Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. Ю. Черухин, О сложности реализации линейной функции формулами в конечных булевых базисах, *Дискрет. матем.*, 2000, том 12, выпуск 1, 135–144

DOI: 10.4213/dm313

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
25 марта 2025 г., 21:08:19

Дискретная математика

том 12 выпуск 1 * 2000

УДК 519.6

О сложности реализации линейной функции формулами в конечных булевых базисах

© 2000 г. Д.Ю. Черухин

В работе полностью описано множество базисов, сложность реализации в которых функции $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ по порядку равна n. Для всех базисов, не принадлежащих этому множеству, получена нижняя оценка сложности реализации функции $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, имеющая вид n^c, где $c > 1$ и c не зависит от n. Опираясь на полученную оценку сложности, дано более простое доказательство существования бесконечной цепи улучшающихся булевых базисов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99–01–01175, и ФЦП «Интеграция», проект 473.

Базисом назовем произвольную конечную полную систему булевых функций. Пусть B — базис. Формулами (в базисе B) называются следующие выражения и только они:

(1) χ, где χ — константа (0 или 1) и $\chi \in B$;

(2) $f(F_1, \ldots, F_n)$, где f — n-местная булева функция, $f \in B$, каждое из выражений $F_1, \ldots, F_n$ — либо ранее построенная формула в базисе B, либо переменная из фиксированного счетного множества $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Сложностью $L(F)$ формулы F назовем число вхождений в F символов переменных. Сложностью $L_B(f)$ булевой функции f в базисе B назовем минимальную из сложностей формул в базисе B, реализующих функцию f. Базис B_1 предшествует базису B_2 ($B_1 \preccurlyeq B_2$), если существуют такие константы C и D, что для любой булевой функции f выполнено неравенство $L_{B_1}(f) \leqslant CL_{B_2}(f) + D$. Базис B_1 строго предшествует базису B_2 ($B_1 \prec B_2$), если $B_1 \preccurlyeq B_2$ и $B_2 \not\preccurlyeq B_1$.

Пусть

$$\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n, \qquad B_0 = \{\&, \vee, \neg\}.$$

Напомним, что $f(n) \preceq g(n)$ ($g(n) \succeq f(n)$) обозначает, что для некоторой константы C $\overline{\lim}_{n\to\infty} f(n)/g(n) \leqslant C$, и $f(n) \asymp g(n)$ обозначает, что $f(n) \preceq g(n)$ и $g(n) \preceq f(n)$. Известно [9, 6], что

$$L_{B_0}(\Lambda_n) \asymp n^2.$$

Для любого базиса B, в силу соотношения $B \preccurlyeq B_0$ (см. [5]),

$$L_B(\Lambda_n) \preceq n^2.$$

Б.А. Мучник для достаточно широкого множества базисов B доказала [1] нижнюю оценку
$$L_B(\Lambda_n) \succeq n^{3(k-1)/(3k-4)},$$
где k — порядок базиса B, т. е. наибольшее число аргументов у функций из B.

Функция f от n аргументов называется монотонной по переменной x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, если либо для всех наборов констант $(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)$ выполняется неравенство
$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \dots, c_n) \leqslant f(c_1, \dots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \dots, c_n),$$
либо для всех наборов констант $(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)$ выполняется неравенство
$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \dots, c_n) \geqslant f(c_1, \dots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \dots, c_n).$$
Функция называется обобщенно-монотонной, если она монотонна по всем своим переменным, то есть по некоторому множеству переменных возрастает, по остальным переменным убывает. Базис называется обобщенно-монотонным, если все входящие в него функции являются обобщенно-монотонными.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если B — обобщенно-монотонный базис, то*
$$L_B(\Lambda_n) \succeq n^{3(k-1)/(3k-4)},$$
где k — порядок базиса B.

