К. В. Валиков, Поточечная стабилизация решений параболических уравнений с периодическими коэффициентами в перфорированном пространстве,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 8, 1335–1349

АВГУСТ 1994 г., ТОМ 30, № 8

УДК 517.95

К. В. ВАЛИКОВ

ПОТОЧЕЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРФОРИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Введение. Формулировка теоремы о стабилизации. Пусть $F\subset\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ — замкнутое множество, во внешности которого рассмотрим краевую задачу

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),\quad x\in\mathbf{R}^n\backslash F,\ t>0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial F}=0,\ u|_{t=0}=u_0(x),$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ — дифференцирование по конормали к ∂F. Всюду в работе по одинаковым индексам имеется в виду суммирование от 1 до n. Предполагается, что $\mathbf{R}^n\backslash F$ связно, $u_0\in L_\infty(\mathbf{R}^n\backslash F)$, коэффициенты c, a_{ij} измеримы, а уравнение (1) равномерно параболично, т. е. для п. в. $x\in\mathbf{R}^n\backslash F$, $t>0$ и любого $\xi\in\mathbf{R}^n$

$$l^{-1}\leqslant c(x)\leqslant l,\quad |a_{ij}(x,t)|\leqslant l,\quad a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j\geqslant l^{-1}|\xi|^2, \tag{2}$$

$l>0$ — константа. Задачу (1) будем понимать в смысле интегрального тождества

$$\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^n\backslash F}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-cu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dxdt=\int_{\mathbf{R}^n\backslash F}c(x)u_0(x)\varphi(x,0)\,dx \tag{3}$$

для любой $\varphi(x,t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$. Решение ищется в классе функций, ограниченных в слое $0<t<T$ и принадлежащих $L_2(0,T,W_2^1(\Omega\backslash F))$ для любого $T>0$ и любой ограниченной области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Пространство $W_\alpha^1(\Omega)$ определим как пополнение $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в соболевской норме $\left(\int_\Omega(|u|^\alpha+|\nabla u|^\alpha)dx\right)^{1/\alpha}$. Аналогично $\mathring{W}_\alpha^1(\Omega,S)$, где $S\subset\partial\Omega$, есть пополнение в той же норме множества функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, равных нулю в окрестности S, при этом $\mathring{W}_\alpha^1(\Omega)\equiv\mathring{W}_\alpha^1(\Omega,\partial\Omega)$.

Задача (1) изучена в работе А. К. Гущина [1] (в этой работе $c(x)\equiv 1$), где для произвольного F указан класс единственности и установлено существование решений. В частности, решение (1) существует и единственно в указанном выше классе. При определенных ограничениях на F, основное из которых имеет вид изопериметрического неравенства, в [1] доказан критерий равномерной стабилизации решений (1). Подход к проблемам асимптотического поведения решений задачи (1), основанный на использовании оценок функции Грина типа известной оценки Аронсона фундаментального решения задачи Коши, реализован в работе В. В. Жикова [2] для уравнения теплопроводности $(c(x)\equiv 1,\ a_{ij}(x,t)\equiv$

$\equiv\delta_{ij}$). В [2] отмечается, что развитый в более ранних работах [3, 4] подход, в основе которого лежит оценка типа Нэша, более сложен и к задаче (1) неприменим ввиду проблематичности такой оценки. В настоящей работе установлен некоторый аналог оценки Нэша, достаточный для получения критерия поточечной стабилизации в периодическом случае практически в тех же условиях на F, что и в [2], но для произвольных коэффициентов $c(x)$, $a_{ij}(x,t)$. Нам кажется, что возможности оценок Нэша в проблемах асимптотического поведения решений параболических уравнений еще не исчерпаны. Кроме того, такие оценки представляют и самостоятельный интерес.

Приводимая ниже характеристика F дана, как и в [2], в терминах некоторых условий продолжения. Пусть $\varepsilon>0$, $h\in\mathbf{R}^n$, $F_{\varepsilon,h}=\{x\in\mathbf{R}^n|\varepsilon^{-1}x+$ $+h\in F\}$, $K_\rho=\{x\in\mathbf{R}^n|\ |x|<\rho\}$, $K_\rho^{\varepsilon,h}=K_\rho\setminus F_{\varepsilon,h}$. От F прежде всего потребуем, чтобы при некотором $\varepsilon_0>0$ и любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $h\in\mathbf{R}^n$ выполнялось условие

$$|K_1^{\varepsilon,h}|\geqslant a, \tag{4}$$

$a>0$ не зависит от ε, h. Здесь и в дальнейшем $|A|$ — лебегова мера множества $A\subset\mathbf{R}^n$. В случае периодического F это условие, конечно, выполняется. Условия продолжения примем в форме:

a) для любой $u(x)\in C_0^\infty(K_1)$ и любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $h\in\mathbf{R}^n$ существует $\tilde{u}(x)\in C_0^\infty(K_2)$ такая, что $\tilde{u}=u$ на $K_1^{\varepsilon,h}$ и

$$\|\nabla\tilde{u}\|_{\alpha,K_2}\leqslant c_0\|\nabla u\|_{2,K_1^{\varepsilon,h}}, \tag{5}$$

$$\|\tilde{u}\|_{1,K_2}\leqslant c_0\|u\|_{2,K_1^{\varepsilon,h}}, \tag{6}$$

причем соответствие $u\to\tilde{u}$ линейно;

b) для любой $u(x)\in W_\beta^1(K_2^{\varepsilon,h})$ и любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $h\in\mathbf{R}^n$ существует $\bar{u}(x)\in W_1^1(K_1)$ такая, что $\bar{u}=u$ на $K_1^{\varepsilon,h}$ и

$$\|\nabla\bar{u}\|_{1,K_1}\leqslant c_0\|\nabla u\|_{\beta,K_2^{\varepsilon,h}}; \tag{7}$$

