ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Том 55 **И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ** **Выпуск 4**

2010

 ГУЩИН А. А.*

ДВОЙСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ РОБАСТНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ[1)]

Рассматривается задача максимизации робастной полезности от терминального капитала в случае, когда рынок характеризуется только множеством терминальных капиталов, отвечающих всем допустимым стратегиям инвестора. Основное внимание уделено случаю, когда функция полезности конечна на полупрямой. Доказана минимаксная теорема, сводящая робастную постановку к стандартной, приведена двойственная характеризация цены в исходной задаче и доказаны те свойства решений и функций цены для исходной и двойственной задач, которые не требуют дополнительных предположений типа условий на асимптотическую эластичность функции полезности.

Ключевые слова и фразы: двойственная задача, f-дивергенция, максимизация полезности, робастная полезность.

1. Введение. В этой статье под задачей максимизации робастной полезности (со штрафной функцией) мы понимаем задачу максимизации функционала
$$\xi \rightsquigarrow \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})], \qquad \xi \in \mathscr{A}, \tag{1.1}$$
по некоторому выпуклому множеству $\mathscr{A}$ случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, где функция полезности U определена на $\mathbf{R}$ и принимает значения в $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, вогнута и монотонно не убывает, $\mathscr{Q}$ — некоторое выпуклое множество «субъективных» вероятностных мер на $(\Omega, \mathscr{F})$, штрафная функция γ выпукла; более точные предположения сформулированы в разд. 2. Здесь и далее математическое ожидание $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}$ считается равным $-\infty$, если оно не определено, т.е. $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\eta = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\eta\wedge n)$. Если $\gamma(\mathbf{Q}) \equiv 0$ на $\mathscr{Q}$, говорят также о максимизации когерентной робастной полезности (термин «когерентная» происходит из терминологии, принятой в теории выпуклых мер риска). Под стандартной задачей максимизации полезности будем понимать случай, когда $\mathscr{Q} = \{\mathbf{P}\}$ или множество $\mathscr{Q}$ состоит из одной меры.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: gushchin@mi.ras.ru

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00944, 08-01-00740 и 08-01-91205).

Элементы множества $\mathscr{A}$ можно интерпретировать как капитал инвестора в заключительный момент операций на финансовом рынке (терминальный капитал), тогда $\mathscr{A}$ интерпретируется как множество терминальных капиталов инвестора, отвечающих его всевозможным (допустимым) стратегиям, а о задаче максимизации функционала (1.1) говорят как о задаче максимизации ожидаемой полезности от терминального капитала. Другие интерпретации задачи также возможны, хотя наши предположения ориентированы, в первую очередь, именно на указанную ситуацию. При обзоре литературы ниже мы упоминаем также статьи, в которых рассматриваются более общие задачи, включающие минимизацию полезности как от терминального капитала, так и, скажем, от процесса потребления.

Функционал (1.1) отражает предпочтения инвестора, не склонного к риску, происходящему как от случайности (за что отвечает вогнутость U), так и от неопределенности вероятностной модели, действующей на рынке (взятие нижней грани по $\mathscr{Q}$ означает, что инвестор оценивает стратегию по наихудшему из всех субъективных вероятностных сценариев $\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}$). Аксиоматическое описание предпочтений инвестора, приводящих к численному представлению этих предпочтений в виде функционала типа (1.1), рассматривалось, в частности, в работах [43] (стандартная задача), [12] (когерентная робастная полезность), [24] (робастная полезность со штрафной функцией); см. также недавнюю работу [10].

Настоящая статья является первой из двух статей, в которых основное внимание уделяется задаче, *двойственной* к задаче максимизации робастной полезности от терминального капитала. Цель этих статей — доказать ряд ключевых утверждений теории при как можно более слабых предположениях. В данной статье мы доказываем минимаксную теорему, позволяющую в определенном смысле свести робастную постановку к стандартной, приводим двойственную характеризацию цены в исходной задаче и доказываем те свойства решений и функций цены для исходной и двойственной задач, которые не требуют дополнительных предположений типа условий на асимптотическую эластичность функции полезности. В частности, условия существования решения в исходной задаче не изучаются. Модель финансового рынка представлена в самой общей форме, а именно, основным объектом является множество $\mathscr{A}$ терминальных капиталов инвестора, отвечающее всем его возможным стратегиям. Соответственно, в терминах этого множества (без дальнейшей структуризации) даются все ответы. Динамические модели рынка будут рассмотрены во второй статье, где, в частности, будут указаны условия, при которых двойственную задачу можно поставить в терминах супермартингальных плотностей или мер.

Для марковских моделей финансового рынка задача максимизации полезности может быть решена методами динамического программирования (см., например, классические работы Р. Мертона [25], [26] и П. Самуэльсона [32]). Альтернативой являются двойственные методы выпуклого анализа, которые не требуют почти никаких предположений о структуре модели. Они предлагают решить сначала вспомогательную (двойственную) задачу, что позволяет охарактеризовать решение исходной задачи и найти ее цену. Оборотной стороной этих методов является то обстоятельство, что результаты о решении исходной задачи носят характер утверждений типа существования и единственности и не позволяют, вообще говоря, найти конкретное решение (что, впрочем, реально только при специальном выборе модели и других атрибутов задачи). Отметим, что для робастной задачи двойственный подход имеет дополнительное преимущество: исходная задача есть задача минимаксного типа, т.е. задача на поиск седловой точки, в то время как двойственная задача есть (вообще говоря, более простая) задача минимизации. В некоторых из упомянутых ниже работ опять же для марковских моделей рынка уже двойственная задача решалась методами динамического программирования, что позволило решить и исходную задачу.

Применение двойственных методов в задачах стохастического управления инициировано в работе Ж.-М. Бисмута [3], а в задаче максимизации полезности — в работе С. Плиски [29]. Наиболее значимый вклад в развитие двойственных методов был внесен в работе Д. Крамкова и В. Шахермайера [22], где можно найти ссылки на предшествующую литературу. В частности, в этой статье впервые было отмечено и подтверждено контрпримерами, что в двойственной задаче недостаточно ограничиться вероятностными мерами. Также ими были разграничены на две группы ключевые утверждения теории: в одну группу вошли утверждения, справедливые при общих предположениях, во вторую — утверждения, справедливые при дополнительных предположениях, например, при условии на асимптотическую эластичность функции полезности. Как отмечалось выше, мы в данной работе ограничиваемся только утверждениями из первой группы.

Из большого числа последующих публикаций по стандартной задаче максимизации полезности отметим работы [1], [2], [4], [8], [9], [13], [21], [23], [28], [33], [34], [46], [48], наиболее близко примыкающие к методам и результатам нашего исследования; даже относительно полный перечень публикаций привести в журнальной статье невозможно. Задачи максимизации когерентной робастной полезности изучались, например, в [6], [11], [14], [16], [27], [30], [35], [36], [39], [41], [42] и обзорной статье [37]. Наконец, задача максимизации робастной полезности со штрафной функцией рассматривалась в работах [17], [38], [44] и др., см. также обзорную статью [40].

Задача максимизация полезности существенно различна в следующих двух случаях: 1) функция полезности U конечна на полупрямой $(a,+\infty)$ и равна $-\infty$ на $(-\infty,a)$; 2) функция полезности U конечна всюду на $\mathbf{R}$. В основной части статьи мы имеем дело с первым случаем, без ограничения общности полагая, как обычно, что $a=0$. Второй случай несколько проще в предположении, что каждый элемент $\mathscr{A}$ ограничен снизу (см. п. 2.5). Отказ от этого предположения приводит к существенно более сложной задаче. В этом случае результаты, аналогичные нашим и по формулировкам, и по схеме доказательств, недавно были получены И. С. Морозовым [27].

Остановимся на наиболее характерных особенностях настоящего исследования.

Мы рассматриваем общую модель рынка, характеризуемую четверкой $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P},\mathscr{A})$, в данной статье и общую динамическую модель рынка (не требующую введения процессов цен базовых активов, а характеризуемую множеством процессов капитала инвестора, отвечающих его всевозможным допустимым стратегиям) в последующей статье, стараясь работать при как можно более общих предположениях. Это позволяет получать, в качестве следствий общих результатов, результаты для моделей рынка с дискретным и непрерывным временем, конечным и бесконечным временным горизонтом, с конечным и бесконечным числом базовых активов, с ограничениями на портфель и без таковых и т.д.

От функции полезности U требуются только те свойства, которые будут необходимы для доказательства данного факта. Так, для доказательства минимаксной теоремы и большинства результатов о двойственности требуются только предположения, которые уже были упомянуты выше, а такие стандартные предположения, как дифференцируемость, строгая вогнутость и условия Инада, не требуются. А выполнение, скажем, условия Инада в нуле для U требуется тогда, когда это необходимо, например, при доказательстве условия Инада в нуле для функции ожидаемой полезности u. Таким образом, даже для стандартной задачи максимизации полезности наша основная теорема 2.2 является обобщением своей предшественницы, теоремы 3.1 в [22]. Представляется, что наш подход делает более понятным взаимосвязь условий и их следствий. Например, стандартные утверждения о поведении функции v на бесконечности и функции u в нуле требуют разных условий, см. пункты (vii) и (viii) теоремы 2.2.

Мы не налагаем априори никаких условий типа отсутствия арбитража. Конечно, частью фольклора является утверждение о том, что арбитраж делает задачу максимизации полезности тривиальной, см. обсуждение этого вопроса в статье [20]. Условия «тривиальности» задачи максимизации полезности в рассматриваемой нами общей модели сформулированы в п. 2.3.

Полученная нами характеризация цены в исходной задаче через функцию цены в двойственной задаче является полной. Действительно, обычным предположением (в стандартной задаче) является конечность функции ожидаемой полезности u в одной точке (и, стало быть, всюду), тогда u выражается через функцию цены v двойственной задачи. Естественно поставить вопрос: а можем ли мы, зная v, определить, является ли u всюду конечной или всюду бесконечной? В робастном случае условия, при которых u выражается через v, носят еще более сложный характер. Мы доказываем, что (только при основных предположениях) соотношения двойственности между u и v всегда имеют место.