Если же базис B не является обобщенно-монотонным, то
$$L_B(\Lambda_n) \asymp n.$$

Следствием теоремы 1 является один результат о сравнении булевых базисов. Основные результаты о сравнении базисов содержатся в [3, 5, 7, 8]. В частности, автор доказал [7] цепочку соотношений $\ldots \prec P_2(3) \prec P_2(2)$, где $P_2(n)$ — базис, состоящий из всех n-местных функций. В настоящей статье дано более простое доказательство цепочки соотношений $\ldots \prec B_2 \prec B_1$ для некоторой другой последовательности базисов $B_1, B_2, \ldots$

Введем некоторые понятия и обозначения. Пусть f — булева функция, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ — все переменные, от которых f зависит существенно, $i_1 < \ldots < i_n$. Через $\langle f \rangle$ обозначим функцию n аргументов, полученную из f заменой переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ на переменные $x_1, \dots, x_n$ соответственно. Функция $\langle f \rangle$ существенно зависит от всех своих аргументов.

Пусть f — функция n аргументов, x_i — переменная, $1 \leqslant i \leqslant n$, σ — константа. Введем обозначение
$$f|_{\{x_i=\sigma\}}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \dots, x_n).$$
Функция $f|_{\{x_i=\sigma\}}$ существенно не зависит от i-го аргумента. Пусть $y_1, \dots, y_k$ — попарно различные переменные, $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ — константы. Положим
$$f|_{\{y_1=\sigma_1, \dots, y_k=\sigma_k\}} = (\dots(f|_{\{y_1=\sigma_1\}})\dots)|_{\{y_k=\sigma_k\}}. \tag{1}$$

Пусть B — базис. Обозначим через $[B]$ множество, состоящее из всевозможных функций вида $\langle g \rangle$, где либо $g \in B$, либо g — функция вида (1) и $f \in B$. Множество $[B]$ является базисом. Базис B называется нормальным, если $[B] = B$. Очевидно, что $[[B]] = [B]$, поэтому базис $[B]$ является нормальным.

Пусть F_1 и F_2 — произвольные формулы. Посредством $F_1 \equiv F_2$ будем обозначать тождественное равенство формул F_1 и F_2, а посредством $F_1 \risingdotseq F_2$ обозначим графическое равенство формул F_1 и F_2, то есть посимвольное их совпадение.

Пусть F — формула, x_i — переменная, σ — константа. Обозначим через $F|_{\{x_i=\sigma\}}$ формулу, полученную из F заменой каждого вхождения переменной x_i константой σ. Если B — нормальный базис и F — формула в B, то формула $F|_{\{x_i=\sigma\}}$ также является формулой в B (нормальный базис содержит обе константы). Обозначим через $L_{x_i}(F)$ число вхождений переменной x_i в формулу F. Индуктивно определим множество подформул формулы F:

(1) если $F \risingdotseq \chi$, где χ — константа, то единственной подформулой формулы F является F;

(2) если $F \risingdotseq f(F_1, \ldots, F_n)$, где f — функция и каждое из выражений $F_1, \ldots, F_n$ — либо формула, либо переменная, то подформулами формулы F являются F и подформулы тех из выражений $F_1, \ldots, F_n$, которые являются формулами.

Введем вспомогательную меру сложности формулы F, вес формулы F, который будем обозначать $P(F)$. Вначале определим веса функций. Пусть f — функция n аргументов. Если $n \leqslant 1$, то вес функции f положим равным нулю, а если $n \geqslant 2$, то вес функции f положим равным $(n-2)/2$. Пусть $M(F)$ — сумма весов функций, взятая по всем их вхождениям в формулу F. Положим

$$P(F) = L(F) + M(F).$$

Для произвольной функции f и базиса B обозначим через $P_B(f)$ минимальный из весов формул в базисе B, реализующих функцию f. Формула F в базисе B называется минимальной (по весу), если $P(F) = P_B(f)$, где f — функция, реализуемая формулой F.

Функционалы L и P доопределим на множестве переменных, положив $L(x_i) = P(x_i) = 1$.

Лемма 1. *Пусть B — базис порядка k, F — формула в B, не содержащая констант. Тогда*

$$L(F) \geqslant \frac{2(k-1)}{3k-4} P(F).$$

Доказательство. Индукцией по числу функциональных символов в F, для каждого выражения F, являющегося либо формулой в B, не содержащей констант, либо переменной, докажем неравенство

$$L(F) \geqslant \frac{2(k-1)}{3k-4} P(F) + \frac{k-2}{3k-4}. \tag{2}$$

Тем самым, лемма будет доказана.