в условиях (5)—(7) $c_0>0$, $\alpha\in(2n/(n+2),2]$, $\beta\in[1,2)$ не зависят от ε, h, u. Здесь и далее $\|u\|_{p,\Omega}\equiv\|u\|_{L_p(\Omega)}$. Из условия a), очевидно, следует, что и для любой $u(x)\in\mathring{W}_2^1(K_1^{\varepsilon,h},S)$, $S=\partial K_1\setminus F_{\varepsilon,h}$ существует $\tilde{u}(x)\in$ $\in\mathring{W}_{1,\alpha}^1(K_2)$ такая, что $\tilde{u}=u$ на $K_1^{\varepsilon,h}$ и справедливы оценки (5), (6). Пространство $\mathring{W}_{1,\alpha}^1(K_2)$ — пополнение $C_0^\infty(K_2)$ в норме $\|u\|_{\mathring{W}_{1,\alpha}^1(K_2)}=\|u\|_{1,K_2}+$ $+\|\nabla u\|_{\alpha,K_2}$. В большей части работы условия п. а) будут использоваться именно в таком виде, в п. 4 они нужны для гладких функций. Условие в) в [2] отсутствует, возможно, оно вызвано применяемым здесь методом. Впрочем, на фоне (5) оно не кажется особенно обременительным, во всяком случае оно выполняется во всех рассмотренных в [2] примерах. Сравнительный анализ условий (5), (6) и условий на F в [1] проведен в [2].

Сформулируем основной результат работы. Обозначим через $\hat{c}$, $\hat{a}_{ij}$ продолженные нулем на F коэффициенты (1). Вообще в дальнейшем знаком $\wedge$ будем обозначать нулевое продолжение на F той или иной функции.

Теорема. *Пусть $\hat{c}$, $\hat{a}_{ij}$ периодичны по всем переменным и выполнены условия (4)—(7). Тогда существует параболическое уравнение*

$$\bar{c}\frac{\partial v}{\partial t}=\bar{a}_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j} \tag{8}$$

с постоянными коэффициентами $\bar{c}$, $\bar{a}_{ij}$ такое, что решение $u(x,t)$ задачи (1) и решение $v(x,t)$ задачи Коши для (8) с начальной функцией $v_0=$ $=\bar{c}^{-1}\hat{c}\hat{u}_0$ равномерно в $\mathbf{R}^n\setminus F$ близки при $t\to+\infty$ равномерно по всем *начальным функциям u_0 из единичного шара в $L_\infty(\mathbf{R}^n\backslash F)$, т. е.*

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\|u_0\|_{\infty,\mathbf{R}^n\backslash F}\leqslant 1}\sup_{x\in\mathbf{R}^n\backslash F}|u(x,t)-v(x,t)|=0. \tag{9}$$

Тем самым для поточечной стабилизации решения $u(x,t)$ к нулю при $t\to+\infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{R\to\infty} R^{-n}\int_{(Bx,x)\leqslant R^2}\hat{c}(x)\hat{u}_0(x)\,dx=0, \tag{10}$$

где B — матрица, обратная матрице $(\bar{a}_{ij})$.

Доказательство теоремы основано на упомянутом выше аналоге оценки Нэша и теории усреднения для уравнений типа (1) с периодическими коэффициентами.

Как показано в [2], условия (5), (6) выполняются для многих интересных множеств F, из которых отметим дисперсную структуру в $\mathbf{R}^n$ $(n>2)$, порожденную гладким строго выпуклым телом B, т. е. множество, состоящее из замкнутых компонент без общих внутренних точек, причем все компоненты получаются из B с помощью сдвигов, поворотов и растяжений в t раз, $t\in[t_1,t_2]$, $0<t_1<t_2<\infty$. В этом случае (5), (6) справедливы для $\alpha\in(2n/(n+2),\ 2(n+1)/(n+3))$. Для такого F справедливо и (7), если $\beta\in(2(n+1)/(n+3),\ 2)$. В качестве примера периодической дисперсной структуры можно назвать плотную кубическую упаковку единичных шаров в $\mathbf{R}^3$. Еще один пример — трехмерный периодический каркас. Он получается, если разбить $\mathbf{R}^3$ на единичные кубы и для каждой из прямых, на которых располагаются ребра кубов, взять внутренность бесконечного цилиндра радиуса 1/4 с этой прямой в качестве оси. Объединение всех таких цилиндров (каркас) есть $\mathbf{R}^3\backslash F$. В [2] утверждается (без доказательства), что условия (5), (6) выполнены с $\alpha=2$. Так как это утверждение не совсем очевидно, в п. 6 предложено его доказательство. Условие (7) в этом случае выполнено с $\beta=1$. Там же доказано, что если замыкание каркаса принять наоборот в качестве F, а тогда $\mathbf{R}^3\backslash F$ — внешность каркаса, то (5)—(7) справедливы с $\alpha=2$, $\beta=1$. Схема доказательства этих утверждений может оказаться полезной и в других случаях.

