



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Глушкин, Отклонение гауссова вектора от подпространства и случайные подпространства l_∞^N , *Алгебра и анализ*, 1989, том 1, выпуск 5, 103–114

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

23 марта 2025 г., 07:59:54



Е. Д. Глускин

ОТКЛОНЕНИЕ ГАУССОВА ВЕКТОРА ОТ ПОДПРОСТРАНСТВА И СЛУЧАЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА l_{∞}^N

Пусть X — выбранное случайным образом n -мерное подпространство l_{∞}^N . Вычислен порядок математического ожидания асферичности этого пространства:

$$Ed(X, l_{\infty}^N) \asymp \max \left\{ 1, \sqrt{n / \log (1N/n)} \right\}.$$

Этот результат показывает, что среди всех n -мерных подпространств l_{∞}^N подпространство, выбранное случайно, обладает минимальной по порядку асферичностью. Полученная оценка распространяет на всю область изменения величины n , $1 \leq n \leq N$, один результат Б. С. Кашина. Для решения этой задачи получена оценка вероятности больших уклонений для отклонения в равномерной метрике N -мерного гауссова вектора от произвольного n -мерного подпространства l_{∞}^N .

Начиная с середины 70-х годов специалистов по геометрии банаховых пространств стали привлекать подпространства l_{∞}^N большой размерности (т. е. подпространства, размерность которых значительно больше, чем $\log N$). В двойственных терминах речь идет о конечномерных пространствах, единичный шар которых — многогранник с не слишком большим числом вершин. Фигель и Джонсон в работе [1] изучали, в частности, асферичность таких пространств. Отвечая на сформулированный ими вопрос, Б. С. Кашин [2] вычислил точный порядок асферичности типичного (в смысле меры Хаара на многообразии Грассмана $G_{n, N}$) n -мерного подпространства l_{∞}^N при $n < N^{\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$). Ниже (следствие 1) этот результат распространен на всю область изменения n , $1 \leq n \leq N$. В работах Бургейна, Линденштраусса, Мишмана ([3], следствие 9.5), Карла, Пажора ([4], теорема 4.3) и автора ([5], следствие 3 (двойственный вариант)), появившихся независимо и практически одновременно, исследовано, на сколько малой по порядку может быть асферичность n -мерного подпространства l_{∞}^N . Как показывает след-

Ключевые слова: конечномерные нормированные пространства, дистанция Банаха-Мазура, гауссов вектор, выпуклые многогранники.

стве 1 ниже (оно анонсировано в [5]) эта минимальная по порядку асферичность достигается на типичном n -мерном подпространстве l_∞^N . Для получения этого результата исследуется (теорема 2), насколько „тощим“ является типичный многогранник с заданным числом вершин (если его вершины – независимые гауссовы векторы).

В работах автора [6], Шарка [7], Бургейна [8], Манкевича [9] и др. случайные подпространства l_∞^N большой размерности (точнее, сопряженные к ним) использовались для построения примеров конечномерных пространств, в которых множество операторов, ограниченных по норме некоторой константой, довольно бедно. Однако уже в [6] со ссылкой на один результат Фигеля и Джонсона отмечалось, что если $N \ll n^2$, то в таком пространстве обязательно найдется нетривиальный проектор. Ниже (теорема 3) показано, что простое увеличение числа N не позволяет избавиться от нетривиальных проекторов.

Ниже $[1:N]$ – множество натуральных чисел, не превосходящих N . Для конечного множества A через $\text{card } A$ или $|A|$ обозначаем число элементов множества A . $\{e_i^N\}_{i=1}^N$ или просто $\{e_i\}$ – стандартный базис пространства \mathbb{R}^N . $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^N . Как обычно, l_p^N – пространство \mathbb{R}^N , снабженное нормой $\|\cdot\|_{l_p^N}$. $\|x\|_{l_p^N} = (\sum_{1 \leq i \leq N} |x_i|^p)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$; $\|x\|_{l_\infty^N} = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$ ($x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$). Для $A \subset [1:N]$ через l_p^A обозначим подпространство пространства l_p^N , порожденное элементами $\{e_i\}_{i \in A}$. B_p^A (соотв. B_p^A) – единичный шар пространства l_p^A (соотв. l_p^A). P_A – ортопроектор в l_2^N на подпространство l_2^A . Для оператора T , действующего в l_2^A ,

$$\sigma_2(T) = \left(\sum_{i,j \in A} |\langle Te_i, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

– норма Гильберта–Шмидта этого оператора.

$G_{n,N}$ – многообразие Грассмана всех n -мерных подпространств пространства \mathbb{R}^N ; $\mu_{n,N}$ – нормированная унитарно инвариантная мера на $G_{n,N}$.

Пусть $L \subset X$ – линейное подпространство банахова пространства X . Для $x \in X$ через $\rho_X(x, L)$ обозначим расстояние от x до L , т. е. $\rho_X(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$.