В доказательствах мы чаще используем выпуклый анализ в противовес вероятностным методам (что не является самоцелью, а, на наш взгляд, упрощает доказательства). В частности, активно используются конечно-аддитивные функции множества (что не является редкостью), понятие f-дивергенции (что тоже встречалось) и новый подход к ее определению, предложенный в [15] и позволяющий распространить это определение на конечно-аддитивные функции множества, что является новым (см. также дальнейшее развитие этой идеи в [27]). Следует подчеркнуть, что в основные результаты конечно-аддитивные функции множества не входят.

Наконец, еще одна характерная особенность наших доказательств состоит в том, что, по существу, минимаксная теорема и двойственная характеризация доказываются одновременно. Схема доказательств, скажем, в работах [41] и [38] такова, что доказывается минимаксная теорема, сводящая робастную постановку к стандартной; двойственная же характеризация для стандартной задачи была получена в [22] также с использованием минимаксной теоремы.

Всюду в работе предполагается заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Через $L^0 = L^0(\mathscr{F}, \mathbf{P})$ обозначается пространство классов эквивалентности (относительно равенства $\mathbf{P}$-п.н.) $\mathscr{F}$-измеримых случайных величин с действительными значениями, наделенное топологией сходимости по вероятности. Подчеркнем, что предел сходящейся в L^0 последовательности не может принимать бесконечных значений. Неравенства типа $\xi \leqslant f(\eta)$ для элементов ξ, $\eta \in L^0$ понимаются как неравенства $\mathbf{P}$-п.н. Банаховы пространства $L^1 = L^1(\mathscr{F}, \mathbf{P})$ и $L^\infty = L^\infty(\mathscr{F}, \mathbf{P})$ понимаются в обычным смысле. Обозначим $\mathfrak{ba} = \mathfrak{ba}(\mathscr{F}, \mathbf{P})$ пространство таких ограниченных конечно-аддитивных функций множества μ: $\mathscr{F} \to \mathbf{R}$, что

$$A \in \mathscr{F}, \ \mathbf{P}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0, \tag{1.2}$$

с нормой полной вариации. Хорошо известно, что $\mathfrak{ba}$ является сопряженным к пространству L^∞, причем двойственность задается соотношением

$$\langle \xi, \mu \rangle := \mu(\xi) := \int_\Omega \xi \, d\mu, \qquad \mu \in \mathfrak{ba}, \quad \xi \in L^\infty.$$

Подпространство $\mathfrak{ba}$, состоящее из счетно-аддитивных мер, обозначается $\mathfrak{ca}$. Для $\mu \in \mathfrak{ba}$ существует единственное разложение $\mu = \mu^{\mathrm{r}} + \mu^{\mathrm{s}}$ на счетно-аддитивную меру $\mu^{\mathrm{r}} \in \mathfrak{ca}$ и чисто конечно-аддитивную функцию множества $\mu^{\mathrm{s}} \in \mathfrak{ba}$. Пространство $\mathfrak{ca}$ естественно отождествляется с L^1 посредством соотношения $L^1 \ni \xi \rightsquigarrow \xi \cdot \mathbf{P} \in \mathfrak{ca}$, где $\xi \cdot \mathbf{P}$ есть мера с плотностью ξ относительно $\mathbf{P}$.

Нижний индекс $+$ у введенных функциональных пространств указывает на конус неотрицательных элементов (элементов с неотрицательными значениями).

Множество всех вероятностных мер на $(\Omega, \mathscr{F})$, абсолютно непрерывных относительно $\mathbf{P}$, обозначается $\mathfrak{P}$.

Упоминавшееся выше определение f-дивергенции $\mathscr{I}_f(\mu, \nu)$ для $\mu, \nu \in \mathfrak{ba}$ и ее свойства для удобства читателя приведены в приложении B (п. 4.2). В приложении A (п. 4.1) формулируются некоторые результаты из выпуклого анализа, используемые в статье. Здесь же мы поясним только те обозначения и определения, которые применяются при формулировке основных результатов. Для функции $f\colon X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ эффективное множество $\operatorname{dom} f$ определяется как

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X\colon f(x) < +\infty\}.$$

Использование символа min вместо inf означает, что нижняя грань достигается. Индикаторные функции $\mathbf{1}_A$ и δ_A множества $A \subseteq X$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X, \end{cases} \qquad \delta_A(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X, \\ +\infty, & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

2. Основные результаты.

2.1. Основные предположения. В этом пункте формулируются предположения о функции полезности, штрафной функции и множестве терминальных капиталов, при которых доказаны основные результаты работы, и вводятся необходимые обозначения.

Предположение 2.1. *Функция полезности $U\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ — монотонно неубывающая вогнутая функция, $U(x) = -\infty$ при $x < 0$ и $U(x) \in \mathbf{R}$ при $x > 0$.*

Ясно, что функция U непрерывна на $(0, +\infty)$. Непрерывность справа функции U в точке 0 (что эквивалентно полунепрерывности сверху функции U) не предполагается. Положим

$$V(y) = \sup_{x>0}\, [U(x) - xy], \qquad y \in \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Иначе говоря, V есть преобразование Фенхеля функции $-U(-\cdot)$. Поэтому $V\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, а по теореме Фенхеля–Моро

$$\inf_{y \in \mathbf{R}} [V(y) + xy] = \widetilde{U}(x) := \begin{cases} U(x), & \text{если } x \neq 0; \\ \lim\limits_{x \downarrow 0} U(x), & \text{если } x = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Далее, в силу предположения 2.1 $\operatorname{dom} V \subseteq \mathbf{R}_+$, V монотонно не возрастает и

$$\lim_{y \uparrow +\infty} \frac{V(y)}{y} = 0 \tag{2.3}$$

(см., например, [15, разд. 4]). В отличие от классических условий на функцию полезности, $V(y)$ может быть конечна только при больших значениях y и не обязана быть конечной при всех $y > 0$.

Нам будет удобно считать штрафную функцию γ заданной на пространстве $\mathfrak{ba}$ с $\operatorname{dom} \gamma = \mathscr{Q}$. При этом целесообразно в определении функционала робастной полезности (1.1) брать инфимум по-прежнему по множеству $\mathscr{Q}$, чтобы избежать неопределенности вида $(-\infty) + (+\infty)$.

П р е д п о л о ж е н и е 2.2. *Штрафная функция* $\gamma\colon \mathfrak{ba} \to [0, +\infty]$ *— собственная выпуклая функция*, *причем* $\operatorname{dom} \gamma =: \mathscr{Q} \subseteq \mathfrak{P}$, *и множество*

$$\left\{ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\colon \mathbf{Q} \in \mathscr{Q},\ \gamma(\mathbf{Q}) \leqslant c \right\} \tag{2.4}$$

замкнуто в L^1 *и равномерно интегрируемо по отношению к* $\mathbf{P}$ *для любого* $c \geqslant 0$.

Поскольку множество (2.4) выпукло, его замкнутость в L^1 в сочетании с равномерной интегрируемостью эквивалентна его компактности в слабой топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$ и, следовательно, компактности множества $\{\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}\colon \gamma(\mathbf{Q}) \leqslant c\}$ в топологии $\sigma(\mathfrak{ca}, L^\infty)$ и $*$-слабой топологии $\sigma(\mathfrak{ba}, L^\infty)$. В частности, γ полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(\mathfrak{ba}, L^\infty)$.

Если штрафная функция γ удовлетворяет предположению 2.2 и зафиксирована мера $\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}$, то функция

$$\gamma_{\mathbf{Q}} := \gamma + \delta_{\{\mathbf{Q}\}} \tag{2.5}$$

тоже, очевидно, удовлетворяет предположению 2.2.

Приведем примеры штрафных функций, удовлетворяющих предположению 2.2. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая (4.3), $f(1) \geqslant 0$. Тогда предположение 2.2 будет выполнено, если

$$\gamma(\mathbf{Q}) := \begin{cases} \mathscr{I}_f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), & \text{если } \mathbf{Q} \in \mathfrak{P}; \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Еще один пример дает $\gamma := \delta_{\mathscr{Q}}$, где $\mathscr{Q} = \{\mathbf{Q} \in \mathfrak{P}\colon \mathscr{J}_f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \leqslant c\}$, $c \geqslant f(1)$. Другие примеры можно найти, например, в работе [38].

Наши условия на штрафную функцию γ хорошо известны в теории мер риска. А именно, функция $\rho\colon L^\infty \to \mathbf{R}$ является *непрерывной снизу* выпуклой мерой риска тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\rho(X) = -\min_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X + \gamma(\mathbf{Q})], \qquad X \in L^\infty,$$

с функцией γ, удовлетворяющей предположению 2.2 (см. [19, теорема 5.2]).