2. Основная оценка. Пусть $x_0\in\mathbf{R}^n$, $\rho>0$ фиксированы. Для любого шара $K_r(x_0)=\{|x-x_0|<r\}$ (далее x_0 в обозначениях опускается) положим $\tilde{K}_r=K_r\backslash F$. Потребуем, чтобы для некоторого $a>0$ выполнялось условие

$$|\tilde{K}_\rho|\geqslant a|K_\rho|. \tag{11}$$

Условия продолжения в этом пункте возьмем в виде

a) для любой $u(x)\in\mathring{W}_2^1(\tilde{K}_\rho, S_\rho)$, $S_\rho=\partial K_\rho\backslash F$, существует $\tilde{u}(x)\in\in\mathring{W}_{1,\alpha}^1(K_{2\rho})$ такая, что $\tilde{u}=u$ на $\tilde{K}_\rho$ и

$$\|\nabla\tilde{u}\|_{\alpha,K_{2\rho}}\leqslant c_0\rho^{n/\alpha-n/2}\|\nabla u\|_{2,\tilde{K}_\rho}, \tag{12}$$

$$\|\tilde{u}\|_{1,K_{2\rho}}\leqslant c_0\rho^{n/2}\|u\|_{2,\tilde{K}_\rho}; \tag{13}$$

b) для любой $u(x)\in W_\beta^1(\tilde{K}_{2\rho})$ существует $\bar{u}(x)\in W_1^1(K_\rho)$ такая, что $\bar{u}=u$ на $\tilde{K}_\rho$ и

$$\|\nabla\bar{u}\|_{1,K_\rho}\leqslant c_0\rho^{n-n/\beta}\|u\|_{\beta,\tilde{K}_{2\rho}}. \tag{14}$$

Постоянные $c_0>0$, $\alpha\in(2n/(n+2),2]$, $\beta\in[1,2)$ в (12)—(14) не зависят от u. Условия (11)—(14) выполняются очевидным образом с $a=1$, $c_0=|K_1|^{1/2}$, если K_ρ не пересекается с F. Положим $Q_{r,\tau}=K_r\times(t_0-\tau,t_0)$, $\tilde{Q}_{r,\tau}=\tilde{K}_r\times(t_0-\tau,t_0)$, $t_0\geqslant\tau>0$, точка (x_0,t_0) — «вершина» цилиндров $Q_{r,\tau}$, $\tilde{Q}_{r,\tau}$. Ниже во всех рассуждениях все фигурирующие в одном контексте цилиндры имеют общую вершину. Пусть $u(x,t)$ — решение (1).

Лемма 1. *При выполнении условий (11)—(14) существуют* $\tau>0$, $\eta\in(0,1)$, *зависящие только от* n, l, a, c_0, α, β, *такие, что для* $t_0\geqslant 4\tau\rho^2$

$$\operatorname{osc}\{u, \tilde{Q}_{\rho/2, \tau\rho^2/4}\}\leqslant \eta \operatorname{osc}\{u, \tilde{Q}_{2\rho, 4\tau\rho^2}\}. \tag{15}$$

Доказательство проведем по схеме, изложенной в [5, гл. 2, § 7, 8], подробно останавливаясь лишь на моментах, в которых реализация этой схемы не представляет собой автоматической процедуры. Сначала перечислим некоторые вспомогательные утверждения общего характера. Всюду через C будем обозначать универсальную константу, зависящую только от величин n, l, a, c_0, α, β, называемых известными. Зависимость C от чего-либо иного отмечается в записи константы или оговаривается в контексте. Из (11) следует, что для $\varepsilon\in(0,1)$

$$|\tilde{K}_\rho\backslash\tilde{K}_{\rho(1-\varepsilon)}|\leqslant C\varepsilon|\tilde{K}_\rho|. \tag{16}$$

Легко видеть, что при некотором $\gamma\in(0,1)$, зависящем лишь от известных величин, и для любого $r\in[\gamma\rho,\rho]$ $|\tilde{K}_r|\geqslant a|K_r|/2$. Это вытекает из (11) и (16). Для определенности будем считать, что $\gamma=1/2$. Если теперь $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\tilde{K}_r, S_r)$, $r\in[\rho/2,\rho]$, то продолжим ее нулем на $\tilde{K}_\rho\backslash\tilde{K}_r$, затем продолжим в соответствии с (12), (13) на $K_{2\rho}$ и вновь продолжим нулем на $K_{4r}\backslash K_{2\rho}$. В результате получим функцию $\tilde{u}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_{1,\alpha}^1(K_{4r})$, совпадающую с u на $\tilde{K}_\rho$ и тем более на $\tilde{K}_r$ и удовлетворяющую условиям

$$\|\nabla\tilde{u}\|_{\alpha, K_{4r}}\leqslant 2c_0r^{n/\alpha-n/2}\|\nabla u\|_{2,\tilde{K}_r}, \tag{17}$$

$$\|\tilde{u}\|_{1,K_{4r}}\leqslant 2^{n/2}c_0r^{n/2}\|u\|_{2,\tilde{K}_r}. \tag{18}$$

Нам будут нужны еще некоторые неравенства типа теорем вложения. Первое из них установлено в [2] и имеет вид

$$\|u\|^2_{p,\tilde{Q}_{r,\tau}}\leqslant Cr^{2\varkappa}\left(\|u\|^2_{2,\infty,\tilde{Q}_{r,\tau}}+\|\nabla u\|^2_{2,\tilde{Q}_{r,\tau}}\right). \tag{19}$$

Здесь $u=u(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\tilde{Q}_{r,\tau}, S_r)\cap L_{2,\infty}(\tilde{Q}_{r,\tau})$, $r\in[\rho/2,\rho]$, $p=3-2(n-\alpha)/n\alpha$, $\varkappa=((2n)/p)(1-\alpha)/\alpha+n/2$, $\|u\|_{2,\infty,\tilde{Q}_{r,\tau}}=\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}\|u(\cdot,t)\|_{2,\tilde{K}_r}$. Поскольку $\alpha\in(2n/(n+2),2]$, то $p>2$, $\varkappa>0$. Неравенство

$$\|u\|_{1,K_\rho}\leqslant C\frac{\rho^{n+1}}{|E_0|}\|\nabla u\|_{1,K_\rho}, \tag{20}$$