В качестве базиса индукции возьмем случай, когда F — переменная. Тогда

$$L(F) = 1 = \frac{2(k-1)}{3k-4} + \frac{k-2}{3k-4} = \frac{2(k-1)}{3k-4} P(F) + \frac{k-2}{3k-4}.$$

Проведем индуктивный переход. Пусть $F = f(F_1, \dots, F_n)$, где f — функция, каждое из выражений $F_1, \dots, F_n$ — либо формула в B, не содержащая констант, либо переменная. По предположению индукции

$$L(F_i) \geqslant \frac{2(k-1)}{3k-4}P(F_i) + \frac{k-2}{3k-4}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Если $n = 1$, то $L(F) = L(F_1)$ и $P(F) = P(F_1)$, поэтому из (3) следует (2). Пусть теперь $n \geqslant 2$. Тогда

$$L(F) = \sum_{i=1}^{n} L(F_i), \qquad P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F_i) + \frac{n-2}{2}.$$

Отсюда, используя (3), получим, что

$$\begin{aligned} L(F) &= \sum_{i=1}^{n} L(F_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2(k-1)}{3k-4}P(F_i) + \frac{k-2}{3k-4} \right) \\ &= \frac{2(k-1)}{3k-4} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) + \frac{n(k-2)}{3k-4} \\ &= \frac{2(k-1)}{3k-4} \left(\sum_{i=1}^{n} P(F_i) + \frac{n-2}{2} \right) - \frac{(n-2)(k-1)}{3k-4} + \frac{n(k-2)}{3k-4} \\ &= \frac{2(k-1)}{3k-4}P(F) + \frac{-nk+n+2k-2+nk-2n}{3k-4} \\ &= \frac{2(k-1)}{3k-4}P(F) + \frac{2k-n-2}{3k-4} \geqslant \frac{2(k-1)}{3k-4}P(F) + \frac{k-2}{3k-4}. \end{aligned}$$

Заметим, что при выводе последнего неравенства используется то, что $n \leqslant k$. Тем самым, неравенство (2) проверено. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть B — нормальный обобщенно-монотонный базис, F — минимальная (по весу) формула в B, не содержащая констант, $L(F) \geqslant 2$ и x_i — переменная. Тогда существует такая константа σ и такая формула F' в базисе B, что $F' \equiv F|_{\{x_i=\sigma\}}$ и*

$$P(F') \leqslant P(F) - \frac{3}{2}L_{x_i}(F).$$

Доказательство. Обозначим через $x_{i,1}, \dots, x_{i,m}$ все различные вхождения переменной x_i в формулу F (здесь $m = L_{x_i}(F)$). Пусть $x_{i,j}$ — произвольное вхождение. Расширением вхождения $x_{i,j}$ назовем наименьшую по включению формулу среди всех подформул формулы F, содержащих вхождение $x_{i,j}$ и имеющих сложность, не меньшую двух (расширение существует, так как $L(F) \geqslant 2$). Вхождения $x_{i,j}$ и $x_{i,k}$ называются смежными, если их расширения совпадают. Отношение смежности вхождений является эквивалентностью, поэтому множество $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,m}\}$ разбивается на классы смежности. Расширением класса смежности называется расширение любого из его элементов.

Пусть K — произвольный класс смежности. Расширение класса K обозначим через G_K. Представим формулу G_K в виде

$$G_K = g_K(G_K^1, \dots, G_K^{s(K)}),$$

где $g_K \in B$, каждое из выражений $G_K^1, \ldots, G_K^{s(K)}$ — либо формула в B, не содержащая констант, либо переменная. Не ограничивая общности, будем считать, что выражения $G_K^1, \ldots, G_K^{t(K)}$ содержат вхождения из класса K, а $G_K^{t(K)+1}, \ldots, G_K^{s(K)}$ таковых не содержат. Тогда $L(G_K^1) = \ldots = L(G_K^{t(K)}) = 1$, следовательно, $t(K) = |K|$.

Пусть τ — произвольная константа. Обозначим через $G_{K,\tau}$ формулу, полученную из G_K заменой каждого вхождения из класса K константой τ. Определим формулу $H_{K,\tau}$ в базисе B так, чтобы выполнялись следующие условия А и В:

(A) $H_{K,\tau} \equiv G_{K,\tau}$,

(B) Для любого класса смежности K, отличного от K, если формула $G_{K'}$ является подформулой формулы G_K, то формула $G_{K'}$ является подформулой формулы $H_{K,\tau}$.