Предположение 2.3. *Множество терминальных капиталов $\mathscr{A}$ — выпуклое подмножество L^0, содержащее случайную величину $\xi_0 \geqslant \varkappa$ для некоторого числа $\varkappa > 0$.*

По множеству $\mathscr{A}$ построим еще ряд множеств, играющих в дальнейшем существенную роль:

$$\mathscr{A}_+ := \mathscr{A} \cap L^0_+, \quad \mathscr{C} := (\mathscr{A} - L^0_+) \cap L^\infty, \quad \mathscr{C}_+ := \mathscr{C} \cap L^0_+,$$

$$\overline{\mathscr{C}}_+ \text{ — замыкание } \mathscr{C}_+ \text{ в } L^0,$$

$$\mathscr{D} := \{\eta \in L^0_+\colon \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta\xi \leqslant 1 \text{ для всех } \xi \in \mathscr{A}_+\}. \tag{2.6}$$

Ясно, что $\mathscr{D} \subseteq L^1_+$, так как $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\eta \leqslant \varkappa^{-1}$ для любой $\eta \in \mathscr{D}$. Далее, заметим, что множества $\mathscr{C}_+$, $\overline{\mathscr{C}}_+$, $\mathscr{D}$ определяются множеством $\mathscr{A}_+$, в (2.6) множество $\mathscr{A}_+$ можно заменить на $\mathscr{C}_+$ и, по лемме Фату, на $\overline{\mathscr{C}}_+$. Множество $\overline{\mathscr{C}}_+$ выпукло, телесно ($0 \leqslant \eta \leqslant \xi$, $\xi \in \overline{\mathscr{C}}_+ \Rightarrow \eta \in \overline{\mathscr{C}}_+$) и замкнуто относительно сходимости по $\mathbf{P}$-вероятности. Поэтому по биполярной теореме Бранната–Шахермайера [5]

$$\overline{\mathscr{C}}_+ = \{\xi \in L^0_+\colon \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \eta\xi \leqslant 1 \text{ для всех } \eta \in \mathscr{D}\}. \tag{2.7}$$

2.2. Минимаксная теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения* 2.1–2.3. *Тогда*

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = \min_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})]. \tag{2.8}$$

Следует отметить отличие нашей формулировки от минимаксных теорем для робастной задачи, доказанных, скажем, в работах [41] и [38], где и в левой, и в правой частях минимаксного соотношения стоит верхняя грань по множеству $\mathscr{A}$, а не $\mathscr{A}_+$. Если, как предполагается в этих работах, существует такая мера $\mathbf{Q}_0 \in \mathscr{Q}$, что $\mathbf{Q}_0 \sim \mathbf{P}$, то замена $\mathscr{A}_+$ на $\mathscr{A}$, очевидно, не меняет левую часть (2.8), но может увеличить правую (если только не все меры из $\mathscr{Q}$ эквивалентны $\mathbf{P}$). Это объясняет, почему минимаксные теоремы в упомянутых работах доказаны при более сильных предположениях. Нам представляется более естественной наша постановка задачи.

2.3. Максимизация полезности и арбитраж. Пусть $U(\infty) := \sup_{x>0} U(x)$. Очевидно, что для монотонно неубывающей U

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{E_Q} U(\xi) \leqslant U(\infty) \tag{2.9}$$

и поэтому

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E_Q} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \leqslant U(\infty) + \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \gamma(\mathbf{Q}). \tag{2.10}$$

Достижимость равенства в (2.9) или в (2.10) делает задачу максимизации полезности в определенном смысле тривиальной и говорит о наличии той или иной формы арбитража. Легко видеть, что ситуация с равенством разнится в зависимости от того, ограничена сверху U или нет. Мы приведем два предложения об условиях достижимости равенства в (2.9); условия равенства в (2.10) вытекают их этих предложений и теоремы 2.1. Предполагается, что $\mathbf{Q} \in \mathfrak{P}$.

Предложение 2.1. *Пусть выполнено предположение* 2.3. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{E_Q} U(\xi) = \infty$ *для любой неограниченной сверху функции полезности* U, *удовлетворяющей предположению* 2.1;

(ii) *семейство* $\mathscr{A}_+$ *неограничено по* $\mathbf{Q}$-*вероятности, т.е.*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{Q}(\xi > N) > 0.$$

З а м е ч а н и е 2.1 (ср. с предложением 4.19 в [20]). Пусть выполнено условие (ii) предложения 2.1. Как и в [20], несложно доказать следующее. Если функция полезности U неограничена сверху, то верхняя грань в (2.9) либо не достигается, либо достигается на бесконечном множестве. Если функция полезности U ограничена сверху и строго возрастает, то верхняя грань в (2.9) не достигается.

Предложение 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{E_Q} U(\xi) = U(\infty)$ *для любой ограниченной сверху функции полезности* U, *удовлетворяющей предположению* 2.1;

(ii) *найдется такая ограниченная сверху функция полезности* U, *не равная тождественно константе на* $(0, +\infty)$ *и удовлетворяющая предположению* 2.1, *что* $\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{E_Q} U(\lambda\xi) = U(\infty)$ *для любого* $\lambda > 0$;

(iii) $\xi \mathbf{1}_{\{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}>0\}} \in \overline{\mathscr{C}}_+$ *для любой случайной величины* $\xi \in L^0_+$.

Забегая вперед, утверждение (ii) можно эквивалентно переформулировать так: для некоторой ограниченной сверху функции полезности U, не равной тождественно константе на $(0, +\infty)$, $u(x) = U(\infty)$ для всех $x > 0$, где функция u задается соотношением (2.11) с $\gamma = \delta_{\{\mathbf{Q}\}}$.

2.4. Двойственная характеризация. Пусть множество $\mathscr{A}$ удовлетворяет предположению 2.3. Чтобы упростить обозначения, будем считать, что $\mathscr{A} \subseteq L^0_+$; в общем случае, надо везде заменить $\mathscr{A}$ на $\mathscr{A}_+$. Напомним, что множество $\mathscr{D}$ определено в (2.6). Для $x > 0$ и $y \geqslant 0$ положим

$$\mathscr{A}(x) := x\mathscr{A}, \quad \mathscr{D}(y) := y\mathscr{D}.$$

Определим прямую и двойственную экстремальные задачи:

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \inf_{\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}} [\mathbf{E_Q} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})], \qquad x > 0, \tag{2.11}$$

$$v(y) := \inf_{\eta \in \mathscr{D}(y),\, \mathbf{Q} \in \mathscr{Q}} \biggl[\mathbf{E_Q} V\Bigl(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\Bigr) + \gamma(\mathbf{Q})\biggr], \qquad y \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Напомним определение субдифференциала $\partial V(y)$ функции V в точке $y \geqslant 0$:

$$\partial V(y) := \{z \in \mathbf{R}\colon V(t) \geqslant V(y) + z(t-y) \text{ для всех } t \geqslant 0\},$$

если $V(y) < +\infty$, и $\partial V(y) := \varnothing$ в противном случае. Аналогично, для $x \geqslant 0$

$$\partial U(x) := \{z \in \mathbf{R}\colon U(t) \leqslant U(x) + z(t-x) \text{ для всех } t \geqslant 0\}.$$

Хорошо известно, что для $x, y \geqslant 0$

$$U(x) = V(y) + xy \quad \Leftrightarrow \quad y \in \partial U(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in -\partial V(y), \tag{2.13}$$

если $x > 0$ или U непрерывна справа в нуле; в противном случае имеет место только первая эквивалентность. Левая производная функции U в точке $x > 0$ обозначается $U'_-(x)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения* 2.1–2.3, $\mathscr{A} \subseteq L^0_+$, *а функции* u, v *заданы соотношениями* (2.11)–(2.12). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) *Функция* $u(x)$, $x > 0$, *принимает значения в* $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, *является монотонно неубывающей и вогнутой.*

(ii) *Функция* $v(y)$, $y \geqslant 0$, *принимает значения в* $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, *является выпуклой, полунепрерывной снизу и монотонно невозрастающей. Инфимум в* (2.12) *достигается.*

(iii) *Если* $v(y) = +\infty$ *для всех* $y \geqslant 0$, *то* $u(x) = +\infty$ *для всех* $x > 0$. *Если* $v(y) < +\infty$ *для некоторого* $y \geqslant 0$, *то* $u(x) \in \mathbf{R}$ *при* $x > 0$.

(iv) *Имеют место равенства*

$$u(x) = \min_{y \geqslant 0} [v(y) + xy], \qquad x > 0, \tag{2.14}$$

$$v(y) = \sup_{x > 0} [u(x) - xy], \qquad y \geqslant 0. \tag{2.15}$$

(v) *Зафиксируем* $x > 0$. *Если минимум в* (2.14) *достигается на* y^*, *а минимум в* (2.12) *при* $y = y^*$ — *на паре* $(\eta^*, \mathbf{Q}^*) \in \mathscr{D}(y^*) \times \mathscr{Q}$, *то*

$$u(x) = \sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*)]. \tag{2.16}$$

Наоборот, если выполнено (2.16) *для* $\mathbf{Q}^* \in \mathscr{Q}$, *то найдутся такие* $y^* \in \mathbf{R}_+$ *и* $\eta^* \in \mathscr{D}(y^*)$, *что минимум в* (2.14) *достигается на* y^*, *а минимум в* (2.12) *при* $y = y^*$ — *на паре* $(\eta^*, \mathbf{Q}^*)$.

(vi) *Зафиксируем* $x > 0$. *Пусть* $u(x) < \infty$, *минимум в* (2.14) *достигается на* y^*, *а минимум в* (2.12) *при* $y = y^*$ — *на паре* $(\eta^*, \mathbf{Q}^*) \in \mathscr{D}(y) \times \mathscr{Q}$. *Тогда существование решения у задачи* (2.11), *т.е. такой случайной величины* $\xi^* \in \mathscr{A}(x)$, *что* $u(x) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q})]$, *влечет соотношения*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \xi^* \eta^* = x y^* \tag{2.17}$$

и $\mathbf{P}$-*п.н.*

$$\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}} \in \partial U(\xi^*) \text{ на } \left\{ \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}} > 0 \right\} \quad \text{и} \quad \xi^* \eta^* = 0 \text{ на } \left\{ \frac{d\mathbf{Q}^*}{d\mathbf{P}} = 0 \right\}. \tag{2.18}$$

Обратное утверждение верно частично: *если* (2.17) *и* (2.18) *выполнены для некоторой* $\xi^* \in \mathscr{A}(x)$, *то* ξ^* *есть решение задачи* (2.16), *т.е.* $u(x) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$.

(vii) *Если* $v \not\equiv +\infty$, *то*

$$\lim_{y \uparrow +\infty} \frac{v(y)}{y} = 0.$$

(viii) *Предположим, что функция* U *удовлетворяет условию Инада в нуле, т.е.*

$$\lim_{x \downarrow 0} U'_-(x) = +\infty. \tag{2.19}$$

Предположим дополнительно, что $u(x) < \infty$ (*в случае* $U(\infty) = +\infty$) *и хотя бы для одной меры* $\mathbf{Q} \in \arg\min \gamma$ *не выполнены утверждения* (i)–(iii) *предложения* 2.2 (*в случае* $U(\infty) < +\infty$). *Тогда и удовлетворяет условию Инада в нуле.*

(ix) *Предположим, что функция* U *дифференцируема на* $(0, +\infty)$ *и удовлетворяет условию Инада в нуле, а функция* γ *строго выпукла на* $\mathscr{Q}$. *Если* $v(y) < +\infty$ *для заданного* $y > 0$ *и минимум в* (2.12) *достигается на парах* $(\eta_1, \mathbf{Q}_1)$ *и* $(\eta_2, \mathbf{Q}_2)$, *то* $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ *и* $\eta_1 = \eta_2$ $\mathbf{Q}_1$-*п.н. Если функция и конечна, то она дифференцируема на* $(0, +\infty)$. *Только в случае ограниченности* U *предположим дополнительно, что для меры* $\mathbf{Q}$, *на которой достигается минимум функции* γ, *не выполнены утверждения* (i)–(iii) *предложения* 2.2. *Тогда* v *строго выпукла на* $\{v < \infty\}$.