в котором $u(x)\in W_1^1(K_\rho)$, $u=0$ на $E_0\subset K_\rho$, есть частный случай (5.1) из [5, с. 106]. В нем $C=C(n)$. Пусть теперь $u(x)\in W_\beta^1(\tilde{K}_\rho)$, $u=0$ на $E_0\subset\tilde{K}_\rho$. Запишем (20) для продолжения $\bar{u}$. Применяя затем (14) и неравенство Гёльдера, получим неравенство

$$\|u\|_{1,\tilde{K}_\rho}\leqslant C\frac{\rho^{2n+1-n/\beta}}{|E_0|}\|\nabla u\|_{\beta,\tilde{K}_{2\rho}}. \tag{21}$$

Положим $A_{k,\rho}=\{x\in\tilde{K}_\rho\,|\,u(x)>k\}$, $B_{k,\rho}=\tilde{K}_\rho\backslash A_{k,\rho}$, и пусть $s>k$. Применим (21) к функции

$$v(x)=\begin{cases} s-k, & u(x)>s,\\ u(x)-k, & k<u(x)\leqslant s,\\ 0, & u(x)\leqslant k,\end{cases}$$

в результате чего получим неравенство типа де Джорджи

$$(s-k)|A_{s,\rho}|\leqslant\frac{C\rho^{2n+1-n/\beta}}{|B_{k,\rho}|}\left(\int\limits_{A_{k,2\rho}\backslash A_{s,2\rho}}|\nabla u|^\beta dx\right)^{1/\beta}, \tag{22}$$

справедливое для $u(x)\in W_\beta^1(\tilde{K}_{2\rho})$.

Пусть $u(x, t)$ — решение (1), $\xi(t)$ — гладкая при $t \geqslant 0$ функция, $\eta(x) \in C_0^\infty(K_r)$, $r > 0$, $q \geqslant 1$, $0 \leqslant t_1 < t_2$. Положим $w = \xi\eta(u^k)^q$, где $u^k(x) = \max\{u(x) - k, 0\}$. Тогда

$$\int_{\tilde{K}_r} c w^2(x, t)\, dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tilde{K}_r} |\nabla w|^2 dx dt \leqslant C \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tilde{K}_r} (\xi^2 |\nabla \eta|^2 + \eta^2 |\xi\xi'|)(u^k)^{2q} dx dt. \tag{23}$$

Оценка (23), которая при $q = 1$ представляет собой энергетическое неравенство, выводится стандартными рассуждениями. В гладком случае нужно умножить уравнение (1) на $\varphi = \xi^2\eta^2(u^k)^{2q-1}$ и проинтегрировать по $\tilde{K}_r \times (t_1, t_2)$. После интегрирования по частям и перехода к w (23) получается из условий (2) и элементарного неравенства $ab \leqslant \varepsilon a^2 + (2\varepsilon)^{-1} b^2$. Если решение обобщенное, то аналогичные действия нужно проделать с тождеством (3). При этом ввиду отсутствия производной u по t используется обычная техника стекловских усреднений. Из (23) следуют оценки

$$\|u^k(\cdot, t_2)\|^2_{2, \tilde{K}_{r_1}} \leqslant C\left(\|u^k(\cdot, t_1)\|^2_{2, \tilde{K}_r} + \frac{1}{(r - r_1)^2} \|u^k\|^2_{2, \tilde{K}_r \times (t_1, t_2)} \right), \tag{24}$$

$$\|w\|^2_{2, \infty, \tilde{Q}_{r, \tau}} + \|\nabla w\|^2_{2, \tilde{Q}_{r, \tau}} \leqslant C((r - r_1)^{-2} + (\tau - \tau_1)^{-1}) \|u^k\|^2_{2, \tilde{Q}_{r, \tau}}, \tag{25}$$

где $0 < r_1 < r$, $0 < \tau_1 < \tau$, $t_0 \geqslant \tau$. В состав w в (25) входят функции $\xi(t)$, $\eta(x)$, удовлетворяющие условиям $\eta(x) \in C_0^\infty(K_r)$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$ на K_{r_1}, $|\nabla \eta| \leqslant 1/(r - r_1)$, $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1$ при $t \geqslant t_0 - \tau_1$, $\xi(t_0 - \tau) = 0$, $|\xi'| \leqslant 1/(\tau - \tau_1)$. Из (25), (19) вытекает, что

$$\|\nabla u^k\|_{2, \tilde{Q}_{\rho, \tau\rho^2}} \leqslant \frac{C(\tau)}{\rho} \|u^k\|_{2, \tilde{Q}_{2\rho, 4\tau\rho^2}}, \tag{26}$$

$$\|u^k\|^2_{p, \tilde{Q}_{r_1, \tau_1}} \leqslant C r^{2\varkappa} \left(\frac{1}{(r - r_1)^2} + \frac{1}{\tau - \tau_1} \right) \|u^k\|^2_{2, \tilde{Q}_{r, \tau}}. \tag{27}$$

Из (23) выводится также принцип максимума [6, лемма 3]

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{x \in \mathbf{R}^n \setminus F} u_0(x) \leqslant u(x, t) \leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{x \in \mathbf{R}^n \setminus F} u_0(x). \tag{28}$$

Переходим к доказательству леммы 1. Оно состоит из трех лемм. В каждой из них $u(x, t)$ — решение (1), удовлетворяющее условию $m \leqslant u \leqslant M$ в цилиндре $\tilde{Q}_{2\rho, 4\tau\rho^2}$, $t_0 \geqslant 4\tau\rho^2$. Положим $\omega = M - m$, $k = M - \omega/2$, $\xi = \omega/4$.

