

K. A. Mirzoev, T. A. Safonova, Values of the Riemann Zeta Function and the Dirichlet Beta Function at Positive Integer Points and Multiple Numerical Series, *Mat. Zametki*, 2022, Volume 112, Issue 6, 947–952

DOI: 10.4213/mzm13534

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

February 16, 2025, 14:34:51



Значения дзета-функции Римана и бета-функции Дирихле в натуральных точках и кратные числовые ряды

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

Ключевые слова: значения дзета-функции Римана и бета-функции Дирихле в натуральных точках, кратные числовые ряды, ряды Морделла–Торнхейма.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13534>

1. Символом $\zeta(s)$, как обычно, обозначим дзета-функцию Римана и, следуя [1; гл. 23], символами $\beta(s)$ и $\lambda(s)$ – родственные с ней функции, определяемые равенствами

$$\beta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s}, \quad \lambda(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s).$$

Хорошо известно, что функции $\zeta(s)$, $\lambda(s)$ (при $\operatorname{Re} s > 1$) и $\beta(s)$ (при $\operatorname{Re} s > 0$), определяемые этими равенствами, аналитически продолжаютя на всю комплексную плоскость за возможным исключением точки $s = 1$. Функцию $\beta(s)$ называют *бета-функцией Дирихле*, а числа $\beta(2)(= G)$ и $\zeta(3)$ принято называть *постоянными Каталана* и *Аперри* соответственно (см., например, [2; гл. 1, п.п. 1.7 и 1.6]).

Известно также, что

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}, \quad \beta(2m+1) = \frac{(-1)^m(\pi/2)^{2m+1}}{2(2m)!} E_{2m}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где B_{2m} и E_{2m} – числа Бернулли и Эйлера соответственно (см. [1; гл. 23, формулы 23.2.16 и 23.2.22], а также [2; пп. 1.6 и 1.7], [3; гл. 25, формула 25.6.2] и [4; п. 5.1.2, формула 2 и п. 5.1.4, формула 2]). Из приведенных выше формул следует, что числа $\zeta(2m)$, $\lambda(2m)$ и $\beta(2m+1)$ являются трансцендентными. Однако различные известные представления для чисел $\zeta(2m+1)$, $\lambda(2m+1)$ и $\beta(2m)$ пока не позволяют судить об их арифметической природе, и об этом мало что известно. В частности, по этой причине отыскание представлений этих чисел или их определенных линейных комбинаций в виде интегралов, рядов и др. представляет особый интерес, а литература, посвященная этой тематике, весьма обширна.

Настоящая работа посвящена представлению чисел $\zeta(2m+1)$, $\lambda(2m+1)$ и $\beta(2m)$ или их некоторых линейных комбинаций (в формулировках каждый раз указывается, о каких комбинациях идет речь) в виде кратных числовых рядов. При этом особое внимание уделяется малым значениям параметра m , в частности, постоянным Аперри и Каталана.

В работе намечаются пути доказательства некоторых утверждений пп. 3, 4 и 5. При этом отправным пунктом установления справедливости утверждений теорем 2 и 3 является полученная ранее авторами и сформулированная в п. 2 теорема 1.

В середине XX века в работах Торнхейма [5] и Морделла [6] было доказано, что суммы некоторых сходящихся кратных числовых рядов – позже названных рядами Морделла–Торнхейма – связаны со значениями дзета-функции Римана в целочисленных точках. В частности, в работе [6] устанавливается справедливость формулы

$$\zeta(k+1) = \frac{1}{k!} \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1 \cdots n_k (n_1 + \cdots + n_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-11-20261).

(см. также [3; гл. 25, формула 25.6.5]), обобщающей известную формулу Эйлера для $\zeta(3)$. Ряды типа Морделла–Торнхейма активно исследуются и в настоящее время (см. работу [7] и список цитированной литературы в ней). В п. 3 настоящей работы для некоторых линейных комбинаций чисел $\beta(2m)$ и $\lambda(2m+1)$ получены кратные числовые ряды типа рядов Морделла–Торнхейма.