Как отмечалось во введении, данная теорема является обобщением теоремы 3.1 в [22], относящейся к стандартной задаче максимизации полезности.

2.5. Случай всюду конечной функции полезности. Мы вкратце остановимся на случае, когда функция полезности конечна на всей числовой прямой, т.е. $U\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — монотонно неубывающая вогнутая функция. Тогда, незначительно меняя доказательства и даже упрощая их, можно получить аналогичные результаты в предположении, что $\mathscr{A}$ — непустое выпуклое подмножество L^0 и каждая $\xi \in \mathscr{A}$ *ограничена снизу* (вместо предположения 2.3); предположение 2.2 остается в прежнем виде.

А именно, сохраняется минимаксная теорема:

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A}} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = \min_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \sup_{\xi\in\mathscr{A}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})].$$

Далее, зададим функцию V соотношением

$$V(y) = \sup_{x\in\mathbf{R}} [U(x) - xy], \qquad y \in \mathbf{R}. \tag{2.20}$$

По-прежнему, $V\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, $\operatorname{dom} V \subseteq \mathbf{R}_+$,

$$\inf_{y\in\mathbf{R}} [V(y) + xy] = U(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

но V уже не будет невозрастающей функцией и

$$\lim_{y\uparrow+\infty} \frac{V(y)}{y} = +\infty. \tag{2.21}$$

Для формулировки аналога теоремы 2.2 в рассматриваемом случае естественно положить $\mathscr{A}(x) := x + \mathscr{A}$,

$$u(x) := \sup_{\xi\in\mathscr{A}(x)} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})], \qquad x \in \mathbf{R},$$

и двойственную задачу определить как

$$v(y) := \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q},\, \mathbf{Q}'\in\mathfrak{P},\, \mathbf{Q}'\ll\mathbf{Q}} \biggl[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\biggl(y\frac{d\mathbf{Q}'}{d\mathbf{Q}}\biggr) + y\sup_{\xi\in\mathscr{A}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'}\xi + \gamma(\mathbf{Q})\biggr], \qquad y \geqslant 0. \tag{2.22}$$

Выражение упрощается, если дополнительно предположить, что $\mathscr{A}$ — конус.

Сформулируем теперь аналоги первых четырех утверждений теоремы 2.2. При сделанных предположениях функция $u(x)$, $x \in \mathbf{R}$, принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, является монотонно неубывающей и вогнутой, а функция $v(y)$, $y \geqslant 0$, принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, является выпуклой и полунепрерывной снизу. Инфимум в (2.22) достигается (ср. со следствием 2 в [15]).

Далее, имеют место равенства

$$\begin{aligned} u(x) &= \min_{y\geqslant 0}[v(y)+xy], \qquad x\in\mathbf{R},\\ v(y) &= \sup_{x\in\mathbf{R}}[u(x)-xy], \qquad y\geqslant 0. \end{aligned}$$

В частности, если $v(y)=+\infty$ для всех $y\geqslant 0$, то $u(x)=+\infty$ для всех $x\in\mathbf{R}$. Если $v(y)<+\infty$ для некоторого $y\geqslant 0$, то $u(x)\in\mathbf{R}$ при $x\in\mathbf{R}$.

Следует, однако, отметить, что для функции полезности, конечной всюду, предположение об ограниченности снизу элементов $\mathscr{A}$ не является необходимым. Как уже отмечалось во введении, отказ от этого предположения значительно усложняет задачу и требует, при сохранении схемы рассуждений, значительных дополнительных усилий (см. [27]).

3. Доказательства.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены предположения* 2.1–2.3, $\mathscr{A}\subseteq L^\infty$ *и функция* U *непрерывна справа в нуле. Тогда*

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A},\,U(\xi)\in L^\infty}\ \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathbf{E}_\mathbf{Q}U(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})]=\min_{\mu\in\mathfrak{ba}_+,\,\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}\Big[\mathscr{I}_V(\mu,\mathbf{Q})+\sup_{\xi\in\mathscr{A}}\mu(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})\Big]. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функции φ и ψ на $L^\infty\times L^\infty$ со значениями в $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ соотношениями

$$\varphi(\xi,\eta):=\delta_{\{(\xi,\eta)\colon \eta\leqslant U(-\xi)\}},\qquad \psi(\xi,\eta):=\delta_{\mathscr{A}}(\xi)+\sup_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathbf{E}_\mathbf{Q}\eta-\gamma(\mathbf{Q})].$$

Пусть $\widetilde{u}$ обозначает левую часть (3.1). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} -\widetilde{u} &= \inf_{\xi\in\mathscr{A},\,U(\xi)\in L^\infty}\ \sup_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[-\mathbf{E}_\mathbf{Q}U(\xi)-\gamma(\mathbf{Q})]\\ &\overset{(*)}{=} \inf_{\xi\in\mathscr{A},\,\eta\in L^\infty,\,\eta\geqslant -U(\xi)}\ \sup_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathbf{E}_\mathbf{Q}\eta-\gamma(\mathbf{Q})]\\ &= \inf_{(\xi,\eta)\in L^\infty\times L^\infty}[\varphi(-\xi,-\eta)+\psi(\xi,\eta)], \end{aligned}$$

где равенство, помеченное $(*)$, использует тот факт, что для $\xi\in L^\infty$ случайная величина $-U(\xi)$ всегда ограничена снизу константой.

Ясно, что φ и ψ — выпуклые функции, $\operatorname{dom}\psi=\mathscr{A}\times L^\infty$. Возьмем $\varepsilon\in(0,\varkappa)$. Тогда случайные величины $|U(\xi)|$, где $\xi\in L^\infty$, $\|\xi-\xi_0\|_{L^\infty}<\varepsilon$, равномерно ограничены, скажем, числом b. Если взять $\eta_0:=b+\varepsilon$, то φ будет непрерывной по норме в точке $(-\xi_0,-\eta_0)$. Поэтому применима теорема двойственности Фенхеля–Рокафеллара (см. п. 4.1), согласно которой

$$\widetilde{u}=\min_{\mu,\nu\in\mathfrak{ba}}[\varphi^*(\mu,\nu)+\psi^*(\mu,\nu)].$$

Согласно [15] (см. п. 4.2 ниже), $\varphi^*(\mu,\nu) = \mathscr{J}_V(\mu,\nu)$ и $\operatorname{dom}\varphi^* \subseteq \mathfrak{ba}_+ \times \mathfrak{ba}_+$. Поскольку второе слагаемое в определении ψ есть преобразование Фенхеля выпуклой и полунепрерывной снизу (в $*$-слабой топологии) функции $\gamma\colon \mathfrak{ba} \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, имеем $\psi^*(\mu,\nu) = \sup_{\xi\in\mathscr{A}} \mu(\xi) + \gamma(\nu)$. Объединяя сказанное, приходим к равенству (3.1). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены предположения* 2.1–2.3. *Тогда*

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+}\inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}U(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})] \tag{3.2}$$

$$= \min_{\mu\in\mathfrak{ba}_+,\,\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathscr{J}_V(\mu,\mathbf{Q})+\sup_{\xi\in\mathscr{C}}\mu(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})] \tag{3.3}$$

$$= \min_{\mu\in\mathfrak{ba}_+,\,\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathscr{J}_V(\mu,\mathbf{Q})+\sup_{\xi\in\mathscr{C}_+}\mu(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})] \tag{3.4}$$

$$= \min_{\mu\in\mathfrak{ca}_+,\,\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathscr{J}_V(\mu,\mathbf{Q})+\sup_{\xi\in\mathscr{C}_+}\mu(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})]. \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 3.1. Очевидно, что в (3.5) множество $\mathscr{C}_+$ можно заменить на $\mathscr{A}_+$. Однако нельзя, по аналогии с (3.3) и (3.4), заменить в (3.5) $\mathscr{C}_+$ на $\mathscr{C}$.

В связи с предыдущим замечанием отметим, что значения функционала $\sup_{\xi\in\mathscr{C}}\mu(\xi)$, стоящего в (3.3), зависят от всего множества $\mathscr{A}$, а не только от его пересечения $\mathscr{A}_+$ с положительным конусом. Тем не менее, из леммы 3.2 следует, что значение минимума из (3.3) зависит только от $\mathscr{A}_+$.

Разумеется, в (3.3)–(3.5), используя результаты из п. 4.2, V-дивергенцию $\mathscr{J}_V(\mu,\mathbf{Q})$ можно записать через математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}$ в виде, сходном с определением (2.12) функции v. Мы этого не делаем, поскольку в доказательстве теоремы 2.2 при исследовании свойств функции v нам будет удобнее, наоборот, записать выражение для v в терминах V-дивергенции.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3.2. Применяя лемму 3.1 к функции полезности $\widetilde{U}$ (см. (2.2)), штрафной функции γ и множеству $\mathscr{C}(x) := x+\mathscr{C}$ в роли $\mathscr{A}$, где x — число, $x > -\varkappa$, получим

$$\widetilde{u}(x) := \sup_{\xi\in\mathscr{C}(x),\,\widetilde{U}(\xi)\in L^\infty}\inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\widetilde{U}(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})]$$

$$= \min_{\mu\in\mathfrak{ba}_+,\,\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}}\Big[\mathscr{J}_V(\mu,\mathbf{Q})+\sup_{\xi\in\mathscr{C}}\mu(x+\xi)+\gamma(\mathbf{Q})\Big] \tag{3.6}$$

$$= \min_{\substack{y\geqslant 0,\,\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}\\ \mu\in\mathfrak{ba}_+,\,\mu(\Omega)=1}}\Big[\mathscr{J}_V(y\mu,\mathbf{Q})+xy+y\sup_{\xi\in\mathscr{C}}\mu(\xi)+\gamma(\mathbf{Q})\Big]. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что функция $\widetilde{u}(x)$, $x > -\varkappa$, вогнута и монотонно не убывает; легко также видеть, что она не принимает значения $-\infty$. Значит, она либо тождественно равна $+\infty$, либо всюду конечна. В обоих случаях она непрерывна.