Лемма 2. *Существуют постоянные $\tau, b > 0$, зависящие только от известных величин, такие, что если*

$$|B_{k, \rho}(t_0)| \geqslant \frac{1}{2} |\tilde{K}_\rho|, \tag{29}$$

то для всех $t \in (t_0 - \tau\rho^2, t_0)$

$$|B_{k + \xi, \rho}(t)| \geqslant b |\tilde{K}_\rho|. \tag{30}$$

Аналогичная лемма (лемма 4) доказана в [6], приведенное там доказательство пригодно и в нашем случае, оно основано на оценках (24), (18). В дальнейшем под τ, b подразумеваются величины, найденные в лемме 2.

Положим $\tilde{Q}_r \equiv Q_{r, \tau r^2}$, $Q_r(k) = \{(x, t) \in \tilde{Q}_r | u(x, t) > k\}$ и возьмем произвольные $r, r_1 \in [\rho/2, \rho]$, $r_1 < r$ и $k_1, k \in (m, M)$, $k_1 > k$.

Лемма 3. *Существует $\theta > 0$, зависящее только от известных величин, такое, что если*

$$|Q_r(k)| \leqslant \theta \frac{(r - r_1)^{2/\gamma} (k_1 - k)^2}{r^{2\varkappa/\gamma} (M - k)^2}, \tag{31}$$

где $\gamma = 1 - 2/p > 0$, то в $\tilde{Q}_{r_1}$ $u(x, t) \leqslant M - k$.

Доказательство. Из (27) находим, что

$$\|u^{k_1}\|^2_{p,\tilde{Q}_{r_1}} \leqslant \frac{Cr^{2\varkappa}}{(r-r_1)^2}\|u^k\|_{2,\tilde{Q}_r}.$$

Так как по неравенству Гёльдера $\|u^{k_1}\|^2_{2,\tilde{Q}_{r_1}} \leqslant |Q_{r_1}(k_1)|^{\gamma}\|u^{k_1}\|^2_{p,\tilde{Q}_{r_1}}$, а с другой стороны, $|Q_{r_1}(k_1)| \leqslant |Q_r(k_1)| \leqslant \frac{1}{(k_1-k)^2}\|u^k\|^2_{2,\tilde{Q}_r}$, то для величины $y(r,k)=\|u^k\|^2_{2,\tilde{Q}_r}$ получаем неравенство

$$y(r_1,k_1) \leqslant \frac{Cr^{2\varkappa}}{(r-r_1)^2(k_1-k)^{2\gamma}}[y(r,k)]^{1+\gamma},$$

из которого итерациями, т. е. применяя его последовательно к уровням $k^i=k+(k_1-k)(1-1/2^i)$ и радиусам $r^i=r+(r_1-r)(1-1/2^i)$, выводим утверждение леммы.

Если взять $r=\rho$, $r_1=\rho/2$, $k=M-\omega/2^h$, $k_1=M-\omega/2^{h+1}$, $h>0$, то поскольку $2/\gamma-2\varkappa/\gamma=n+2$, (31) принимает вид

$$|Q_\rho(M-\omega/2^h)| \leqslant \theta\rho^{n+2}, \tag{32}$$

и тогда по лемме 3 $u(x,t) \leqslant M-\omega/2^{h+1}$ в $\tilde{Q}_{\rho/2}$. Именно этот вариант леммы 3 и будет использован в дальнейшем.

Лемма 4. *Для любого $\theta>0$ существует $h>0$, зависящее лишь от θ и от известных величин, такое, что справедливо (32).*

Доказательство. Из (26) находим, что

$$\|\nabla u^k\|^2_{2,\tilde{Q}_\rho} \leqslant \frac{C}{\rho^2}\|u^k\|^2_{2,\tilde{Q}_{2\rho}} \leqslant C(M-k)^2\rho^n. \tag{33}$$

Можно считать, что для $u(x,t)$ выполнено условие (29) с $k=M-\omega/2$, в противном случае аналогичное условие выполнено для решения $-u(x,t)$ и доказательство леммы 1 нужно проводить для него. По лемме 2 для $t\in(t_0-\tau\rho^2,t_0)$, $k=M-\omega/4$ $|B_{k,\rho}(t)| \geqslant b|\tilde{K}_\rho| \geqslant ab||K_\rho|$, тем более $|B_{k,\rho}(t)| \geqslant ab|K_\rho|$ для $k>M-\omega/4$. Применим к $u(x,t)$ неравенство (22), полагая в нем $k=M-\omega/2^h$, $s=M-\omega/2^{h+1}$, $h\geqslant 2$. Тогда

$$(s-k)^\beta|A_{s,\rho}(t)|^\beta \leqslant C\rho^{\beta(n+1)-n}\int\limits_{A_{k,2\rho}(t)\setminus A_{s,2\rho}(t)}|\nabla u|^\beta dx.$$

Интегрируя по $t\in(t_0-\tau\rho^2,t_0)$ и применяя (33), а также неравенство Гёльдера, получаем для указанных выше k,s

$$\int\limits_{t_0-\tau\rho^2}^{t_0}|A_{s,\rho}(t)|^\beta dt \leqslant C_\rho^{\beta(3n/2+1)-n}\Bigl(\int\limits_{t_0-4\tau\rho^2}^{t_0}|A_{k,2\rho}(t)\setminus A_{s,2\rho}(t)|dt\Bigr)^{1-\beta/2}.$$