Выражение G_K^j, $1 \leqslant j \leqslant t(K)$, содержит только функции одного аргумента, поэтому существует такая константа c_j, что

$$G_K^j \equiv x_i \oplus c_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant t(K).$$

Заметим, что $s(K) > t(K)$. Действительно, если $s(K) = t(K)$, то формула G_K содержит вхождения только переменной x_i, следовательно, G_K реализует одну из функций $0, 1, x_i, \bar{x}_i$. В то же время $L(G_K) \geqslant 2$, поэтому формула G_K не минимальна, а значит, и F не минимальна. Получаем противоречие. Введем обозначения

$$g_{K,\tau} = \langle g_K|_{\{x_1=c_1\oplus\tau,\ldots,x_{t(K)}=c_{t(K)}\oplus\tau\}}\rangle, \qquad G'_{K,\tau} = g_{K,\tau}(G_K^{t(K)+1}, \ldots, G_K^{s(K)}).$$

Формула $G'_{K,\tau}$ является формулой в базисе B и $G'_{K,\tau} \equiv G_{K,\tau}$. Пусть K' — произвольный класс смежности, отличный от K и такой, что формула $G_{K'}$ является подформулой формулы G_K. Тогда $G_{K'}$ является подформулой одного из выражений $G_K^{t(K)+1}, \ldots, G_K^{s(K)}$, следовательно, $G_{K'}$ является подформулой формулы $G'_{K,\tau}$. Таким образом, если положить $H_{K,\tau} = G'_{K,\tau}$, то условия А и В будут выполнены.

Если $s(K) - t(K) \geqslant 2$, то положим $H_{K,\tau} = G'_{K,\tau}$. Рассмотрим теперь случай, когда $s(K) - t(K) = 1$. Пусть

$$\varphi(x_1, x_2) = g_K(x_1 \oplus c_1, \ldots, x_1 \oplus c_{t(K)}, x_2).$$

Функция φ существенно зависит от двух своих аргументов (в противном случае формула G_K была бы не минимальной). Если функция φ линейна, то она не монотонна по переменной x_2, а тогда функция g_K не монотонна по последнему аргументу, что противоречит условию леммы, так как $g_K \in B$. Таким образом, функция φ нелинейна, следовательно, существуют такие константы θ и χ, что $\varphi(\theta, x_2) \equiv \chi$. Константу θ назовем забивающим значением класса K. Если $\tau = \theta$, то положим $H_{K,\tau} = \chi$, а в противном случае положим $H_{K,\tau} = G'_{K,\tau}$. Проверим, что в случае $\tau = \theta$ условия А и В также выполнены. Действительно,

$$G_{K,\theta} \equiv \varphi(\theta, G_K^{s(K)}) \equiv \chi,$$

то есть условие А выполнено. В то же время

$$G_K \equiv \varphi(x_i, G_K^{s(K)}) \equiv \varphi(x_i, G_K^{s(K)}|_{\{x_i=\theta\oplus1\}}) \equiv g_K(G_K^1, \ldots, G_K^{t(K)}, G_K^{s(K)}|_{\{x_i=\theta\oplus1\}}),$$

поэтому, в силу минимальности, формула G_K не содержит вхождений переменной x_i из других классов, а значит, условие B выполнено.

Выпишем все классы смежности $K_1, \dots, K_r$ в таком порядке, чтобы для любых j, l, $1 \leqslant j < l \leqslant r$, расширение класса K_j не было подформулой расширения класса K_l. Построим теперь последовательность формул $F = F_0^\tau, F_1^\tau, \dots, F_r^\tau$. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant r$, в качестве F_j возьмем формулу, полученную из F_{j-1} заменой подформулы G_{K_j} на подформулу $H_{K_j,\tau}$. Тогда, в силу условия A, процедура построения корректна, а в силу условия B справедливо равенство $F_r^\tau \equiv F|_{\{x_i=\tau\}}$.