Пусть B – выпуклое центрально-симметричное подмножество пространства \mathbb{R}^N . Через X_B обозначаем n -мерное банахово пространство, единичный шар которого – множество B .

ϵ -сетью подмножества $W \subset X$ банахова пространства X называется множество $\mathcal{F}_\epsilon(W) \subset W$ такое, что для любого $w \in W$ найдется $u \in \mathcal{F}_\epsilon(w)$ такое, что $\|w - u\| \leq \epsilon$. Хорошо известно (см., например, [10]), что для любого подмножества W единичного шара n -мерного банахова пространства и любого $\epsilon > 0$ найдется ϵ -сеть $\mathcal{F}_\epsilon(W)$ такая, что $|\mathcal{F}_\epsilon(W)| \leq (1 + 2/\epsilon)^n$.

Как обычно, символы P и E обозначают вероятность и математическое ожидание соответственно.

Стандартный N -мерный гауссов вектор (или просто гауссов вектор) – это случайный вектор (g_1, \dots, g_N) , все координаты которого – независимые гауссовы

величины с единичной дисперсией. Распределение N -мерного гауссова вектора будем обозначать γ_N . Таким образом, γ_N — это абсолютно непрерывная по мере Лебега в \mathbb{R}^N мера с плотностью

$$(2\pi)^{-N/2} \exp(-\|x\|_{l_2^N}/2).$$

Пусть $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$ — липшицева функция с $\|F\|_{Lip} \leq \delta$ (т. е. $|F(x) - F(y)| \leq \delta \|x - y\|_{l_2^N}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$). Нам понадобится следующая оценка больших уклонений случайной величины $F(\bar{g})$, где \bar{g} — N -мерный гауссов вектор, от ее математического ожидания: для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\gamma_N\{\bar{g} \in \mathbb{R}^N : F(\bar{g}) - EF > \lambda\} \leq \exp(-2\lambda^2/\pi^2 \delta^2). \quad (1)$$

Эта оценка очень элегантно доказана Морэ и Пизье (см. [11] или [12], с. 140). Отметим, что, с точностью до фигурирующих в ней констант, она вытекает из более ранних результатов об экстремальных свойствах полупространств для сферически инвариантных мер, полученных В. Н. Судаковым и Б. С. Цирельсоном [13] и независимо Борелем [14].

Иногда при сравнении двух функций φ и ψ вместо того, чтобы писать $\varphi \leq c\psi$ с некоторой абсолютной константой c , будем писать $\varphi \prec \psi$. Вместо $\varphi \prec \psi$ и $\psi \prec \varphi$ пишем $\varphi \asymp \psi$.

1. Теорема 1. Пусть $L \subset \mathbb{R}^N$ — подпространство размерности n , $2n \leq N$. Тогда с некоторой абсолютной константой $c_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\gamma_N\{x \in \mathbb{R}^N : \rho_{l_2^N}(x, L) \leq (c_0 \sqrt{\log(eN/2n)} - \lambda)\} \leq \exp(-4n\lambda^2/\pi^2).$$

Доказательство. Для $m \leq N$ определим функцию $f_m = f_{m,L}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$ следующим равенством

$$f_m(x) = \sup\{\rho_{l_2^A}(P_A x, P_A L) : A \subset [1:N], |A| = m\}.$$

Лемма 1. С некоторой абсолютной константой $c_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_m(x) d\gamma_N(x) \geq c_1 \sqrt{(m-n) \log(eN/m)}.$$

Доказательство леммы 1 приведем чуть позже. Теорема 1 немедленно вытекает из неравенства (1), примененного к функции $f_{2n,L}$, леммы 1 и очевидных оценок $\|f_{2n,L}\|_{Lip} \leq 1$, $\rho_{l_2^N}(x, L) \geq (2n)^{-1/2} f_{2n,L}(x)$.

Доказательство леммы 1. Для $A \subset [1:N]$ обозначим через Q_A ортопроектор в l_2^A с ядром $P_A L$. В этих обозначениях $f_m(x)$ запишется в виде $f_m(x) = \sup\{\|Q_A P_A x\|_{l_2^A} : A \subset [1:N], |A| = m\}$. В частности, $f_m(x) \geq \|Q_{[1:m]} x\|_{l_2^{[1:m]}} \times P_{[1:m]} x\|_{l_2^m}$. Пусть $k = \text{rank } Q_{[1:m]}$. Ясно, что $k \geq m - n$. В силу инвариантности гауссовой меры относительно вращений получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} f_m(x) d\gamma_N(x) &\geq \int_{\mathbf{R}^N} \|Q_{[1:m]}y\|_{l_2} d\gamma_m(y) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^k} \|z\|_{l_2} d\gamma_k(x) = \sqrt{2} \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} \gamma \sqrt{k} \geq \sqrt{m-n}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к заключению леммы при $m > N/100e$. Для исследования случая „малых” m воспользуемся симметрией гауссовых величин (т.е. тем, что мера γ_N — инвариантна относительно изменения знаков координат). Пусть, как обычно,

$$r_i(t) = \text{sign} \sin 2\pi 2^i t, \quad t \in (0, 1), \quad i = 1, 2, \dots$$