Далее, обозначим выражение (3.2) через u. Для любого $\varepsilon > 0$

$$u \leqslant \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \leqslant \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \widetilde{U}(\varepsilon+\xi) + \gamma(\mathbf{Q})].$$

Для $\xi \in \mathscr{A}_+$ положим $\xi_n := \xi \wedge n$, тогда $\xi_n \in \mathscr{C}$ и $\widetilde{U}(\varepsilon + \xi_n) \geqslant \widetilde{U}(\varepsilon) > -\infty$, поэтому по теореме о монотонной сходимости для любой $\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \widetilde{U}(\varepsilon+\xi) = \lim_n \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \widetilde{U}(\varepsilon+\xi_n) \leqslant \sup_{\eta\in\mathscr{C}(\varepsilon),\, \widetilde{U}(\eta)\in L^\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \widetilde{U}(\eta),$$

откуда

$$\begin{aligned} u &\leqslant \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \sup_{\eta\in\mathscr{C}(\varepsilon),\, \widetilde{U}(\eta)\in L^\infty} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \widetilde{U}(\eta) + \gamma(\mathbf{Q})] \\ &= \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \min_{\mu\in\mathfrak{ba}_+} \Big[\mathscr{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi\in\mathscr{C}} \mu(\varepsilon+\xi) + \gamma(\mathbf{Q}) \Big] = \widetilde{u}(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где в обоих равенствах мы воспользовались соотношением (3.6), причем в первом случае — со штрафной функцией $\gamma_{\mathbf{Q}}$ (см. (2.5)).

С другой стороны, пусть $0 < \varepsilon < \varkappa$ и $\xi+\varepsilon \in \mathscr{C}$. Тогда найдется такая случайная величина $\eta \in \mathscr{A}$, что $\xi+\varepsilon \leqslant \eta$, причем $U(\eta) \geqslant U(\xi+\varepsilon) \geqslant \widetilde{U}(\xi)$; в частности, из $\widetilde{U}(\xi) \in L^\infty$ следует, что $\eta \geqslant 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(-\varepsilon) &= \sup_{\xi+\varepsilon\in\mathscr{C},\, \widetilde{U}(\xi)\in L^\infty} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \widetilde{U}(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] \\ &\leqslant \sup_{\eta\in\mathscr{A}_+} \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\eta) + \gamma(\mathbf{Q})] = u. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) и непрерывности $\widetilde{u}$ следует, что $u = \widetilde{u}(0)$, и равенство (3.3) есть следствие (3.6).

Если применить доказанное утверждение для $\mathscr{A}_+$ в роли $\mathscr{A}$, то $\mathscr{C} = \{\xi \in L^\infty\colon$ найдется такая $\eta \in \mathscr{A}_+$, что $\xi \leqslant \eta\}$ обладает свойством: если $\xi \in \mathscr{C}$, то $\max\{\xi, 0\} \in \mathscr{C}$. Поэтому в рассматриваемом случае (когда $\mathscr{A} = \mathscr{A}_+$) $\sup_{\xi\in\mathscr{C}} \mu(\xi) = \sup_{\xi\in\mathscr{C}_+} \mu(\xi)$ для $\mu \in \mathfrak{ba}_+$, и верно (3.4). Равенство (3.5) верно в силу того, что для $\mu \in \mathfrak{ba}_+$

$$\mathscr{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) = \mathscr{J}_V(\mu^{\mathrm{r}}, \mathbf{Q}) \quad \text{и} \quad \sup_{\xi\in\mathscr{C}_+} \mu(\xi) \geqslant \sup_{\xi\in\mathscr{C}_+} \mu^{\mathrm{r}}(\xi).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Применяя лемму 3.2 с теми же U и $\mathscr{A}$ и функцией полезности $\gamma_{\mathbf{Q}}$, см. (2.5), получаем для фиксированной $\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}$, что

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = \min_{\mu\in\mathfrak{ba}_+} \Big[\mathscr{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) + \sup_{\xi\in\mathscr{C}} \mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}) \Big].$$

Сравнивая это равенство с (3.3), немедленно приходим к минимаксному соотношению.

Доказательство теоремы 2.2. Мы начнем с доказательства утверждения (ii) о свойствах функции v. Доказать достижимость инфимума в (2.12) можно с помощью стандартных аргументов типа теоремы Комлоша (см., например, доказательство леммы 3.3 в [22] для стандартной задачи или доказательства леммы 3.7 в [41] и леммы 4.3 в [38] для робастной задачи). Но мы последовательно будем использовать другой подход, основанный на представлении функции v в терминах V-дивергенции (см. (3.10) ниже) и общих свойствах V-дивергенции.

Положим

$$\mathscr{R} := \{\mu \in \mathfrak{ba}_+ \colon \mu(\xi) \leqslant 1 \text{ для всех } \xi \in \mathscr{C}_+\}.$$

Заметим, что $\mu(\Omega) \leqslant \varkappa^{-1}$ для $\mu \in \mathscr{R}$, поэтому по теореме Банаха–Алаоглу $\mathscr{R}$ есть компакт в $*$-слабой топологии $\sigma(\mathfrak{ba}, L^\infty)$. Легко видеть, что

$$v(y) = \inf_{\mu \in \mathscr{R},\, \mathbf{Q} \in \mathscr{Q}} [\mathscr{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) + \gamma(\mathbf{Q})], \qquad y \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Действительно, $\mathscr{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) = \mathscr{J}_V(y\mu^{\mathrm{r}}, \mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V(y\frac{d\mu^{\mathrm{r}}/d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}})$ и

$$\left\{\frac{d\mu^{\mathrm{r}}}{d\mathbf{P}} \colon \mu \in \mathscr{R}\right\} = \mathscr{D},$$

откуда и следует совпадение правых частей (2.12) и (3.10).

Пусть $v(y) < +\infty$ для заданного y. Поскольку функции $\mathfrak{ba} \times \mathfrak{ba} \ni (\mu, \nu) \rightsquigarrow \mathscr{J}_V(y\mu, \nu)$ и γ полунепрерывны снизу, а множество $\mathscr{R}$ компактно в соответствующих $*$-слабых топологиях и $\mathscr{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) \geqslant V(y\mu(\Omega)) \geqslant V(y\varkappa^{-1})$ для $\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}$ и $\mu \in \mathscr{R}$, то множества

$$\{(\mu, \nu) \in \mathfrak{ba} \times \mathfrak{ba} \colon \mathscr{J}_V(y\mu, \nu) + \delta_{\mathscr{R}}(\mu) + \gamma(\nu) \leqslant c\} \tag{3.11}$$

для всех $c \in \mathbf{R}$ являются компактами в $*$-слабой топологии $\sigma(\mathfrak{ba} \times \mathfrak{ba}, L^\infty \times L^\infty)$ ввиду соответствующего свойства функции γ из предположения 2.2. Значит, нижняя грань в (3.10) достигается, скажем, на паре $(\mu^*, \mathbf{Q}^*)$. Тогда в (2.12) инфимум достигается на паре $(y\, d\mu^{*r}/d\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*)$.

Проверим выпуклость v. Пусть $0 \leqslant y_1 < y_2 < +\infty$, $\alpha \in (0,1)$, а меры $\mu_i \in \mathscr{R}$ и $\mathbf{Q}_i \in \mathscr{Q}$ таковы, что $v(y_i) = \mathscr{J}_V(y_i\mu_i, \mathbf{Q}_i) + \gamma(\mathbf{Q}_i)$, $i = 1, 2$. Положим $y := \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$, $\mu := \alpha y_1 y^{-1} \mu_1 + (1-\alpha) y_2 y^{-1} \mu_2$, $\mathbf{Q} := \alpha \mathbf{Q}_1 + (1-\alpha)\mathbf{Q}_2$, тогда $\mu \in \mathscr{R}$ и $\mathbf{Q} \in \mathscr{Q}$. В силу выпуклости V-дивергенции

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_V(y\mu, \mathbf{Q}) &= \mathscr{J}_V(\alpha y_1 \mu_1 + (1-\alpha) y_2 \mu_2, \alpha \mathbf{Q}_1 + (1-\alpha)\mathbf{Q}_2) \\ &\leqslant \alpha \mathscr{J}_V(y_1\mu_1, \mathbf{Q}_1) + (1-\alpha)\mathscr{J}_V(y_2\mu_2, \mathbf{Q}_2),\end{aligned}$$

откуда с учетом выпуклости функции γ получаем неравенство $v(y) \leqslant \alpha v(y_1) + (1-\alpha)v(y_2)$.

Далее, из неравенства $\eta \leqslant U(-\xi)$ для ξ, $\eta \in L^\infty$ следует, что $\xi \leqslant 0$. Поэтому для любых $\mu_1, \mu_2, \nu \in \mathfrak{ba}_+$

$$\begin{aligned} \mathscr{J}_V(\mu_1+\mu_2,\nu) &= \sup_{\xi,\eta\in L^\infty,\,\eta\leqslant U(-\xi)} [(\mu_1+\mu_2)(\xi)+\nu(\eta)] \\ &\leqslant \sup_{\xi,\eta\in L^\infty,\,\eta\leqslant U(-\xi)} [\mu_1(\xi)+\nu(\eta)] \\ &= \mathscr{J}_V(\mu_1,\nu). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Поэтому функция v не возрастает.

