В. А. Михайлец, Распределение конечнократных собственных значений неймановских расширений эллиптического оператора,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 178–179

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.956.227

В. А. МИХАЙЛЕЦ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНОКРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЙМАНОВСКИХ РАСШИРЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА*)

В настоящей работе содержится продвинутый ответ на вопрос, поставленный в обзоре [1]. Анонсируемая теорема усиливает результат работы [2].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с гладкой границей Γ,

$$\mathscr{A}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1}$$

— формально самосопряженное сильно эллиптическое на множестве $\Omega \cup \Gamma$ дифференциальное выражение порядка $2m$ с гладкими коэффициентами. Обозначим через $A_{\min}$ и $A_{\max}$ минимальный и максимальный дифференциальные операторы, отвечающие выражению (1) в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Оба оператора действуют как дифференциальное выражение $\mathscr{A}(x, D)$ соответственно на

$$D(A_{\min}) = \overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(\Omega), \ D(A_{\max}) = \{u \in W_{2,\mathrm{loc}}^{2m}(\Omega) \cap L_2(\Omega) : \mathscr{A}(x, D) u \in L_2(\Omega)\}.$$

Для функций из $D(A_{\max}) \setminus W_2^{2m}(\Omega)$ выражение $\mathscr{A}(x, D) u$ понимается как сумма обобщенных функций.

В силу формальной самосопряженности $\mathscr{A}(x, D)$ минимальный дифференциальный оператор симметричен, а сопряженный к нему оператор совпадает с максимальным. Из сильной эллиптичности дифференциального выражения (1), кроме того, следует, что оператор $A_{\min}$ полуограничен. Его дефектные числа бесконечны. Примем для определенности, что оператор $A_{\min}$ полуограничен снизу и его точная нижняя грань равна μ.

Обозначим через $S(A_{\min})$ класс всех самосопряженных в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ расширений оператора $A_{\min}$, а через $S_\nu(A_{\min})$ — подкласс этого класса, состоящий из операторов, которые полуограничены снизу числом $\nu \leqslant \mu$. Определим для каждого числа $\nu < \mu$ неймановское расширение A_ν оператора $A_{\min}$. Оно вводится [3] как сужение оператора $A_{\max} = A_{\min}^*$ на линеал

$$D(A_\nu) := D(A_{\min}) \dotplus \{u \in D(A_{\max}) : A_{\max} u = \nu u\}.$$

Как показано в [3], каждый из операторов $A_\nu \in S_\nu(A_{\min})$, откуда, в частности, следует непустота класса $S_\nu(A_{\min})$ при $\nu < \mu$ и естественным образом возникает гипотеза о непустоте класса $S_\mu(A_{\min})$.

В [4] предложена конструктивная процедура построения оператора $A_* \in S_\mu(A_{\min})$, названного в последствии фридрихсовым расширением. Неймановские расширения $\{A_\nu, \nu < \mu\}$ наряду с A_* играют особую роль в классе $S(A_{\min})$. Операторы A_ν и A_* являются соответственно минимальным и максимальным элементами в частично упорядоченном отношением $\geqslant$ множестве полуограниченных самосопряженных операторов $S_\nu(A_{\min})$ [5].

Для симметрического дифференциального оператора $A_{\min}$ фридрихсово расширение A_* порождается однородными граничными условиями Дирихле. Его область определения $D(A_*) = W_2^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ не зависит от коэффициентов эллиптического дифференциального выражения. Спектральные свойства дифференциального оператора A_* изучены сравнительно полно. Его спектр дискретен, собственные значения имеют конечную кратность, а функция их распределения (с учетом кратностей) $N(\lambda; A_*) := \operatorname{card}\{n : \lambda_n(A_*) \in [-\lambda, \lambda]\}$ удовлетворяет доказанной в [6] и известной ранее как предположение асимптотической формуле

$$N(\lambda; A_*) = \bar{w}\lambda^{n/2m} + O(\lambda^{(n-1)/2m}), \ \lambda \to \infty, \tag{2}$$

где постоянная $\bar{w} = \bar{w}(\mathscr{A}, \Omega) > 0$ определяется стандартным образом, римановым объемом области (см., например, [6]). При этом оценка остатка в формуле (2) является наилучшей. Символ O в ней нельзя заменить o.

*) Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований ГКНПТ Украины, проект 1/238.

В обзоре [1] поставлен вопрос об асимптотическом распределении собственных значений дифференциального оператора A_ν, отличных от ν. Наличие у оператора A_ν предельного спектра существенно осложняет дело. Тем не менее удалось показать [2], что для функции $N_\nu(\lambda; A_\nu):=\mathrm{card}\{n:\lambda_n(A_\nu)\in[-\lambda,\lambda]\setminus\{\nu\}\}$ при любом $\varepsilon>0$ выполняется асимптотическое соотношение

$$N_\nu(\lambda; A_\nu)=w\lambda^{n/2m}+O(\lambda^{(n-\theta)/2m}),\quad \lambda\to\infty, \tag{3}$$

где постоянная w такая же, как у оператора задачи Дирихле, а число

$$\theta=\max\{1/2-\varepsilon, 2m/(2m+n-1)\}\in(0,1).$$

Остаточный член в формуле (3) допускает значительное уточнение.

Теорема. *Асимптотическая формула (3) верна при любом* $\theta<1$.

Доказательство теоремы использует ряд утверждений работы [7].

По-видимому, в формуле (3) можно положить $\theta=1$. Соответствующая оценка остаточного члена сверху имеется.

Литература

1. Alonso A., Simon B. // J. Operator Theory. 1980. Vol. 4. P. 251—270.
2. Grubb G. // J. Operator Theory. 1983. Vol. 10. P. 9—20.
3. Neumann J. // Math Ann. 1929. Vol. 102. P. 49—131.
4. Friedrichs K. // Math. Ann. 1934. Vol. 109. P. 465—487.
5. Крейн М. Г. // Мат. сб. 1947. Т. 20, № 3. С. 431—495.
6. Васильев Д. Г. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1986. Т. 49. С. 167—237.
7. Михайлец В. А. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 5. С. 1059—1062.

Институт математики АН Украины

Поступила в редакцию 18 марта 1993 г.

Технический редактор Т. В. Летьен

Сдано в набор 19.10.93. Подписано в печать 15.02.94. Формат 70×108¹/₁₆. Бум. тип. № 1. Офсетная печать. Усл. печ. л. 16,10. Усл. кр.-отт. 16,62. Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 541 экз. Зак. № 996. Цена на территории Республики Беларусь 310 р. (инд.), 510 р. (вед.).

Издательство «Навука і тэхніка» Академии наук Беларуси и Министерства информации Республики Беларусь. 220141. Минск, Жодинская, 18. ЛВ № 437. Типография им. Франциска Скорины издательства «Навука і тэхніка». 220141. Минск, Жодинская, 18.