{M}$ does not contain the algebra of the two-by-two upper triangular matrices over F. We prove that these varieties are Specht.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golubchic I. Z., Mikhalev A. V. A note on varieties of semiprime rings with semigroup identities.— J. Algebra, 1978, **54**, N 1, p. 42—45.
2. Голубчик И. З., Михалёв А. В. Обобщенные групповые тождества в классических группах.— Успехи матем. наук, 1980, **35**, № 6, с. 155—156.
3. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., 1970.
4. Латышев В. Н. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр.— Алгебра и логика, 1969, **8**, № 6, с. 660—674.
5. Мальцев Ю. Н. Базис тождеств в алгебре верхнетреугольных матриц.— Алгебра и логика, 1971, **10**, № 4, с. 393—400.
6. Размыслов Ю. П. Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр.— Алгебра и логика, 1974, **13**, № 6, с. 685—695.
7. Латышев В. Н. Конечная базируемость тождеств некоторых колец.— Успехи матем. наук, 1977, **32**, № 4, с. 259—260.
8. Медведев Ю. А. Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством.— Алгебра и логика, 1978, **17**, № 6, с. 709—727.
9. Мальцев Ю. Н. О тождествах матричных колец.— Сиб. матем. ж., 1981, **22**, № 3, с. 213—214.
10. Кемер А. Р. О нематричных многообразиях.— Алгебра и логика, 1980, **19**, № 3, с. 255—283.
11. Ананьин А. З. Локально финитно аппроксимируемые и локально представимые многообразия алгебр.— Алгебра и логика, 1977, **16**, № 1, с. 3—23.

Поступила в редакцию
15.10.81

УДК 512.8

С. И. Комаров

ОБ $\mathfrak{U}$-$\mathfrak{L}$-ЧИСТОТЕ В АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Пусть $\mathfrak{U}$ (соответственно $\mathfrak{L}$) — класс абелевых групп, замкнутый относительно изоморфизма, фактор-групп (подгрупп) и расширений, причем

$$(A \subseteq B,\ B \in \mathfrak{U} \text{ и } B/A \in \mathfrak{L}) \Rightarrow A \in \mathfrak{U}, \tag{1}$$

$$(A \subseteq B,\ B \in \mathfrak{L} \text{ и } A \in \mathfrak{U}) \Rightarrow B/A \in \mathfrak{L}. \tag{2}$$

В категории $\mathscr{A}$ абелевых групп мы получим пример ω-чистоты, если будем считать ω-чистыми все вложения $i: A \to B$, где в B существует такая подгруппа C, что $i(A) \cap C \in \mathfrak{U}$ и $B/(i(A)+C) \in \mathfrak{L}$ (см. [1, 2]). Эту чистоту будем называть $\mathfrak{U}$-$\mathfrak{L}$-чистотой, а запись $A \subseteq_{\mathfrak{U}\text{-}\mathfrak{L}} B$ будет означать, что A является $\mathfrak{U}$-$\mathfrak{L}$-чистой подгруппой в B.

В статье изучаются классы $\mathfrak{U}$-$\mathfrak{L}$-плоских, $\mathfrak{U}$-$\mathfrak{L}$-делимых, $\mathfrak{U}$-$\mathfrak{L}$-проективных и $\mathfrak{U}$-$\mathfrak{L}$-инъективных групп (определения см. в [1]), обозначим их соответственно $F_{\mathfrak{U}\text{-}\mathfrak{L}}$, $D_{\mathfrak{U}\text{-}\mathfrak{L}}$, $P_{\mathfrak{U}\text{-}\mathfrak{L}}$, $I_{\mathfrak{U}\text{-}\mathfrak{L}}$.

В дальнейшем все рассматриваемые группы абелевы. Обозначения взяты из [3]. Класс, состоящий лишь из нулевой группы, обозначается символом 0.

1. Лемма 1. (*а*) $A \in D_{\mathfrak{U}\text{-}\mathfrak{L}} \Leftrightarrow \exists B \subseteq A: B \in \mathfrak{U}$ *и* $A/B \in D_{0\text{-}\mathfrak{L}}$; (*б*) $A \in F_{\mathfrak{U}\text{-}\mathfrak{L}} \Leftrightarrow \exists B \subseteq A: A/B \in \mathfrak{L}$ *и* $B \in F_{\mathfrak{U}\text{-}0}$.