Выберем теперь константу σ. Для каждой константы τ обозначим через $W(\tau)$ множество, состоящее из всех таких классов смежности K, что $s(K) - t(K) = 1$ и забивающее значение класса K равно τ. Через $W(2)$ обозначим множество, состоящее из всех классов смежности K, для которых $s(K) - t(K) \geqslant 2$. Если $|W(0)| \geqslant |W(1)|$, то положим $\sigma = 0$, в противном случае положим $\sigma = 1$. В любом случае

$$|W(\sigma)| \geqslant |W(\bar{\sigma})|. \tag{4}$$

Положим $F' = F_r^\sigma$. Тогда $F' \equiv F|_{\{x_i=\sigma\}}$. Оценим разность $P(F) - P(F')$. Очевидно, что

$$P(F) - P(F') = \sum_{j=1}^{r} (P(G_{K_j}) - P(H_{K_j,\sigma})). \tag{5}$$

Рассмотрим произвольный класс смежности K. В силу того, что $s(K) \geqslant 2$, справедливо равенство

$$P(G_K) = \frac{s(K) - 2}{2} + t(K) + \sum_{j=t(K)+1}^{s(K)} P(G_K^j). \tag{6}$$

Если $K \in W(2)$ то, используя (6), получим, что

$$\begin{aligned} P(H_{K,\sigma}) = P(G'_{K,\sigma}) &= \frac{s(K) - t(K) - 2}{2} + \sum_{j=t(K)+1}^{s(K)} P(G_K^j) \\ &= P(G_K) - \frac{3}{2}t(K) = P(G_K) - \frac{3}{2}|K|. \end{aligned} \tag{7}$$

Если $K \in W(\sigma)$ то, используя (6), получим, что

$$\begin{aligned} P(H_{K,\sigma}) = 0 &= P(G_K) - \frac{s(K) - 2}{2} - t(K) - P(G_K^{s(K)}) \\ &\leqslant P(G_K) - \frac{s(K) - 2}{2} - t(K) - 1 = P(G_K) - \frac{3}{2}|K| - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Если же $K \in W(\bar{\sigma})$, то

$$\begin{aligned} P(H_{K,\sigma}) &= P(G'_{K,\sigma}) = P(G_K^{s(K)}) \\ &= P(G_K) - \frac{s(K) - 2}{2} - t(K) = P(G_K) - \frac{3}{2}|K| + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Наконец, из (5), (7), (8), (9) и (4) следует, что

$$
\begin{aligned}
P(F) - P(F') &= \sum_{j=1}^{r} (P(G_{K_j}) - P(H_{K_j,\sigma})) \\
&\geqslant \sum_{K \in W(2)} \frac{3}{2}|K| + \sum_{K \in W(\sigma)} \left(\frac{3}{2}|K| + \frac{1}{2}\right) + \sum_{K \in W(\bar{\sigma})} \left(\frac{3}{2}|K| - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{r} |K_j| + \frac{1}{2}(|W(\sigma)| - |W(\bar{\sigma})|) \geqslant \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{r} |K_j| = \frac{3}{2}L_{x_i}(F).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$P(F') \leqslant P(F) - \frac{3}{2}L_{x_i}(F).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть B — нормальный обобщенно-монотонный базис порядка k, функция f существенно зависит от n аргументов и $n \geqslant 2$. Тогда существует такая переменная x_i и константа σ, что*

$$P_B(f) \geqslant \frac{P_B(f|_{\{x_i=\sigma\}})}{1 - 3(k-1)/((3k-4)n)}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть G — минимальная (по весу) формула в базисе B, реализующая функцию f. Последовательно исключим из G все константы, заменив каждую подформулу вида

$$g(G_1, \ldots, G_{j-1}, c, G_{j+1}, \ldots, G_m),$$

где c — константа, подформулой

$$h(G_1, \ldots, G_{j-1}, G_{j+1}, \ldots, G_m)$$

(h при $m = 1$), где $h = \langle g|_{\{x_j=c\}} \rangle$. Полученную формулу обозначим через F. Тогда F — формула в B, $F \equiv G$ и $P(F) = P(G)$. В силу того, что $n \geqslant 2$, справедливо неравенство $L(F) \geqslant 2$. Применив к F лемму 1, получим, что

$$L(F) \geqslant \frac{2(k-1)}{3k-4} P(F). \tag{11}$$

В качестве x_i возьмем переменную, входящую в формулу F наибольшее число раз. В силу минимальности, формула F содержит только существенные переменные функции f, поэтому

$$L_{x_i}(F) \geqslant \frac{L(F)}{n}. \tag{12}$$

В силу леммы 2, существует такая константа σ и формула F' в базисе B, что

$$F' \equiv F|_{\{x_i=\sigma\}}, \qquad P(F') \leqslant P(F) - \frac{3}{2}L_{x_i}(F).$$