В частности, $\{y \geqslant 0\colon v(y) < \infty\}$ есть интервал в $\mathbf{R}_+$, либо пустой, либо вида $(l,+\infty)$ или $[l,+\infty)$. Пусть $v \not\equiv +\infty$. В силу выпуклости функция v непрерывна в $(l,+\infty)$, поэтому для доказательства полунепрерывности снизу функции v достаточно проверить ее полунепрерывность снизу в точке l. Положим $c := \lim_{y\downarrow l} v(y)$ и определим $K(y) := \{(\mu,\mathbf{Q}) \in \mathscr{R}\times\mathscr{Q}\colon \mathscr{J}_V(y\mu,\mathbf{Q})+\gamma(\mathbf{Q}) \leqslant c\}$. Тогда множества $K(l+1/n)$ непусты, убывают по n в силу (3.12) и, так же как и в (3.11), являются компактами в $*$-слабой топологии $\sigma(\mathfrak{ba}\times\mathfrak{ba}, L^\infty\times L^\infty)$. Поэтому их пересечение непусто. Из полунепрерывности снизу V-дивергенции следует $\bigcap_n K(l+1/n) \subseteq K(l)$, что и доказывает полунепрерывность снизу функции v.

Докажем теперь утверждение (vii). Из соотношения (2.3) и неравенства $v(y) \geqslant V(y\varkappa^{-1})$, $y \geqslant 0$, следует, что

$$\liminf_{y\uparrow+\infty} \frac{v(y)}{y} \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$\limsup_{y\uparrow+\infty} \frac{v(y)}{y} \leqslant 0,$$

так как v не возрастает и не равна тождественно $+\infty$.

Далее, по лемме 3.2

$$u(x) = \min_{\eta\in L^1_+,\,\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \biggl[\mathbf{E_Q} V\biggl(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\biggr) + x\sup_{\xi\in\mathscr{C}_+} \mathbf{E_P}\xi\eta + \gamma(\mathbf{Q})\biggr].$$

Положим

$$\widehat{\mathscr{D}}(y) := \Bigl\{\eta \in L^0_+\colon \sup_{\xi\in\mathscr{C}_+} \mathbf{E_P}\eta\xi = y\Bigr\}.$$

Возможны два случая: $\widehat{\mathscr{D}}(y) = \varnothing$ для любого $y > 0$ и $\widehat{\mathscr{D}}(y) \neq \varnothing$ для любого $y > 0$. В первом случае получаем, что $u(x) = V(0) + \inf_{\mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \gamma(\mathbf{Q}) = v(y)$ для всех $x > 0$ и $y \geqslant 0$, и (2.14) верно. Во втором случае $\widehat{\mathscr{D}}(0) = \{0\} = \mathscr{D}(0)$, а при $y > 0$ $\widehat{\mathscr{D}}(y) \subseteq \mathscr{D}(y)$ и для любой $\eta \in \mathscr{D}(y)$

найдется такая $\eta' \in \widehat{\mathscr{D}}(y)$, что $\eta' \geqslant \eta$, поэтому в определении (2.12) функции v множество $\mathscr{D}(y)$ можно заменить на $\widehat{\mathscr{D}}(y)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x) &= \min_{y\geqslant 0} \inf_{\eta\in\widehat{\mathscr{D}}(y),\, \mathbf{Q}\in\mathscr{Q}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\right) + xy + \gamma(\mathbf{Q})\right] \\ &= \min_{y\geqslant 0}[v(y) + xy]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали (2.14). Отсюда также вытекают утверждения (i) и (iii) теоремы.

Докажем соотношение (2.15). В силу утверждения (iii) можно ограничиться случаем $v \not\equiv +\infty$. Положим

$$\bar{u}(x) := \inf_{y\geqslant 0}[v(y) + xy], \qquad x \in \mathbf{R}.$$

По теореме Фенхеля–Моро

$$v(y) = \sup_{x\in\mathbf{R}}\,[\bar{u}(x) - xy], \qquad y \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Теперь заметим, что $\bar{u}(x) = -\infty$ для всех $x < 0$ в силу утверждения (vii), поэтому в (3.13) можно брать супремум по $x \geqslant 0$ и, значит, по $x > 0$ в силу монотонности $\bar{u}$. Поскольку $\bar{u}(x)$ совпадает с $u(x)$ при $x > 0$ в силу (2.14), правые части (3.13) и (2.15) совпадают.

Докажем утверждение (v). Пусть $u(x) = v(y^*) + xy^*$, $y^* \geqslant 0$, $v(y^*) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} V(\eta^*(d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P})^{-1}) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, $\eta^* \in \mathscr{D}(y^*)$, $\mathbf{Q}^* \in \mathscr{Q}$. Возьмем $\mu^* = (\eta^*/y^*)\cdot\mathbf{P}$ в случае $y^* > 0$ и $\mu^* = 0$, если $y^* = 0$. Тогда $\mu^* \in \mathscr{R}$ и $v(y^*) = \mathscr{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, поэтому

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathscr{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + xy^* + \gamma(\mathbf{Q}^*) \\ &\geqslant \inf_{\mu\in\mathfrak{ca}_+}\left[\mathscr{J}_V(\mu, \mathbf{Q}^*) + x\sup_{\xi\in\mathscr{C}_+}\mu(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*)\right] \\ &= \sup_{\xi\in\mathscr{A}(x)}[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*)], \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались соотношением (3.5) с $\mathscr{A}(x)$ в роли $\mathscr{A}$ и со штрафной функцией $\gamma_{\mathbf{Q}^*}$. Обратное неравенство очевидно.

В обратную сторону, пусть верно (2.16). Вновь пользуясь (3.5) со штрафной функцией $\gamma_{\mathbf{Q}^*}$, найдем такую $\overline{\mu} \in \mathfrak{ca}_+$, что

$$u(x) = \mathscr{J}_V(\overline{\mu}, \mathbf{Q}^*) + x\sup_{\xi\in\mathscr{C}_+}\overline{\mu}(\xi) + \gamma(\mathbf{Q}^*).$$

Пусть $y^* := \sup_{\xi\in\mathscr{C}_+}\overline{\mu}(\xi)$, тогда предыдущее равенство можно переписать в виде $u(x) = \mathscr{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + xy^* + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, где $\mu^* \in \mathscr{R}$ такова, что $y^*\mu^* = \overline{\mu}$. Так как $v(y^*) \leqslant \mathscr{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, имеем $u(x) \geqslant v(y^*) + xy^*$, что в сочетании с (2.14) дает два равенства $u(x) = v(y^*) + xy^*$ и $v(y^*) = \mathscr{J}_V(y^*\mu^*, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*) = \mathscr{J}_V(y^*\mu^{*r}, \mathbf{Q}^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, т.е. минимум в (2.12) достигается на $(y^* d\mu^{*r}/d\mathbf{P}, \mathbf{Q}^*)$.

Теперь докажем пункт (vi). Пусть $\xi^* \in \mathscr{A}(x)$. Из определения V следует, что на $\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P} > 0\}$

$$U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*) \leqslant V\biggl(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\biggr) + \frac{\xi^*\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}} + \gamma(\mathbf{Q}^*). \tag{3.14}$$

Беря математическое ожидание по мере $\mathbf{Q}^*$ от обеих частей, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*) \;&\leqslant\; \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} V\biggl(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\biggr) + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} \frac{\xi^*\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}} + \gamma(\mathbf{Q}^*) \\ &= v(y^*) + \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\xi^*\eta^* \mathbf{1}_{\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}>0\}}) \leqslant v(y^*) + xy^*. \end{aligned}\tag{3.15}$$

Если ξ^* есть решение задачи (2.11), то, с учетом (2.16), левая часть (3.15) равна $u(x)$. Значит, оба неравенства в (3.15) суть равенства, и, следовательно, в (3.14) имеет место равенство $\mathbf{Q}^*$-п.н., т.е. $\mathbf{P}$-п.н. на множестве $\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P} > 0\}$. Отсюда и из (2.13) следуют (2.17) и (2.18). Если же (2.17) и (2.18) имеют место, то в (3.14) левая и правая часть равны $\mathbf{P}$-п.н. на $\{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P} > 0\}$, и мы приходим к равенствам вместо неравенств в (3.15). Значит, $u(x) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} U(\xi^*) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$.

Перейдем к доказательству (viii). По предложению 4 в [15], выполнение условия Инада (2.19) означает строгое убывание функции V. Соответственно, невыполнение условия Инада в нуле для функции u означает, что либо $u \equiv +\infty$ (что исключено по условию), либо $u(x) < +\infty$ для всех $x > 0$ и функция v конечна и постоянна на некотором интервале, а именно на интервале $[\beta, +\infty)$, где $\beta := \lim_{x\downarrow 0} u'_-(x)$. Предположим, что функция v ведет себя именно так.

Зафиксируем $y > \beta$. Пусть минимум в (2.12) достигается на паре $(\eta^*, \mathbf{Q}^*)$, т.е.

$$v(y) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} V\biggl(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\biggr) + \gamma(\mathbf{Q}^*), \qquad \mathbf{Q}^* \in \mathscr{Q}, \quad \eta^* \in \mathscr{D}(y).$$

Так как $\lambda\eta^* \in \mathscr{D}(\lambda y)$ и $v(\lambda y) = v(y)$ при $\lambda > 1$, то

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} V\biggl(\frac{\lambda\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\biggr) \geqslant \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^*} V\biggl(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}\biggr)$$

по определению $v(\lambda y)$. С другой стороны, $V(\frac{\lambda\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}}) \leqslant V(\frac{\eta^*}{d\mathbf{Q}^*/d\mathbf{P}})$. В силу строгой монотонности V комбинация двух последних неравенств возможна лишь в случае, когда $\eta^* = 0$ $\mathbf{Q}^*$-п.н. Значит, $v(y) = V(0) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$, в частности, $V(0) = U(\infty) < \infty$ и любая $\eta \in \mathscr{D}(y)$ (и, значит, любая $\eta \in \mathscr{D}$) удовлетворяет $\eta = 0$ $\mathbf{Q}^*$-п.н., и, следовательно, v тождественно равна $V(0) + \gamma(\mathbf{Q}^*) = U(\infty) + \gamma(\mathbf{Q}^*)$. В силу (2.14) функция u тождественно равна той же константе. Таким образом, для любой $\mathbf{Q} \in \arg\min \gamma$ выполнено равенство

$$\sup_{\xi \in \mathscr{A}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathbf{Q})] = U(\infty) + \gamma(\mathbf{Q}),$$

и мы приходим к противоречию.