В работе [8] получены представления чисел $\beta(2m+1)$, $\lambda(2m)$, $\zeta(2m)$ и $\zeta(2m+1)$ в виде кратных числовых рядов в терминах последовательностей чисел f_n^m и g_n^m , определяемых равенствами $f_n^0 = g_n^0 = 1$ при $n = 0, 1, \dots$ и

$$f_n^m = \sum_{0 < l_1 < l_2 < \dots < l_m \leq n} \prod_{n=1}^m \frac{1}{l_n^2}, \quad g_n^m = \sum_{0 < l_1 < l_2 < \dots < l_m \leq n} \prod_{n=1}^m \frac{1}{(2l_n - 1)^2}$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $m = 1, 2, \dots, n$. В п. 4 настоящей работы для чисел $\zeta(2m)$ и $\beta(2m+1)$ в терминах тех же последовательностей получены похожие, но, по-видимому, более простые формулы, чем в [8], а в п. 5 – приведены кратные числовые ряды, содержащие f_n^m и g_n^m , уже для некоторых линейных комбинаций чисел $\beta(2m)$, $\lambda(2m+1)$ и $\zeta(2m+1)$. В случае $m = 1$ некоторые из полученных нами рядов совпадают с классическими формулами для постоянных Каталана и Аперы, а другие, насколько нам известно, новы (см. п. 6).

2. Используя методы, предложенные ранее авторами в работах [9]–[11], в частности, была установлена справедливость следующей теоремы (см. [11; следствие 1]).

ТЕОРЕМА 1. *При $m = 1, 2, \dots$ справедливы равенства*

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)} (2m-2n)!} \beta(2n) = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m-1)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m-1}}{\sin x} dx, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)+1}}{2^{2(m-n)+1} (2m-2n+1)!} \beta(2n) - \lambda(2m+1) = \frac{(-1)^{m-1}}{2(2m)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m}}{\sin x} dx. \quad (3)$$

Позже авторы обнаружили, что справедливость теоремы 1 можно извлечь также из одного тождества Рамануджана (см. [12; entry 14, p. 261]).

Отметим, что формула (3) является формулой, связывающей значения $\zeta(2m+1)$, $\beta(2)$, $\beta(4), \dots, \beta(2m)$ и интеграл из ее правой части.

3. В интегралах, стоящих в правых частях равенств (2) и (3), сделав универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$ и применив разложения

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad \operatorname{arctg}^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} h_n}{n} x^{2n},$$

где

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1},$$

можно получить различные представления левых частей этих равенств в виде кратных числовых рядов, подобных рядам Морделла–Торнхейма. В частности, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *При $m = 2, 3, \dots$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)} (2m-2n)!} \beta(2n) \\ &= \frac{2^{2(m-1)}}{(2m-1)!} \sum_{n_1, \dots, n_{m-1}, n_m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n_1 + \dots + n_{m-1} + n_m - 1} h_{n_1} \dots h_{n_{m-1}}}{n_1 \dots n_{m-1} (2n_m - 1) (2(n_1 + \dots + n_{m-1} + n_m) - 1)}, \quad (4) \end{aligned}$$

а при $m = 1, 2, \dots$ – равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)+1}}{2^{2(m-n)+1} (2m - 2n + 1)!} \beta(2n) - \lambda(2m + 1) \\ &= \frac{2^{2(m-1)}}{(2m)!} \sum_{n_1, \dots, n_m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n_1+\dots+n_m-1} h_{n_1} \dots h_{n_m}}{n_1 \dots n_m (n_1 + \dots + n_m)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Полагая $m = 2$ в формуле (4) и $m = 1, m = 2$ в формуле (5), после некоторых элементарных преобразований приходим к справедливости такого следствия из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \beta(4) - \frac{\pi^2}{8} \beta(2) &= \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)^2} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k - 1} + \frac{1}{2(n - k + 1)} \right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{2i - 1} \right) \right), \\ 2\pi\beta(2) - \frac{7}{2} \zeta(3) &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k - 1} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$8\pi\beta(4) - \frac{\pi^3}{3} \beta(2) - \frac{31}{2} \zeta(5) = \frac{16}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{2i - 1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{2j - 1} \right) \right). \tag{7}$$

Отметим, что формула (6) хорошо известна (см., например, [2; §1, п. 1.7.2] или [13; формула 59]). Таким образом, (5) является формулой, связывающей значения $\zeta(2m + 1)$, $\beta(2k)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) и ряда из ее правой части, а формулы (6) и (7) – первой и второй из этой серии.