С другой стороны,

$$|Q_\rho(s)| = \int\limits_{t_0-\tau\rho^2}^{t_0}|A_{s,\rho}(t)|\,dt \leqslant C\Bigl(\int\limits_{t_0-\tau\rho^2}^{t_0}|A_{s,\rho}(t)|^\beta dt\Bigr)^{1/\beta}\rho^{2(1-1/\beta)},$$

$$\int\limits_{t_0-4\tau\rho^2}^{t_0}|A_{k,\rho}(t)\setminus A_{s,\rho}(t)|dt = |Q_{2\rho}(k)|-|Q_{2\rho}(s)|.$$

Поэтому $|Q_\rho(s)|^\beta \leqslant C\rho^{(n+2)(3\beta/2-1)}(|Q_{2\rho}(k)|-|Q_{2\rho}(s)|)^{1-\beta/2}$. Положим здесь $h=2,\dots,q-1$ и сложим полученные неравенства. Поскольку для таких h $|Q_\rho(s)| \geqslant |Q_\rho(M-\omega/2^q)|$, а $\sum\limits_1^N a_i^\gamma \leqslant N^{1-\gamma}(\sum\limits_1^N a_i)^\gamma$, если $a_i\geqslant 0$, $\gamma\in[0,1]$, то в результате $(q-2)|Q_\rho(M-\omega/2^q)|^\beta \leqslant C\rho^{(n+2)(3\beta/2-1)}(q-2)^{\beta/2}(|Q_{2\rho}(M-\omega/4)|-|Q_{2\rho}(M-\omega/2^q)|)^{1-\beta/2} \leqslant C\rho^{\beta(n+2)}(q-2)^{\beta/2}$, так что

$$|Q_\rho(M-\omega/2^q)|\leqslant \frac{C}{(q-2)^{1/\beta-1/2}}\rho^{n+2},$$

и лемма 4 доказана.

Если теперь взять $m=\operatorname{vrai\,inf} u(x,t)$, $M=\operatorname{vrai\,sup} u(x,t)$ в $\tilde{Q}_{2\rho,4\tau\rho^2}$, то комбинация лемм 3 и 4 доказывает лемму 1.

Следующее утверждение, которое в настоящей работе играет основную роль, является непосредственным следствием леммы 1.

Лемма 5. *Пусть $K\subset \mathbf{R}^n$ — какое-либо множество, $0\leqslant\rho_1<\rho_2\leqslant+\infty$ и (11)—(14) выполнены для всех $x_0\in K$, $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$ с константами a, c_0, α, β, не зависящими от x_0, ρ. Тогда существуют константы $C>0$, $\tau>0$ и показатель $\gamma>0$, зависящие только от известных величин, такие, что для любых $x_0\in K$, $\rho,\rho_0\in(\rho_1,\rho_2)$, $\rho\leqslant\rho_0$, $t_0\geqslant\tau\rho_0^2$*

$$\operatorname{osc}\{u,\tilde{Q}_\rho(x_0,t_0)\}\leqslant C(\rho/\rho_0)^\gamma \operatorname{osc}\{u,\tilde{Q}_{\rho_0}(x_0,t_0)\}\leqslant C(\rho/\rho_0)^\gamma\|u_0\|_{\infty,\mathbf{R}^n\setminus F}. \tag{34}$$

В качестве γ, C (τ берется в соответствии с леммой 2) можно взять величины $\gamma=-\log_4\eta$, $C=1/\eta$. То обстоятельство, что в лемме 5 величина ρ_1 может быть и строго положительной, для нас существенно, так как условия (11)—(14) выполняются для сколь угодно малых ρ далеко не всегда. Например, если F — плотная кубическая упаковка шаров в $\mathbf{R}^3$, то уже (11) выполнено лишь для шаров достаточно большого радиуса, достаточно взять в качестве x_0 точку касания шаров из упаковки. Укажем, опуская подробности, один пример, когда эти условия выполнены для всех $\rho>0$, $x_0\in\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$. В п. 1 приведено описание дисперсной системы. Для каждой компоненты такой системы рассмотрим отношение $\nu=\delta/d$, где d — диаметр компоненты, δ — расстояние до ближайшей компоненты. Если для всех компонент $\nu\geqslant\nu_0>0$, то выполнены условия (11)—(14), при этом $\alpha=2$, $\beta=1$, а величины a, c_0 зависят лишь от ν_0 и порождающего систему тела B.