— последовательность функции Радемахера. Тогда

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^N} f_m(x_1, \dots, x_N) d\gamma_N(x_1, \dots, x_N) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} f_m(r_1(t)x_1, \dots, r_N(t)x_N) d\gamma_N(x_1, \dots, x_N) = \quad (\forall t \in (0, 1)) \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \int_0^1 f_m(r_1(t)x_1, \dots, r_N(t)x_N) dt d\gamma_N(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Теперь, вспоминая определение функции f_m и вынося супремум за знак внутреннего интеграла, получаем

$$\begin{aligned} I &\geq \int_{\mathbf{R}^N} \sup \left\{ \int_0^1 dt \|Q_A P_A \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i e_i\|_{l_2^A} : \right. \\ &\quad \left. : A \subset [1:N], |A| = m \right\} d\gamma_N(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

По неравенству Хинчина с некоторой абсолютной константой $c_2 > 0$ верна оценка:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dt \|Q_A P_A \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i e_i\|_{l_2^A} = \\ &= \int_0^1 dt \left\| \sum_{j \in A} \left| \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i \langle Q_A P_A e_i, e_j \rangle \right| e_j \right\|_{l_2^A} \geq \\ &\geq \left\| \sum_{j \in A} \int_0^1 dt \left| \sum_{i=1}^N r_i(t) x_i \langle Q_A P_A e_i, e_j \rangle \right| e_j \right\|_{l_2^A} \geq \\ &\geq c_2 \left\| \sum_{j \in A} \left(\sum_{i=1}^N |x_i \langle Q_A P_A e_i, e_j \rangle|^2 \right)^{1/2} e_j \right\|_{l_2^A} \geq \\ &\geq c_2 \min_{i \in A} |x_i| \sigma_2(Q_A P_A), \end{aligned}$$

так как Q_A — ортопроектор в l_2^A и его ранг не меньше $m-n$, $\sigma_2(Q_A P_A) \geq \sqrt{m-n}$. Возвращаясь к оценке интеграла I , получаем

$$I \geq c_2 \sqrt{m-n} \int_{\mathbb{R}^N} \sup \left\{ \min_{i \in A} |x_i| : A \subset [1:N], |A| = m \right\} d\gamma_N(x_1, \dots, x_N). \quad (2)$$

Последний интеграл хорошо известен в статистике и его можно вычислить явно. Для полноты изложения приведем полное доказательство необходимых для наших целей оценок. Сначала одно определение. Пусть ξ_1, \dots, ξ_N — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{O}, d\omega)$. Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и пусть $\xi_1^*(\omega), \dots, \xi_N^*(\omega)$; $\xi_1^*(\omega) \geq \xi_2^*(\omega) \geq \dots \geq \xi_N^*(\omega)$ — перестановка в невозрастающем порядке последовательности чисел $|\xi_1(\omega)|, \dots, |\xi_N(\omega)|$. Если теперь варьировать ω , то мы придем к последовательности случайных величин ξ_1^*, \dots, ξ_N^* называемой вариационным рядом последовательности ξ_1, \dots, ξ_N .

Сублемма. Пусть ξ_1, \dots, ξ_N — стохастически независимые копии случайной величины ξ и для некоторого числа $x > 0$ выполняется неравенство $\mathbf{P}(|\xi| \geq x) > 4m/N$ с некоторым $m \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо неравенство $\mathbf{P}(\xi_m^* \geq x) > 1/2$ и тем более верна оценка $\mathbf{E}\xi_m^* > x/2$.

Следствие. Пусть g_1, \dots, g_N — последовательность независимых гауссовых величин с единичной дисперсией, $1 \leq m < N/100$. Тогда справедливо неравенство $\mathbf{E}g_m^* \geq \sqrt{\log(N/10m)}$.