Отсюда, из (11) и (12) следует, что

$$P_B(f|_{\{x_i=\sigma\}}) \leqslant P(F') \leqslant P(F) - \frac{3}{2}L_{x_i}(F) \leqslant P(F) - \frac{3L(F)}{2n}$$
$$\leqslant P(F)\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2(k-1)}{(3k-4)n}\right) = P_B(f)\left(1 - \frac{3(k-1)}{(3k-4)n}\right).$$

Отсюда непосредственно следует (10). Лемма 3 доказана.

Теорема 2. *Пусть B — обобщенно-монотонный базис порядка k. Тогда*

$$L_B(\Lambda_n) \succeq n^{3(k-1)/(3k-4)}.$$

Доказательство. Введем обозначение $C_k = 3(k-1)/(3k-4)$. Рассмотрим нормальный базис $[B]$. Он также является обобщенно-монотонным и его порядок не больше, чем k. Не ограничивая общности, будем считать, что порядок базиса $[B]$ равен k. Применив $n-1$ раз лемму 3, получим, что существуют такие попарно различные переменные $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, что

$$P_{[B]}(\Lambda_n) \geqslant P_{[B]}(\Lambda_n|_{\{y_1=\sigma_1,\ldots,y_{n-1}=\sigma_{n-1}\}}) \prod_{m=2}^{n} \frac{1}{1-C_k/m} = \prod_{m=2}^{n} \frac{1}{1-C_k/m}$$
$$\geqslant \prod_{m=2}^{n} \frac{1}{\exp\{-C_k/m\}} = \exp\left\{C_k \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m}\right\} \asymp \exp\{C_k \ln n\} = n^{C_k}. \qquad (13)$$

Заметим, что для любой функции f справедливо неравенство $L_B(f) \geqslant L_{[B]}(f)$ и в силу леммы 1

$$L_{[B]}(f) \geqslant \frac{2(k-1)}{3k-4} P_{[B]}(f).$$

Отсюда и из (13) следует утверждение теоремы.

Теорема 3. *Пусть B — не обобщенно-монотонный базис. Тогда*

$$L_B(\Lambda_n) \asymp n.$$

Доказательство. Пусть функция f, $f \in B$, не обобщенно-монотонна. Не ограничивая общности, будем считать, что f не монотонна по первому аргументу. Тогда существуют такие наборы констант $(\sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ и $(\tau_2, \ldots, \tau_m)$, что

$$f(0, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) < f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m),$$
$$f(0, \tau_2, \ldots, \tau_m) > f(1, \tau_2, \ldots, \tau_m).$$

Пусть

$$g_k(x) = \sigma_k \bar{x} \vee \tau_k x, \qquad 2 \leqslant k \leqslant m.$$

Тогда

$$f(x_1, g_2(x_2), \ldots, g_m(x_2)) \equiv x_1 \oplus x_2,$$

следовательно,

$$f(\ldots(f(x_1, g_2(x_2), \ldots, g_m(x_2))\ldots), g_2(x_n), \ldots, g_m(x_n)) \equiv \Lambda_n(x_1, \ldots, x_n). \qquad (14)$$

Положим $C = \max\{L_B(0), L_B(1), L_B(\bar{x}_1)\}$. Тогда $L_B(g_k) \leqslant C$, $2 \leqslant k \leqslant m$. Отсюда, в силу представления (14), следует, что $L_B(\Lambda_n) \leqslant C(m-1)n$. Очевидно, что $L_B(\Lambda_n) \geqslant n$. Таким образом, $L_B(\Lambda_n) \asymp n$. Теорема 3 доказана.

Теорема 1 непосредственно следует из теорем 2 и 3.