4. Известно (см., например, [8]) и легко устанавливается, что при $|x| \leq \pi/2$ и $n = 1, 2, \dots$ справедливы разложения

$$\frac{x^{2m}}{(2m)!} = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{2^{2(n-m)} f_n^{m-1}}{n^2 C_{2n}^n} \sin^{2n} x, \quad \frac{x^{2m-1}}{(2m - 1)!} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n g_n^{m-1}}{2^{2n} (2n + 1)} \sin^{2n+1} x, \tag{8}$$

где последовательности f_n^m и g_n^m определены в конце п. 1.

Интегрируя эти разложения по отрезку $[0, \pi/2]$ и учитывая известные формулы

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2^{2n}}{(2n + 1) C_{2n}^n}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi C_{2n}^n}{2^{2n+1}} \tag{9}$$

(см., например, [4; п. 2.5.3, формула 1]), получим

$$\frac{\pi^{2m}}{(2m + 1)!} = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f_n^{m-1}}{n^2}, \quad \frac{\pi^{2m}}{2^{2m} (2m)!} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{g_n^{m-1}}{(2n + 1)^2}, \tag{10}$$

а полагая $x = \pi/6$ в них, имеем

$$\frac{1}{(2m)!} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2m} = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f_n^{m-1}}{n^2 C_{2n}^n}, \quad \frac{1}{(2m - 1)!} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{2m-1} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n g_n^{m-1}}{2^{4n+1} (2n + 1)}. \tag{11}$$

Из приведенных выше формул при $m = 1$ следуют хорошо известные равенства

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n} = \frac{\pi^2}{18}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{16^n (2n + 1)} = \frac{\pi}{3}, \tag{12}$$

а при $m = 2$ – равенства

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\pi^4}{120}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \right) = \frac{\pi^4}{384}$$

и

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^4}{1944}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{16^n (2n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^3}{648}.$$

Отметим, что способ вывода равенств (10), приведенный здесь, был ранее применен в [14] для элементарного доказательства первого равенства из соотношений (12).

Отметим также, что, используя формулы (1) для значений $\beta(2m)$ и $\zeta(2m+1)$, равенства (10) и (11) можно переписать как их представления в виде кратных числовых рядов, а именно

$$\begin{aligned} \zeta(2m) &= (-1)^{m-1} \frac{6^{2m} B_{2m}}{2} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f_n^{m-1}}{n^2 C_{2n}^n} \\ &= (-1)^{m-1} 2^{4m-1} B_{2m} \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{g_n^{m-1}}{(2n+1)^2} = (-1)^{m-1} (2m+1) 2^{2m-1} B_{2m} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f_n^{m-1}}{n^2} \end{aligned}$$

и

$$\beta(2m+1) = (-1)^m \frac{(2m+1) 3^{2m+1} E_{2m}}{4} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n g_n^m}{16^n (2n+1)}.$$

5. Учитывая разложения (8) в правых частях равенств (2) и (3) и интегрируя почленно полученные ряды с учетом равенств (9), заключаем, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *При $m = 1, 2, \dots$ имеют место равенства*

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)} (2m-2n)!} \beta(2n) = (-1)^{m-1} \frac{\pi}{4} \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{(C_{2n}^n)^2}{16^n (2n+1)} g_n^{m-1}, \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)+1}}{2^{2(m-n)+1} (2m-2n+1)!} \beta(2n) - \lambda(2m+1) = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2(m+1)}} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{16^n}{n^3 (C_{2n}^n)^2} f_{n-1}^{m-1}. \quad (14)$$

Предложенный нами в работах [9] и [10] метод позволяет также установить справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *При $m = 1, 2, \dots$ имеют место равенства*

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)} (2m-2n)!} \beta(2n) = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2(m-1)}} \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)^2 C_{2n}^n} f_n^{m-1}, \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)}}{2^{2(m-n)} (2m-2n)!} \lambda(2n+1) = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m+1}} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2 C_{2n}^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right) f_{n-1}^{m-1} \quad (16)$$

$$= (-1)^{m-1} \frac{\pi}{4} \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(C_{2k}^k)^2}{16^k} \right) g_n^{m-1}, \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{m-n} \pi^{2(m-n)}}{(2m-2n+1)!} \zeta(2n+1) = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) f_{n-1}^{m-1}. \quad (18)$$