Чуть-чуть отложим доказательство этих утверждений и завершим доказательство леммы. Для этого заметим, что $\mathbf{E}g_m^*$ — это просто другая запись интеграла из оценки (2). Тем самым при $m < N/100e < N/100$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f_m(x) d\gamma_N(x) = I &\geq c_2 \sqrt{m-n} \sqrt{\log(N/10m)} \geq \\ &\geq c_2 \sqrt{(m-n)} \sqrt{2^{-1} \log(eN/m)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. •

Доказательство сублеммы. Свяжем с каждой случайной величиной ξ_i случайную величину η_i

$$\eta_i = \theta(|\xi_i| - x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\xi_i| \geq x, \\ 0 & \text{при } |\xi_i| < x. \end{cases}$$

Ясно, что событие $\xi_m^* \geq x$ совпадает с событием $\eta_1 + \dots + \eta_N \geq m$. Тем самым речь идет об оценке хвоста биномиального распределения. Для наших целей достаточно неравенства Чебышева.

$$\mathbf{E} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \eta_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq N} \mathbf{E}\eta_i = N\lambda \quad (\lambda = \mathbf{E}\eta_i).$$

Дисперсия этой же случайной величины вычисляется по формуле

$$D\left(\sum_{1 \leq i < N} \eta_i\right) = \sum_{1 \leq i < N} D\eta_i = N\lambda(1-\lambda).$$

По неравенству Чебышева

$$P\left(\left|\sum_{1 \leq i < N} \eta_i - N\lambda\right| \geq \sqrt{2N\lambda(1-\lambda)}\right) \leq 1/2.$$

Отсюда

$$P\left(\sum_{i=1}^N \eta_i \leq N\lambda - \sqrt{2N\lambda(1-\lambda)}\right) \leq 1/2$$

или

$$P\left(\sum_{1 \leq i < N} \eta_i > N\lambda - \sqrt{2N\lambda(1-\lambda)}\right) > 1/2.$$

Остается заметить, что, так как $\lambda = E\eta_i > 4m/N$ по условию сублеммы, справедливо неравенство $N\lambda - \sqrt{2N\lambda(1-\lambda)} > m$ и, следовательно, $P(\xi_m^* \geq x) = P(\eta_1 + \dots + \eta_N \geq m) > 1/2$. Сублемма доказана. •

В силу сублеммы для доказательства следствия достаточно убедиться в том, что для гауссовой случайной величины g при наших ограничениях на m и N выполнено неравенство

$$P(|g| > 2\sqrt{\log(N/10m)}) > 4m/N.$$

Оно сразу следует из оценки (см., например, [15], с. 183)

$$P(|g| > x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2/2} dx \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \times \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right).$$

Следствие доказано. •

Теорема 2. Пусть g_1, \dots, g_N — стохастически независимые стандартные гауссовы векторы в \mathbb{R}^n , причем $n \leq N/2$. Множество $V_N = V_N(g_1, \dots, g_N)$ определяется равенством $V_N = \text{conv}(\pm g_1, \dots, \pm g_N)$. В этих обозначениях с абсолютными константами $c_3 > 0$ и $c_4 > 0$ справедлива следующая оценка

$$P\left\{V_N \supset 4^{-1} c_0 \sqrt{\log(eN/2n)} B_2^n\right\} \geq 1 - (c_3 n/N)^{c_4 n}.$$

Доказательство. Для сокращения записи положим $2^{-1} c_0 \sqrt{\log(eN/2n)} = K$. Зафиксируем некоторое $z \in S^{n-1}$. Из двойственности немедленно получаем, что утверждение $V_N \not\supset Kz$ эквивалентно неравенству

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \perp z} \sup_{1 \leq i < N} |\langle g_i, z + \xi \rangle| < K.$$

Заметим, что случайный вектор $\bar{g} = (\langle g_1, z \rangle, \dots, \langle g_N, z \rangle)$ имеет гауссово распределение γ_N ; при фиксированной реализации случайных векторов g_1, \dots, g_N вектор $(\langle g_1, \xi \rangle, \dots, \langle g_N, \xi \rangle)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \perp z$ лежит в подпространстве $L_z \subset \mathbb{R}^N$ размерности $n-1$, которое при изменении g_1, \dots, g_N меняется стохастически независимо от вектора \bar{g} . В этих обозначениях событие $Kz \notin V_N$ совпадает с событием $\rho_{l_z N}(\bar{g}, L_z) < K$. Тем более

$$P\{Kz \notin V_N\} \leq \sup_{L: \dim L = n-1} \gamma_N\{\bar{g} \in \mathbb{R}^N : \rho_{l_z N}(\bar{g}, L) < K\}.$$

Последнюю величину оценим по теореме 1 (с $\lambda = K$). Получаем

$$P\{Kz \notin V_N\} \leq \exp(-4nK^2/\pi^2).$$

Пусть теперь \mathcal{F} — минимальная $1/2$ -сеть множества S^{n-1} . Как отмечалось во введении, $|\mathcal{F}| \leq 5^n$. Ясно, что

$$P\{K\mathcal{F} \not\subset V_N\} \leq \sum_{z \in \mathcal{F}} P\{Kz \notin V_N\} \leq 5^n \exp(-4nK^2/\pi^2).$$

Остается воспользоваться включением $B_z^n \subset 2 \operatorname{conv} \mathcal{F}_N$.