Наконец докажем (ix). Предположение на U означает в точности, что V строго выпукла. Пусть $v(y) < +\infty$ и минимум в (2.12) достигается на парах $(\eta_1, \mathbf{Q}_1)$ и $(\eta_2, \mathbf{Q}_2)$; положим $\eta := (\eta_1 + \eta_2)/2$ и $\mathbf{Q} := (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)/2$. Тогда, с одной стороны, в силу выпуклости множеств $\mathscr{D}(y)$ и $\mathscr{Q}$ и имеем

$$v(y) \leqslant \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\Big(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\Big) + \gamma(\mathbf{Q}). \tag{3.16}$$

С другой стороны, в силу выпуклости V-дивергенции и γ находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\bigg(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\bigg) + \gamma(\mathbf{Q}) &= \mathscr{I}_V(\eta \cdot \mathbf{P}, \mathbf{Q}) + \gamma(\mathbf{Q}) \\ &\leqslant \frac{1}{2}[\mathscr{I}_V(\eta_1 \cdot \mathbf{P}, \mathbf{Q}_1) + \mathscr{I}_V(\eta_2 \cdot \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2) + \gamma(\mathbf{Q}_1) + \gamma(\mathbf{Q}_2)] \\ &= \frac{1}{2}\bigg[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1} V\bigg(\frac{\eta_1}{d\mathbf{Q}_1/d\mathbf{P}}\bigg) + \gamma(\mathbf{Q}_1)\bigg] + \frac{1}{2}\bigg[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2} V\bigg(\frac{\eta_2}{d\mathbf{Q}_2/d\mathbf{P}}\bigg) + \gamma(\mathbf{Q}_2)\bigg] \\ &= v(y). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким образом, неравенства в (3.16) и (3.17) являются равенствами, причем

$$\gamma(\mathbf{Q}) = \frac{\gamma(\mathbf{Q}_1) + \gamma(\mathbf{Q}_2)}{2},$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} V\bigg(\frac{\eta}{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}}\bigg) = \frac{1}{2}\bigg[\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_1} V\bigg(\frac{\eta_1}{d\mathbf{Q}_1/d\mathbf{P}}\bigg) + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_2} V\bigg(\frac{\eta_2}{d\mathbf{Q}_2/d\mathbf{P}}\bigg)\bigg].$$

Из первого равенства и строгой выпуклости γ получаем $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$, после чего второе равенство и строгая выпуклость V влекут $\eta_1 = \eta_2$ $\mathbf{Q}$-п.н.

Дифференцируемость функции u на $(0, +\infty)$ означает, что v строго выпукла на множестве $\{y\colon +\infty > v(y) > \lim_{z \to +\infty} v(z)\}$. Предположим, что это не так и v конечна и линейна на отрезке $[y_1, y_2]$, $v(y_2) < v(y_1)$. Пусть минимум в (2.12) достигается на паре $(\eta_1, \mathbf{Q}_1)$ при $y = y_1$ и на паре $(\eta_2, \mathbf{Q}_2)$ при $y = y_2$. Аналогично доказательству первого утверждения пункта (ix), см. также доказательство выпуклости функции v, получим, что $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ и $\eta_1 = \eta_2$ $\mathbf{Q}_1$-п.н., что влечет $v(y_1) = v(y_2)$, т.е. мы пришли к противоречию.

Утверждение о строгой выпуклости v есть комбинация предыдущего утверждения и пункта (viii).

Теорема 2.2 доказана.

Доказательство предложения 2.1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим противное. Тогда по теореме Яна [45, теорема 1] существует такая вероятностная мера $\mathbf{Q}' \sim \mathbf{Q}$, что $\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'}\xi < \infty$. Поскольку плотность $d\mathbf{Q}/d\mathbf{Q}'$ интегрируема по $\mathbf{Q}'$, найдется такая возрастающая выпуклая функция Φ: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, что $\Phi(0) = 0$, $\lim_{y\to+\infty} \Phi(y)/y = +\infty$ и $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}'}\Phi(d\mathbf{Q}/d\mathbf{Q}') < \infty$. Определим теперь функции $V(y) := y\Phi(1/y)$, $y > 0$, и $U(x) := \inf_{y>0} [V(y)+xy]$, $x \geqslant 0$; тогда V выпукла, $\lim_{y\to+\infty} V(y)/y = 0$, поэтому U удовлетворяет предположению 2.1 и имеет место (2.1). Наконец, $\mathscr{J}_V(\mathbf{Q}', \mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}V(d\mathbf{Q}'/d\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'}\Phi(d\mathbf{Q}/d\mathbf{Q}') < \infty$, поэтому правая часть (3.5) (с $\gamma = \delta_{\{\mathbf{Q}\}}$) конечна, и из леммы 3.2 мы получаем, что $\sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}U(\xi) < \infty$, при этом $U(\infty) = \lim_{y\downarrow 0} V(y) = +\infty$. Противоречие.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть функция полезности U не ограничена сверху. Тогда $V(0) = +\infty$ и для конечности $\mathscr{J}_V(\mu, \mathbf{Q})$, $\mu \in \mathfrak{ca}_+$, необходимо, чтобы $\mathbf{Q} \ll \mu$.

С другой стороны, для такой μ имеем $\mathbf{Q}(d\mathbf{Q}/d\mu > 0) = 1$, поэтому из (ii) следует, что семейство $\{\xi(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mu})^{-1}\colon \xi \in \mathscr{A}_+\}$ неограничено по $\mathbf{Q}$-вероятности. Поэтому

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in\mathscr{C}_+} \mu(\xi) &= \sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mu(\xi) \geqslant \sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \frac{\xi}{d\mathbf{Q}/d\mu} \\ &\geqslant \sup_N \sup_{\xi\in\mathscr{A}_+} N\mathbf{Q}\biggl(\frac{\xi}{d\mathbf{Q}/d\mu} > N\biggr) = +\infty,\end{aligned}$$

и утверждение вытекает из леммы 3.2.

Доказательство предложения 2.2. Утверждение (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидно, так как $U(\lambda x)$, $x \geqslant 0$, — также функция полезности.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Мы воспользуемся теоремой 2.2 с $\gamma = \delta_{\{\mathbf{Q}\}}$. Так как задача максимизации полезности (2.11) с произвольным $x > 0$ эквивалентна задаче максимизации полезности в исходной модели (с $x = 1$) с функцией полезности $U_x(\cdot) = U(x\cdot)$, имеем $u(x) = U(\infty)$ для всех $x > 0$, значит, $v(y) = U(\infty) = V(0)$ для всех $y \geqslant 0$. Но $V(y) < V(0)$ для любого $y > 0$, поэтому из (2.12) следует, что для всякой $\eta \in \mathscr{D}$ выполнено равенство $\eta = 0$ $\mathbf{Q}$-п.н., т.е. $\eta\mathbf{1}_{\{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}>0\}} = 0$ $\mathbf{P}$-п.н., и (iii) следует из (2.7).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mu \in \mathfrak{ca}_+$ и $\sup_{\xi\in\mathscr{C}_+} \mu(\xi) < \infty$. Так как по условию для любого натурального N найдется такая последовательность $\eta_n \in \mathscr{C}_+$ что $\lim_n \eta_n \geqslant N\mathbf{1}_{\{d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}>0\}}$, из леммы Фату получаем $\mu(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} > 0) = 0$, т.е. μ и $\mathbf{Q}$ сингулярны, откуда $\mathscr{J}_V(\mu, \mathbf{Q}) = V(0)$. Утверждение вытекает из леммы 3.2.

4. Приложения.

4.1. Приложение A: Некоторые факты из выпуклого анализа. Приведенные ниже результаты можно найти в монографии [18].

Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое топологическое векторное пространство над полем действительных чисел, а X' — сопряженное к нему пространство. Результат действия функционала $x' \in X'$ на $x \in X$ будем записывать как $\langle x, x' \rangle$. Преобразованием Фенхеля функции $f\colon X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ (или сопряженной к f) называется функция f^* на пространстве X', задаваемая равенством

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} [\langle x, x' \rangle - f(x)].$$

Сопряженная функция полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(X', X)$ и выпукла. Теорема Фенхеля–Моро утверждает, что

$$f(x) = \sup_{x' \in X'} [\langle x, x' \rangle - f^*(x')], \qquad x \in X,$$

тогда и только тогда, когда f — полунепрерывная снизу выпуклая функция.

В доказательстве ключевой леммы 3.1 мы использовали теорему двойственности Фенхеля–Рокафеллара (см. [31], [18, § 3.4, теорема 1]), которая утверждает, что если $f, g\colon X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые собственные функции и найдется точка $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, в которой одна из них непрерывна, то

$$-\inf_{x \in X} [f(x) + g(x)] = \min_{x' \in X'} [f^*(-x') + g^*(x')].$$

Другие варианты условий, при которых справедлив этот результат, можно найти в [47, теорема 2.8.7].