3. Об одном способе продолжения функций. Пусть $u(x,t)$ — решение (1). Заметим, что $u(x,t)$ — непрерывная в $G\equiv\mathbf{R}^n\setminus F\times(0,+\infty)$ функция, так как в окрестности каждой точки $(x_0,t_0)\in G$ решение гёльдерово в силу оценки Нэша. Вопрос же о непрерывности решения вплоть до границы остается открытым. Доопределим $u(x,t)$ на ∂F, полагая $u(x_0,t)=\lim\limits_{\rho\to0}\operatorname{vrai\,inf}\limits_{x\in\tilde{K}_\rho(x_0)} u(x,t)$, $x_0\in\partial F$, $t>0$. Понятно, что этот предел существует, причем если $\operatorname{osc}\{u,\tilde{Q}_{\rho,\tau}(x_0,t_0)\}\leqslant M$ при каких-либо $x_0\in\mathbf{R}^n$, $t_0\geqslant\tau>0$, то это неравенство останется справедливым и после доопределения. Нам желательно указать процедуру продолжения $u(x,t)$ с $\mathbf{R}^n\setminus F$ на F, при которой сохранялись бы оценки колебания такого типа, возможно, с заменой M CM, где C — константа, общая для всевозможных множеств F. Такая процедура изложена в монографии И. Стейна [7, гл. 6]. Приведем ее краткое описание. В [7] показано, что существует набор замкнутых кубов $\{\Omega_k\}$ с параллельными осям координат ребрами и непересекающимися внутренностями и такой, что $\bigcup\limits_k\Omega_k=\operatorname{Int}F$. Этот набор обладает перечисляемыми ниже свойствами. Пусть Ω_k^* — куб, полученный из Ω_k растяжением последнего в 9/8 раз относительно его центра. Обычным образом по кубам Ω_k, Ω_k^* строится разбиение единицы, т. е. семейство гладких функций $\{\varphi_k(x)\}$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi_k\subset\Omega_k^*$, $\sum\limits_k\varphi_k(x)\equiv1$ для $x\in\operatorname{Int}F$. Заметим, что, каждая точка $\operatorname{Int}F$ обладает окрестностью, пересекающейся самое большее с N кубами Ω_k^*, N не зависят от F. Если теперь для каждого Ω_k зафиксировать точку $p_k\in\partial F$ такую, что $\operatorname{dist}(\Omega_k,\partial F)=\operatorname{dist}(\Omega_k,p_k)$, то для любой функции $u(x)$, всюду определенной на $\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$, можно определить функцию $\bar{u}(x)=\sum\limits_k u(p_k)\varphi_k(x)$, $x\in\operatorname{Int}F$, которую и будем рассматривать как продолжение на $\operatorname{Int}F$ исходной функции u. Это продолжение является гладким на $\operatorname{Int}F$. В [7] доказано, что если u непрерывна на $\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$, то продолженная функция непрерывна на $\mathbf{R}^n$, а если u удовлетворяет на $\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$ условию Гёльдера в форме $|u(x)-u(y)|\leqslant M|x-y|^\gamma$, $\gamma\in(0,1]$, то аналогичному условию удовлетворяет и продолженная функция с тем же γ и константой CM, где C не зависит от F. Отметим также, что если $|u(x)|\leqslant M$ на $\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$, то это же верно и для продолжения. В доказательстве этих утверждений используется следующий факт [7, с. 205]: если $x\in\Omega_k^*$, $y\in\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$, то $|y-p_k|\leqslant c|y-x|$, где c не зависит от F. Обозначим продолжение через $v(x)$, на $\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$ оно совпадает с $u(x)$, а на $\operatorname{Int}F$ — с $\bar{u}(x)$. Предположим, что для любого $x_0\in\mathbf{R}^n$ и некоторого $\rho>0$ $\tilde{K}_{\rho/2c}(x)$ непусто и

$$\operatorname{osc}\{u,\ \tilde{K}_\rho(x_0)\}\leqslant M. \tag{35}$$

Тогда для $y\in\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$, $x\in\operatorname{Int}F$ $\quad v(y)-v(x)=u(y)-\bar{u}(x)=\sum\limits_k(u(y)-u(p_k))\varphi_k(x)$. Поэтому если $|x-y|<\rho/c$, то в силу (35) $|v(y)-v(x)|\leqslant M$. Так как для любых x_1, x_2, таких, что $|x_1-x_2|<\rho/2c$, можно найти точку $y\in\overline{\mathbf{R}^n\setminus F}$, для которой $|x_k-y|<\rho/c$, то $|v(x_1)-v(x_2)|\leqslant 2M$. Таким образом,

$$\operatorname{osc}\{v,\ K_{\rho/2c}(x_0)\}\leqslant 2M. \tag{36}$$

Рассмотрим последовательность задач типа (1)

$$\begin{gathered} c^k(x)\frac{\partial u^k}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),\quad x\in\mathbf{R}^n\setminus F,\ t>0,\\ \left.\frac{\partial u^k}{\partial\nu}\right|_{\partial F}=0,\quad u^k|_{t=0}=u_0^k(x)\in L_\infty(\mathbf{R}^n\setminus F_k). \end{gathered} \tag{37}$$

Предположим, что $\|u_0^k\|_{\infty,\,\mathbf{R}^n\setminus F_k}\leqslant 1$, а коэффициенты c^k, a_{ij}^k удовлетворяют условию (2) с не зависящей от k константой l. От F_k потребуем, чтобы для любых $x_0\in\mathbf{R}^n$, $\delta\in(0,1)$ при $k\geqslant k(\delta)$ выполнялись условия (11)—(14), в которых $F=F_k$, $\rho\geqslant\delta$, причем величины c_0, a, α, β не зависят от δ, k, x_0, ρ. Из (11) следует, что при $k\geqslant k_0(\delta/2c)$ в любом шаре $K_{\delta/2c}(x_0)$ есть точки $\mathbf{R}^n\setminus F_k$. Доопределим решения $u^k(x,t)$, непрерывные на $G_k\equiv\mathbf{R}^n\setminus F_k\times\times(0,+\infty)$, на ∂F_k при каждом $t>0$, как это рекомендовано в начале пункта, а затем продолжим на $\operatorname{Int}F_k$ в соответствии с описанной выше процедурой. Полученные таким путем функции обозначим через $v_k(x,t)$, они непрерывны в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, за исключением, быть может, точек $\partial F_k\times(0,+\infty)$. Согласно (34),

$$\operatorname{osc}\{u^k,\ \tilde{Q}_\delta(x_0,t_0)\}\leqslant C(\delta/\rho_0)^\gamma \tag{38}$$