З а м е ч а н и е. При оценке вероятности события $\{Kz \notin V_N\}$ можно было бы учесть тот факт, что случайное подпространство L_z равномерно распределено на многообразии Грассмана $G_{n-1, N}$ и вместо теоремы 1 воспользоваться рассуждениями из работ автора [16]. Такой путь приводит к несколько худшей оценке, тем не менее достаточной для вывода следствия 1 (см. ниже). Отметим, что, наоборот, теорема из [16] немедленно вытекает из теоремы 1 настоящей работы и формулы (7) работы [16].

Напомним, что дистанция Банаха–Мазура $d(E, F)$ между двумя n -мерными банаховыми пространствами E и F определяется как

$$d(E, F) = \inf_T \|T\|_{E \rightarrow F} \|T^{-1}\|_{F \rightarrow E},$$

где T пробегает совокупность всех обратимых линейных операторов из E в F .

С л е д с т в и е 1. *Равномерно по n и $N \geq n$ справедлива оценка*

$$\int_{G_{n, N}} d(l_\infty^N \cap L, l_2^n) d\mu_{n, N}(L) \asymp \max\left\{1, \sqrt{n/\log(eN/n)}\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечалось во введении, в каждой из работ [3, 4] или [5] доказано, что для любого подпространства $L \subset l_\infty^N$, $\dim L = n$ имеет место оценка $d(l_\infty^n \cap L, l_2^n) \asymp \max\left\{1, \sqrt{n/\log(eN/n)}\right\}$. Это, разумеется, дает требуемую оценку снизу для интересующего нас интеграла.

Для получения оценки сверху воспользуемся следующей хорошо известной реализацией меры $\mu_{n, N}$. Пусть Γ — $N \times n$ случайная матрица, все элементы которой независимы гауссовы величины с единичной дисперсией. В силу единственности меры Хаара $\mu_{n, N}$ на многообразии Грассмана $G_{n, N}$ мера $\mu_{n, N}$ индуцируется мерой γ_{nN} при отображении $\Gamma \rightarrow \operatorname{Im} \Gamma$. Таким образом,

$$\int_{G_{n,N}} d(l_\infty^N \cap L, l_2^n) d\mu_{n,N}(L) = \int_{\mathbb{R}^{nN}} d(l_\infty^N \cap \text{Im } \Gamma, l_2^n) d\gamma_{nN}(\Gamma).$$

Обозначим через g_1, \dots, g_N — векторы-строки матрицы Γ . (Тем самым g_1, \dots, g_N — это стохастически независимые n -мерные гауссовы векторы). В этих обозначениях при фиксированной реализации Γ пространство $\text{Im } \Gamma \cap l_\infty^N$ изометрично пространству \mathbb{R}^n , снабженному нормой

$$\| \cdot \| = \sup \{ | \langle \cdot, g_i \rangle | : 1 \leq i \leq N \}.$$

Следовательно, сопряженное пространство $(l_\infty^N \cap \text{Im } \Gamma)^*$ изометрично пространству X_{V_N} , где, как и в теореме 2, $V_N = \text{conv} \{ \pm g_1, \dots, \pm g_N \}$.

Хорошо известно (см., например, [12], с. 9–10), что для любого n -мерного нормированного пространства E справедлива оценка $d(E, l_2^n) \leq \sqrt{n}$. Кроме того, $d(E, F) = d(E^*, F^*)$ для любых двух банаховых пространств E, F и сопряженных к ним пространств E^*, F^* . Получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_{n,N}} d(l_\infty^N \cap L, l_2^n) d\mu_{n,N}(L) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n} d(X_{V_N}, l_2^n) d\gamma_n(g_1) \dots d\gamma_n(g_N) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n} \min \left\{ \sqrt{n}, \| \text{Id} \|_{X_{V_N} \rightarrow l_2^n} \| \text{Id} \|_{l_2^n \rightarrow X_{V_N}} \right\} \prod_{i=1}^N d\gamma_n(g_i) \leq \\ &\leq \sqrt{n} \mathbb{P} \left\{ \| \text{Id} \|_{l_2^n \rightarrow X_{V_N}} > 4c_0^{-1} (\log(eN/2n))^{-1/2} \right\} + \\ &+ \sqrt{n} \mathbb{P} \left\{ \| \text{Id} \|_{X_{V_N} \rightarrow l_2^n} > 2\sqrt{n} \right\} + 8c_0^{-1} (n/\log(eN/2n))^{1/2}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое последней формулы оценивается по теореме 2:

$$\mathbb{P} \left\{ \| \text{Id} \|_{l_2^n \rightarrow X_{V_N}} > 4c_0^{-1} (\log(eN/2n))^{-1/2} \right\} \leq (c_3 n/N)^{c_4 n}.$$

Для оценки второго слагаемого заметим, что

$$\| \text{Id} \|_{X_{V_N} \rightarrow l_2^n} = \sup_{1 \leq i \leq N} \| g_i \|_{l_2^n}.$$