Теорема 4. *Существует бесконечная последовательность базисов* $B_1, B_2, \dots$ *и бесконечная последовательность положительных чисел* $c_1, c_2, \dots$, *для которых выполнены соотношения*

$$\frac{L_{B_m}(\Lambda_n)}{L_{B_{m+1}}(\Lambda_n)} \succeq n^{c_m}, \qquad m = 1, 2, \dots, \tag{15}$$

и

$$B_{m+1} \prec B_m, \qquad m = 1, 2, \dots \tag{16}$$

Доказательство. Для каждого натурального k, $k \geqslant 2$, определим функцию f_k, положив

$$f_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{2k}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_1 + \dots + \sigma_{2k} < k, \\ \sigma_1 \oplus \sigma_3 \oplus \dots \oplus \sigma_{2k-1}, & \text{если } \sigma_1 + \dots + \sigma_{2k} = k, \\ 1, & \text{если } \sigma_1 + \dots + \sigma_{2k} > k. \end{cases}$$

Функция f_k монотонна и

$$f_k(x_1, \bar{x}_1, \dots, x_k, \bar{x}_k) \equiv x_1 \oplus \dots \oplus x_k. \tag{17}$$

Исходя из тождества (17), индукцией по s можно построить такую формулу F_k^s в базисе $B_0 \cup \{f_k\}$, что F_k^s реализует функцию Λ_{k^s} и $L(F_k^s) = (2k)^s$. Отсюда несложно вывести, что

$$L_{B_0 \cup \{f_k\}}(\Lambda_n) \preceq n^{\log_k 2k}. \tag{18}$$

В то же время, согласно теореме 1,

$$L_{B_0 \cup \{f_k\}}(\Lambda_n) \succeq n^{3(2k-1)/(6k-4)}. \tag{19}$$

Выберем последовательность чисел $k_1, k_2, \dots$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\log_{k_{m+1}} 2k_{m+1} < \frac{3(2k_m - 1)}{6k_m - 4}, \qquad m = 1, 2, \dots$$

(например, можно выбрать $k_1 = 2$, $k_{m+1} = 2^{6k_m}$, $m = 2, 3, \dots$). Положим

$$B_m = B_0 \cup \{f_{k_m}\}, \quad c_m = \frac{3(2k_m - 1)}{6k_m - 4} - \log_{k_{m+1}} 2k_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда из (18) и (19) следует (15). Из тождеств

$$f_{k+1}(x_1, \dots, x_{2k}, 0, 1) \equiv f_k(x_1, \dots, x_{2k}), \qquad k = 1, 2, \dots$$

следует, что

$$B_{m+1} \preccurlyeq B_m, \qquad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из (15) следует (16). Теорема 4 доказана.

Заметим, что все приведенные результаты относятся также и к функциям $x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$.

После того, как данная работа была написана, автору стало известно о существовании работы [2], содержащей утверждение, равносильное теореме 1.

Автор благодарен своему научному руководителю О.Б. Лупанову за постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Мучник Б.А., Оценка сложности реализации линейной функции формулами в некоторых базисах. *Кибернетика* (1970) №4, 29–38.

2. Перязев Н.А., Сложность представлений булевых функций формулами в немонолинейных базисах. *Дискретная математика и информатика*. Иркутский университет, Иркутск, 1995.

3. Стеценко В.А., О предплохих базисах в P_2. *Математические вопросы кибернетики* (1992) **4**, 139–177.

4. Субботовская Б.А., О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee$, &, $^-$. *Докл. АН СССР* (1961) **136**, №3, 553–555.

5. Субботовская Б.А., О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами. *Докл. АН СССР* (1963) **149**, №4, 784–787.

6. Храпченко В.М., О сложности реализации линейной функции в классе П-схем. *Матем. заметки* (1971) **9**, №1, 35–40.

7. Черухин Д.Ю., Об одной бесконечной последовательности улучшающихся булевых базисов. *Дискретный анализ и исследование операций* (1997) **4**, №4, 79–95.

8. Черухин Д.Ю., О предплохих булевых базисах. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 118–160.

9. Яблонский С.В., Реализация линейной функции в классе П-схем. *Докл. АН СССР* (1954) **94**, №5, 805–806.

Статья поступила 16.11.1999.