6. В этом пункте мы перечислим следствия из теорем 3 и 4, которые получаются при малых значениях параметра m . Полагая $m = 1$ и $m = 2$ в формулах (13), (14) и (15), приходим к справедливости следующих утверждений.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеют место равенства*

$$\beta(2) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(C_{2n}^n)^2}{16^n(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)^2 C_{2n}^n}, \tag{19}$$

$$\beta(4) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(C_{2k}^k)^2}{16^k(2k+1)} \right) = \frac{\pi^2}{8} \beta(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{(2n+1)^2 C_{2n}^n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Имеют место равенства*

$$2\pi\beta(2) - \frac{7}{2} \zeta(3) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n^3(C_{2n}^n)^2}, \tag{20}$$

$$\frac{31}{8} \zeta(5) - 2\pi\beta(4) = -\frac{\pi^3}{12} \beta(2) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{16^{n-1}}{n^3(C_{2n}^n)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

Отметим, что формулы (19) хорошо известны и приведены в различных справочниках и статьях (см., например, [4; п. 7.4.4, формула 164] и [13; формула 61]), а равенство (20) является известным соотношением между постоянными Каталана, Апери и рядом, стоящим в его правой части (см., например, [13; формула 58]).

Полагая далее $m = 1$ и $m = 2$ в формулах (16), (17) и (18), приходим к справедливости следующих утверждений.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Имеют место равенства*

$$\lambda(3) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2 C_{2n}^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^n \frac{(C_{2k}^k)^2}{16^k},$$

$$\begin{aligned} \lambda(5) &= \frac{\pi^2}{8} \lambda(3) - \frac{1}{32} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2 C_{2n}^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \left(\sum_{i=0}^k \frac{(C_{2i}^i)^2}{16^i} \right) \right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Имеют место равенства*

$$\zeta(3) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \tag{21}$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) \right).$$

Формула (21) хорошо известна и приведена, например, в [4; п. 5.1.32, формула 5], а остальные формулы следствий 4 и 5, по-видимому, являются новыми.

Отметим, что, используя формулы (1), левые части равенств (13)–(18) можно переписать в несколько ином виде. При этом, например, равенство (18) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^m \frac{\zeta(2m-2n)\zeta(2n+1)}{2^{2m-2n-1}(2m-2n+1)B_{2(m-n)}} = (-1)^m \frac{1}{2} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) f_{n-1}^{m-1}.$$

Из этого равенства при $m = 2$, очевидно, следует тождество

$$\zeta(2)\zeta(3) - \zeta(5) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} \right), \quad (22)$$

которое, по-видимому, представляет самостоятельный интерес и связано с работами многих математиков, начало которых было положено в середине прошлого века. В частности, в работах [15]–[17] приведены списки формул, содержащие разложения в кратные числовые ряды выражения $\alpha\zeta(2)\zeta(3) - \beta\zeta(5)$, где α и β – целые числа. Однако равенства (22) среди них нет.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publ., New York, 1972. [2] S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003. [3] *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge, New York, 2010. [4] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*. Т. 1. *Элементарные функции*, Физматлит, М., 2002. [5] L. Tornheim, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 303–314. [6] L. J. Mordell, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 368–371. [7] I. A. Aliev, *Tornheim-Like Series, Harmonic Numbers and Zeta Values*, 2020, arXiv: 2008.02488. [8] D. Leshchiner, *J. Number Theory*, **13** (1981), 355–362. [9] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Докл. АН*, **482**:5 (2018), 500–503. [10] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Тр. ММО*, **80**, № 2, МЦНМО, М., 2019, 157–177. [11] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **494** (2020), 48–52. [12] В. С. Berndt, *Ramanujan's Notebooks. Part I*, Springer, New York, 1985. [13] D. M. Bradley, *Representations of Catalan's constant*, Unpublished Note, 2001. [14] R. C. Boo, *Amer. Math. Monthly*, **94**:7 (1987), 662–663. [15] P. Flajolet, B. Salvy, *Experiment. Math.*, **7**:1 (1998), 15–35. [16] J. M. Borwein, *Amer. Math. Monthly*, **115**:2 (2008), 125–137. [17] J. M. Borwein, K. Dilcher, *Ramanujan J.*, **45**:2 (2018), 413–432.

К. А. Мирзоев

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило

07.04.2022

Принято к публикации

20.08.2022

Т. А. Сафонова

Северный (Арктический) федеральный университет
имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: t.safonova@narfu.ru