Следовательно,¹

¹ Разумеется, оценки вероятности $\mathbb{P} \{ \| g \|_{l_2^n} > \lambda \}$ хорошо известны. Для замкнутости изложения мы предпочитаем пользоваться неравенством (1).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\|\text{Id}\|_{X_{V_N} \rightarrow l_2^n} > 2\sqrt{n}\right\} &\leq \sum_{1 \leq i \leq N} \mathbb{P}\left\{\|g_i\|_{l_2^n} > 2\sqrt{n}\right\} \\ &= \gamma_n \left\{g \in \mathbb{R}^n : \|g\|_{l_2^n} > 2\sqrt{n}\right\} N. \end{aligned}$$

Функция $\|\cdot\|_{l_2^n}$ — липшицева с константой 1, а $\mathbb{E}\|g\|_{l_2^n} \leq (\mathbb{E}\|g\|_{l_2^n}^2)^{1/2} = \sqrt{n}$.

Из (1) выводим

$$\gamma_n \left\{g \in \mathbb{R}^n : \|g\|_{l_2^n} \geq \lambda + \sqrt{n}\right\} \leq \exp(-2\lambda^2/\pi^2). \quad (3)$$

Продолжая предыдущую оценку, приходим к неравенству

$$\mathbb{P}\left\{\|\text{Id}\|_{X_{V_N} \rightarrow l_2^n} > 2\sqrt{n}\right\} \leq N \exp(-2n/\pi^2).$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \int_{G_{n,N}} d(l_\infty^N \cap L, l_2^n) d\mu_{n,N} &\leq \min\left\{\sqrt{n}, 8c_0^{-1} (n/\log(eN/2n))^{1/2} + \right. \\ &\left. + \sqrt{n} (c_3 n/N)^{c_4 n} + N\sqrt{n} \exp(-2n/\pi^2)\right\} < \max\left\{1, (n/\log(eN/n))^{1/2}\right\} \end{aligned}$$

(в последнем переходе используется монотонность по n исследуемого интеграла). •

2. Пусть $\Gamma_{n,k}$ — случайная $n \times k$ -матрица, все элементы которой — независимые гауссовы величины с единичной дисперсией. Следующее утверждение хорошо известно специалистам. Его доказательство приводится для полноты изложения.

Лемма 2.2 Для любого δ , $0 < \delta < 1$, найдется константа $c_5 = c_5(\delta) > 0$ такая, что, как только $k \leq \delta n$, справедливо неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\Gamma_{n,k} B_2^k \supset c_5 \sqrt{n} (B_2^n \cap \text{Im} \Gamma_{n,k})\right\} \geq 1 - 2e^{-n}.$$

Доказательство. Для $\epsilon > 0$ через \mathcal{F}_ϵ обозначаем минимальную ϵ -сеть S^{k-1} в евклидовой метрике. Пусть \mathcal{A} и $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\epsilon)$ — следующие множества $n \times k$ -матриц:

$$\mathcal{A} = \left\{\Gamma : \forall a \in \mathcal{F}_{1/2} \|\Gamma a\|_{l_2^n} \leq 6\sqrt{n}\right\},$$

$$\mathcal{B}(\epsilon) = \left\{\Gamma : \forall b \in \mathcal{F}_\epsilon \|\Gamma b\|_{l_2^n} \geq 24\epsilon\sqrt{n}\right\}.$$

Число ϵ будет выбрано позже. Заметим, что если $\Gamma \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(\epsilon)$, то для любого $b \in S^{k-1}$ будет выполнено неравенство $\|\Gamma b\|_{l_2^n} \geq 12\epsilon\sqrt{n}$. Действительно,

² Лемма 2 тесно связана с оценкой распределения сингулярных чисел гауссовой матрицы. Уже после подготовки статьи к печати автору стало известно, что Шапек (Szarek S. J. Spaces with large distance to l_∞^n and random matrices. Preprint IHES/M/88/9) сумел получить точные по порядку экспоненциальные оценки распределения сингулярных чисел квадратной гауссовой матрицы. Его результат содержит лемму 2 как частный случай.

$\forall b \in S^{k-1}$ найдется $\tilde{b} \in \mathcal{F}_\epsilon$ такое, что $\|b - \tilde{b}\|_{l_2^n} \leq \epsilon$ и, следовательно,

$$\|\Gamma b\|_{l_2^n} \geq \|\Gamma \tilde{b}\|_{l_2^n} - \|\Gamma(b - \tilde{b})\|_{l_2^n} \geq 24\epsilon\sqrt{n} - \epsilon \|\Gamma\|_{l_2^k \rightarrow l_2^n}.$$