4.2. Приложение B: f-дивергенция и ее свойства. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbf{R}_+$. В [15] было дано определение f-дивергенции $\mathscr{I}_f(\mu, \nu)$ конечно-аддитивных функций множества μ и ν (заданных на $(\Omega, \mathscr{F})$), не обязательно удовлетворяющих условию (1.2). Легко видеть, что для $\mu, \nu \in \mathfrak{ba}$ это определение эквивалентно следующему:

$$\mathscr{I}_f(\mu, \nu) = \sup_{\xi, \eta \in L^\infty\colon \eta + f^*(\xi) \leqslant 0} [\mu(\xi) + \nu(\eta)], \tag{4.1}$$

где f^* есть преобразование Фенхеля функции f. Из определения следует, что функция $\mathscr{I}_f(\mu, \nu)$ на $\mathfrak{ba} \times \mathfrak{ba}$ принимает значения в $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, выпукла и полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(\mathfrak{ba} \times \mathfrak{ba}, L^\infty \times L^\infty)$. Другие перечисленные ниже и используемые в данной статье свойства доказаны в [15, теорема 1]. В части утверждений мы ограничимся лишь некоторыми частными случаями, в частности, будет предполагаться, что либо

$$\lim_{y\uparrow+\infty}\frac{f(y)}{y}=0, \tag{4.2}$$

либо

$$\lim_{y\uparrow+\infty}\frac{f(y)}{y}=+\infty. \tag{4.3}$$

Заметим, что если хотя бы одна из мер μ и ν не лежит в $\mathfrak{ba}_+$, то $\mathscr{I}_f(\mu,\nu)=+\infty$. Всюду ниже $\mu,\nu\in\mathfrak{ba}_+$, а $\mathbf{Q}\in\mathfrak{P}$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\mathscr{I}_f(\mu,\nu)=\mathscr{I}_f(\mu^{\mathrm{r}},\nu^{\mathrm{r}})+\mathscr{I}_f(\mu^{\mathrm{s}},\nu^{\mathrm{s}}),$$

$\mathscr{I}_f(\mu,0)=0$ в случае (4.2) и $\mathscr{I}_f(\mu,0)=+\infty$ в случае (4.3), если $\mu\neq 0$.

Для $\mu,\nu\in\mathfrak{ca}_+$

$$\mathscr{I}_f(\mu,\nu)=\int f\left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)d\nu, \tag{4.4}$$

где правая часть интерпретируется по-разному в случаях (4.2) и (4.3). Если f удовлетворяет (4.3), то (4.4) имеет место при $\mu\ll\nu$, а в противном случае $\mathscr{I}_f(\mu,\nu)=+\infty$. Если же f удовлетворяет (4.2), то под $d\mu/d\nu$ здесь и далее понимается производная Радона–Никодима $d\mu^{\mathrm{c}}/d\nu$ абсолютно непрерывной компоненты μ^{c} из разложения Лебега μ относительно ν. Заметим, что $\nu(d\nu/d\mathbf{P}=0)=0$ и

$$\frac{d\mu^{\mathrm{c}}}{d\nu}=\frac{d\mu/d\mathbf{P}}{d\nu/d\mathbf{P}}\quad \nu\text{-п.в.}$$

Таким образом, для f, конечной на $(0,+\infty)$, приведенное определение f-дивергенции для счетно-аддитивных мер сводится к классическому определению f-дивергенции, введенному И. Чисаром [7].

В частности, из приведенных свойств следует, что

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_f(\mu,\mathbf{Q})&=\infty, \quad \text{если выполнено (4.3) и } \mu\in\mathfrak{ba}_+\setminus\mathfrak{ca}_+,\\ \mathscr{I}_f(\mu,\mathbf{Q})&=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}f\left(\frac{d\mu^{\mathrm{r}}}{d\mathbf{Q}}\right), \quad \text{если выполнено (4.2).}\end{aligned}$$

В качестве функции f можно взять функцию V, которая у нас задается соотношениями (2.1) (когда U конечна на полупрямой) или (2.20) (когда U конечна всюду). Тогда неравенство $\eta+f^*(\xi)\leqslant 0$ в (4.1) преобразуется в $\eta\leqslant U(-\xi)$ (где в первом случае U предполагается непрерывной справа в нуле), ср. с определением φ в доказательстве леммы 3.1. Двум принципиально различным случаям для функции полезности в терминах функции V отвечают условия (2.3) и (2.21), ср. с (4.2) и (4.3). Более подробно о связи свойств функций U и V, а также u и v, см. [15, разд. 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bellini F.*, *Frittelli M.* On the existence of minimax martingale measures. — Math. Finance, 2002, v. 12, № 1, p. 1–21.
2. *Biagini S.*, *Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach. — Ann. Appl. Probab., 2008, v. 18, № 3, p. 929–966.
3. *Bismut J.-M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control. — J. Math. Anal. Appl., 1973, v. 44, № 2, p. 384–404.
4. *Bouchard B.*, *Touzi N.*, *Zeghal A.* Dual formulation of the utility maximization problem: the case of nonsmooth utility. — Ann. Appl. Probab., 2004, v. 14, № 2, p. 678–717.
5. *Brannath W.*, *Schachermayer W.* A bipolar theorem for $L^0_+(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. — Lecture Notes in Math., 1999, v. 1709, p. 349–354.
6. *Burgert C.*, *Rüschendorf L.* Optimal consumption strategies under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 1, p. 1–14.
7. *Csiszár I.* Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1963, v. 8, p. 85–108.
8. *Cvitanić J.*, *Schachermayer W.*, *Wang H.* Utility maximization in incomplete markets with random endowment. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 2, p. 259–272.
9. *Deelstra G.*, *Pham H.*, *Touzi N.* Dual formulation of the utility maximization problem under transaction costs. — Ann. Appl. Probab., 2001, v. 11, № 4, p. 1353–1383.
10. *Drapeau S.*, *Kupper M.* Risk preferences and their robust representation. Preprint. Berlin: Humboldt University, 2010.
11. *Föllmer H.*, *Gundel A.* Robust projections in the class of martingale measures. — Illinois J. Math., 2006, v. 50, № 2, p. 439–472.
12. *Gilboa I.*, *Schmeidler D.* Maxmin expected utility with nonunique prior. — J. Math. Econom., 1989, v. 18, № 2, p. 141–153.
13. *Goll T.*, *Rüschendorf L.* Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 4, p. 557–581.
14. *Gundel A.* Robust utility maximization for complete and incomplete market models. — Finance Stoch., 2005, v. 9, № 2, p. 151–176.
15. *Гущин А. А.* О расширении понятия f-дивергенции. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 468–489.
16. *Hernández-Hernández D.*, *Schied A.* Robust utility maximization in a stochastic factor model. — Statist. Decisions, 2006, v. 24, № 1, p. 109–125.
17. *Hernández-Hernández D.*, *Schied A.* A control approach to robust utility maximization with logarithmic utility and time-consistent penalties. — Stochastic Process. Appl., 2007, v. 117, № 8, p. 980–1000.
18. *Иоффе А. Д.*, *Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.
19. *Jouini E.*, *Schachermayer W.*, *Touzi N.* Law invariant risk measures have the Fatou property. — Advances in Mathematical Economics, v. 9. Tokyo: Springer, 2006, p. 49–71.
20. *Karatzas I.*, *Kardaras C.* The numéraire portfolio in semimartingale financial models. — Finance Stoch., 2007, v. 11, № 4, p. 447–493.
21. *Karatzas I.*, *Žitković G.* Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets. — Ann. Probab., 2003, v. 31, № 4, p. 1821–1858.
22. *Kramkov D.*, *Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.
23. *Kramkov D.*, *Schachermayer W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 2003, v. 13, № 4, p. 1504–1516.
24. *Maccheroni F.*, *Marinacci M.*, *Rustichini A.* Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences. — Econometrica, 2006, v. 74, № 6, p. 1447–1498.

25. *Merton R. C.* Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. — Rev. Econom. Statist., 1969, v. 51, № 3, p. 247–257.
26. *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. — J. Econom. Theory, 1971, v. 3, № 4, p. 373–413.
27. *Морозов И. С.* Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на **R** функцией полезности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, № 5.
28. *Owen M. P.*, *Žitković G.* Optimal investment with an unbounded random endowment and utility-based pricing. — Math. Finance, 2009, v. 19, № 1, p. 129–159.
29. *Pliska S. R.* A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios. — Math. Oper. Res., 1986, v. 11, № 2, p. 370–382.
30. *Quenez M.-C.* Optimal portfolio in a multiple-priors model. — Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV. Basel: Birkhäuser, 2004, p. 291–321. (Progr. Probab., v. 58.)
31. *Rockafellar R. T.* Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. — Duke Math. J., 1966, v. 33, № 1, p. 81–89.
32. *Samuelson P.A.* Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. — Rev. Econom. Statist., 1969, v. 51, № 3, p. 239–246.
33. *Schachermayer W.* Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. — Ann. Appl. Probab., 2001, v. 11, № 3, p. 694–734.
34. *Schachermayer W.* Optimal investment in incomplete financial markets. — Mathematical Finance—Bachelier Congress, 2000 (Paris). Berlin: Springer, 2002, p. 427–462.
35. *Schied A.* On the Neyman–Pearson problem for law-invariant risk measures and robust utility functionals. — Ann. Appl. Probab., 2004, v. 14, № 3, p. 1398–1423.
36. *Schied A.* Optimal investments for robust utility functionals in complete market models. — Math. Oper. Res., 2005, v. 30, № 3, p. 750–764.
37. *Schied A.* Risk measures and robust optimization problems. — Stoch. Models, 2006, v. 22, № 4, p. 753–831.
38. *Schied A.* Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach. — Finance Stoch., 2007, v. 11, № 1, p. 107–129.
39. *Schied A.* Robust optimal control for a consumption-investment problem. — Math. Methods Oper. Res., 2008, v. 67, № 1, p. 1–20.
40. *Schied A.*, *Föllmer H.*, *Weber S.* Robust preferences and robust portfolio choice. — Handbook of Numerical Analysis, v. XV. Special Volume: Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2009, p. 29–87.
41. *Schied A.*, *Wu C.-T.* Duality theory for optimal investments under model uncertainty. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 3, p. 199–217.
42. *Talay D.*, *Zheng Z.* Worst case model risk management. — Finance Stoch., 2002, v. 6, № 4, p. 517–537.
43. *Нейман Дж. фон*, *Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970, 707 с.
44. *Wittmüss W.* Robust optimization of consumption with random endowment. — Stochastics, 2008, v. 80, № 5, p. 459–475.
45. *Yan J. A.* Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1. — Lecture Notes in Math., 1980, v. 784, p. 220–222.
46. *Yan J. A.* A numeraire-free and original probability based framework for financial markets. — Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, 2002), v. III. Beijing: Higher Ed. Press, 2002, p. 861–871.
47. *Zălinescu C.* Convex Analysis in General Vector Spaces. River Edge: World Scientific, 2002, 367 p.
48. *Žitković G.* Utility maximization with a stochastic clock and an unbounded random endowment. — Ann. Appl. Probab., 2005, v. 15, № 1B, p. 748–777.

Поступила в редакцию
16.II.2010