Так как $\Gamma \in \mathcal{A}$ и $2 \operatorname{conv} \mathcal{F}_{1/2} \supset B_2^n$, то $\|\Gamma\|_{l_2^k \rightarrow l_2^n} \leq 12\sqrt{n}$, что и дает нужную оценку. Эта оценка эквивалентна включению $\Gamma B_2^k \supset 12\epsilon\sqrt{n}B_2^n \cap \operatorname{Im} \Gamma$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\Gamma_{n,k} B_2^k \supset 12\epsilon\sqrt{n}(B_2^n \cap \operatorname{Im} \Gamma_{n,k})\right\} &\geq \mathbf{P}\left\{\Gamma_{n,k} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(\epsilon)\right\} \geq \\ &\geq 1 - (1 - \mathbf{P}\{\Gamma_{n,k} \in \mathcal{A}\}) - (1 - \mathbf{P}\{\Gamma_{n,k} \in \mathcal{B}(\epsilon)\}). \end{aligned}$$

Заметим, что при любом $a \in S^{k-1}$ вектор $\Gamma_{n,k} a$ имеет стандартное гауссово распределение в \mathbb{R}^n . Таким образом,

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}\{\Gamma_{n,k} \in \mathcal{A}\} &= \mathbf{P}\left\{\Gamma_{n,k} : \exists a \in \mathcal{F}_{1/2}, \|\Gamma_{n,k} a\|_{l_2^n} > 6\sqrt{n}\right\} \leq \\ &\leq \sum_{a \in \mathcal{F}_{1/2}} \mathbf{P}\left\{\Gamma_{n,k} : \|\Gamma_{n,k} a\|_{l_2^n} \geq 6\sqrt{n}\right\} = |\mathcal{F}_{1/2}| \gamma_n \left\{g \in \mathbb{R}^n : \|g\|_{l_2^n} > 6\sqrt{n}\right\}. \end{aligned}$$

В силу формулы (3) и неравенства $|\mathcal{F}_{1/2}| \leq 5^k < 5^n$ находим

$$1 - \mathbf{P}\{\Gamma_{n,k} \in \mathcal{A}\} \leq 5^n \exp(-50n/\pi^2) \leq e^{-n}.$$

Прямым вычислением легко показать, что с некоторой абсолютной константой $c > 0$ для любого $\epsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\gamma_n \left\{g \in \mathbb{R}^n : \|g\|_{l_2^n} \leq \epsilon\sqrt{n}\right\} \leq (c\epsilon)^n.$$

Используя эту оценку вместо формулы (3), оценим вероятность попадания матрицы $\Gamma_{n,k}$ в множество $\mathcal{B}(\epsilon)$. При этом учтем, что $|\mathcal{F}_\epsilon| \leq (1+2/\epsilon)^k \leq (3/\epsilon)^k \leq (3/\epsilon)^{n\delta}$ при $\epsilon < 1$. Получаем

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}\{\Gamma_{n,k} \in \mathcal{B}(\epsilon)\} &\leq |\mathcal{F}_\epsilon| \gamma_n \left\{g \in \mathbb{R}^n : \|g\|_{l_2^n} < 24\epsilon\sqrt{n}\right\} \leq \\ &\leq (3/\epsilon)^k (24c\epsilon)^n \leq (72c\epsilon^{1-\delta})^n. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается выбрать ϵ из соотношения $72c\epsilon^{1-\delta} < e^{-1}$. •

Следствие 2. Пусть $0 < \delta < 1$, $k < \delta n$ и g_1, \dots, g_k — набор независимых n -мерных гауссовых векторов. Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\operatorname{conv}(\pm g_1, \dots, \pm g_k) \supset c_\delta(\delta) \sqrt{n/k} (B_2^n \cap \operatorname{span}(g_1, \dots, g_k))\right\} \geq 1 - 2e^{-n}.$$

Доказательство. Достаточно проинтерпретировать векторы g_i , как строки гауссовой матрицы $\Gamma_{n,k}$. При такой интерпретации

$$\text{conv}(\pm g_1, \dots, \pm g_k) = \Gamma_{n,k} B_1^k \supset k^{-1/2} \Gamma_{n,k} B_2^k.$$

Лемма 2 дает теперь требуемую оценку. •

Напомним вероятностную схему построения примеров конечномерных нормированных пространств, о которой шла речь во введении. Пусть $n \leq N$ и g_1, \dots, g_N — N стандартных гауссовых векторов в \mathbb{R}^n . $V_N = \text{conv}\{\pm g_1, \dots, \pm g_N\}$. Речь идет о типичном (в смысле соответствующей вероятностной меры) пространстве X_{V_N} .³

Теорема 3. Пусть $0 < \delta < 1$, $1 \leq k \leq \delta n < n < N$, а $\lambda \geq \max\{1, 2k/c_5(\delta) \sqrt{n}\}$. Тогда вероятность того, что в пространстве X_{V_N} найдется проектор Q ранга k , норма которого в пространстве X_{V_N} не больше λ , допускает следующую оценку ($c_7(\delta) > 0$ — константа, зависящая только от δ):

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\exists Q : Q^2 = Q, \text{rank } Q = k, \|Q\|_{X_V} \leq \lambda\} \geq \\ & \geq 1 - 2 \exp(-n) - \exp(\log N - \lambda^2 c_7^2(\delta) n / 2\pi^2 k). \end{aligned}$$

Замечание. Оценка в теореме 3 становится тривиальной при $n < \log N$. Однако в этом случае типичное пространство X_{V_N} становится близким к евклидову (см., например, теорему 2 выше), и поэтому любой ортопроектор в нем будет иметь не слишком большую норму.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\mathcal{L} = \text{span}\{g_1, \dots, g_k\}$, а Q — ортопроектор из \mathbb{R}^n на \mathcal{L} . В этих обозначениях с вероятностью 1 выполняется равенство $\text{rank } Q = k$. Кроме того, для того чтобы выполнялось неравенство $\|Q\|_{X_{V_N}} \leq \lambda$, достаточно, чтобы для $j = k+1, \dots, N$ выполнялось включение $Qg_j \in \lambda \text{conv}\{\pm g_1, \dots, \pm g_k\}$. Тем самым

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\exists Q : Q^2 = Q, \text{rank } Q = k, \|Q\|_{X_V} \leq \lambda\} \geq \mathbb{P}\{\text{conv}(\pm g_1, \dots, \pm g_k) \supset \\ & \supset c_5(\delta) \sqrt{n/k} (B_2^n \cap \mathcal{L})\} - \sum_{k+1 \leq j \leq N} \mathbb{P}\{Qg_j \notin \lambda c_5(\delta) \sqrt{n/k} B_2^n\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое оценено в лемме 2. Отдельное слагаемое в сумме записывается иначе, как

$$\mathbb{P}\{\|Qg_j\|_{l_2^n} > \lambda c_5(\delta) \sqrt{n/k}\}.$$

³ Чаше принято пользоваться аналогичной конструкцией, а которой вместо гауссовых векторов берутся вектора равномерно распределенные на сфере S^{n-1} . Благодаря концентрации гауссова вектора около сферы радиуса \sqrt{n} оба эти подхода дают в геометрическом смысле одинаковые результаты.

(Это вновь хвост распределения χ^2 , так как при фиксированном \mathcal{L} вектор Qg_j имеет в \mathcal{L} стандартное k -мерное гауссово распределение). Оценивая его по формуле (3) и складывая полученные оценки, приходим к заключению теоремы. •

Список литературы

- [1] Figiel T., Johnson W. B. Large subspaces of l_∞^n and estimates of the Gordon–Lewis constant // Israel J. Math. 1980. Vol. 37. P. 92–112.
- [2] Кашин Б. С. О свойствах случайных сечений N -мерного куба // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 3. С. 8–11.
- [3] Bourgain J., Lindenstrauss J., Milman V. D. Approximation of zonoids by zonotopes. Preprint. September, 1987. To appear in Acta Math.
- [4] Carl B., Pajor A. Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space. To appear in Inventiones Math.
- [5] Глушкин Е. Д. Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // Мат. сб. 1988. Т. 136 (178), № 1 (5). С. 85–96.
- [6] Глушкин Е. Д. Конечномерные аналогии пространств без базиса // ДАН СССР. 1981. Т. 261, № 5. С. 1046–1050.
- [7] Szarek S. J. On the existence and uniqueness of complex structure and spaces with few operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 293. P. 339–353.
- [8] Bourgain J. A complex Banach space such that \bar{X} and X are not isomorphic // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 96. P. 221–226.
- [9] Mankiewicz P. Subspace mixing properties of operators in R^n with applications to pathological properties of Gluskin space // Studia Math. 1988. Vol. 88. P. 51–67.
- [10] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ϵ -энтропия и ϵ -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 2 (80). С. 3–86.
- [11] Pisier G. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces // Springer Lecture Notes. 1986. N 1206. P. 167–241.
- [12] Milman V., Schechtman G. Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces // Springer Lecture Notes. 1986. N 1200.
- [13] Судаков В. Н., Цирельсон Б. С. Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер // Проблемы теории вероятностных распределений: Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 41. С. 14–24.
- [14] Borell C. The Brunn–Minkowski inequality in Gauss space // Invent. Math. 1975. Vol. 30, N 2. P. 207–216.
- [15] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1964.
- [16] Глушкин Е. Д. Октаэдр плохо приближается случайными подпространствами // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 1. С. 14–20.

Финансово-экономический институт
им. Н. А. Вознесенского

191023, Ленинград, наб. кан. Грибоедова, 30/32

Поступило 20 марта 1989 г.

Примечание при корректуре. Благодаря личному контакту автору стало известно, что результат теоремы 3 независимо и примерно тем же самым методом недавно получен Шарком (S. J. Szarek).