Здесь $\delta\in(0,1)$, $\rho_0\geqslant\delta$, $x_0\in\mathbf{R}^n$, $t_0\geqslant\tau\rho_0^2$, $k\geqslant k_0(\delta)$, а величины τ, C, γ не зависят от x_0, t_0, δ, k, ρ_0. Можно, очевидно, взять $\rho_0=\sqrt{\delta}$. Тогда из (38) следует, что $\operatorname{osc}\{u^k,\tilde{K}_\delta(x_0)\}\leqslant C\delta^{\gamma/2}$ для любых $t\in(t_0,-\tau\delta,t_0)$, $x_0\in\mathbf{R}^n$, $t_0\geqslant\tau\delta$ и, кроме того,

$$|u^k(x,t_1)-u^k(x,t_2)|\leqslant C\delta^{\gamma/2}, \tag{39}$$

если t_1, $t_2\in(t_0-\tau\delta,t_0)$; $x\in\mathbf{R}^n\setminus F_k$. Тем самым условие (35) для u^k выполнено с $\rho=\delta$, $M=C\delta^{\gamma/2}$, а тогда (36) принимает вид $\operatorname{osc}\{v_k,K_{\delta/2c}(x_0)\}\leqslant\leqslant C\delta^{\gamma/2}$. Поскольку при продолжении верхняя грань модуля функции не повышается, то $|v_k(x,t_1)-v_k(x,t_2)|\leqslant C\delta^{\gamma/2}$ и, следовательно,

$$\operatorname{osc}\{v_k,\ Q_\delta(x_0,t_0)\}\leqslant C\delta^{\gamma/2} \tag{40}$$

для всех $k\geqslant k_0(\delta)$, $t_0\geqslant\tau\delta$, $x_0\in\mathbf{R}^n$. Следствием (40) является следующая лемма о компактности.

Лемма 6. *При выполнении перечисленных выше условий на F_k, коэффициенты (37) и начальные функции u_0^k существуют продолжения $v_k(x, t)$ решений $u^k(x, t)$ на $\mathbf{R}_+^{n+1}$ такие, что из последовательности $\{v_k\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся равномерно на компактах в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ к непрерывной на $\mathbf{R}_+^{n+1}$ функции $v(x, t)$.*

Лемма напоминает теорему Арцела: условие (40) обеспечивает «равностепенную непрерывность», хотя сами v_k могут быть и разрывными, а так как $|v_k(x, t)|\leqslant\|u_0^k\|_{\infty,\mathbf{R}^n\setminus F_k}\leqslant 1$, то и равномерную ограниченность. Доказательство проводится элементарными рассуждениями: сначала выделяется подпоследовательность, сходящаяся на счетном всюду плотном в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ множестве, затем доказывается, что она сходится на всем $\mathbf{R}_+^{n+1}$ и т. д.

4. Вспомогательная задача. Эта задача необходима для построения в периодическом случае усредненного уравнения. В [4] она рассмотрена в более общем почти периодическом случае, но в отсутствие F. В дальнейшем под периодической функцией $u(x)$ $(u(x, t))$ в $\mathbf{R}^n\setminus F(G)$ *) понимаем такую, нулевое продолжение которой $\hat{u}(x)$ $(\hat{u}(x, t))$ на все $\mathbf{R}^n(\mathbf{R}_+^{n+1})$ 2π-периодично по каждой переменной. Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) периодичны, тем самым периодическим является и F. Положим $K^n=\{x\in\mathbf{R}^n|0<x_i<2\pi\}$, $\tilde{K}^n=K^n\setminus F$, $\tilde{K}^{n+1}=\tilde{K}^n\times(0, 2\pi)$. Обозначим через V пополнение множества гладких периодических в $\mathbf{R}^n$ функций $u(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\tilde{K}^n} c(x)u(x)\,dx=0, \tag{41}$$

в метрике, определяемой скалярным произведением

$$(u, v)_V=\int_{\tilde{K}^n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

Лемма 7 (неравенство Пуанкаре). *Для любой гладкой периодической в $\mathbf{R}^n$ функции $u(x)$, удовлетворяющей (41), справедливо неравенство*

$$\|u\|_{2,\tilde{K}^n}\leqslant C\|\nabla u\|_{2,\tilde{K}^n}, \tag{42}$$

где C не зависит от u.

Доказательство. Надобность в этой лемме возникает потому, что известное неравенство Пуанкаре выводится при определенных ограничениях на границу области. Ограничений такого рода на ∂F мы не налагали, хотя неявно они, конечно, есть и содержатся в условиях продолжения. Мы выведем (42) их этих условий. Из (5), (6) вытекает, что для достаточно большого $R>0$ и функции $\eta(x)\in C_0^\infty(K_R)$ существует функция $\widetilde{\eta u}\in C_0^\infty(K_{2R})$ такая, что $\widetilde{\eta u}=\eta u$ на $K_R\setminus F$ и $\|\nabla(\widetilde{\eta u})\|_{\alpha,K_{2R}}\leqslant c_0(R)\times\times\|\nabla(\eta u)\|_{2,K_R\setminus F}$, $\|\widetilde{\eta u}\|_{1,K_{2R}}\leqslant c_0(R)\|\eta u\|_{2,K_R\setminus F}$. Можно считать, что $K^n\subset\subset K_{R/2}$. Зафиксируем R и выберем $\eta(x)$ так, что $0\leqslant\eta(x)\leqslant 1$, $\eta(x)=1$ на $\tilde{K}^n$. Тогда в силу периодичности

$$\|\nabla(\widetilde{\eta u})\|_{\alpha,K^n}\leqslant C(\|u\|_{2,\tilde{K}^n}+\|\nabla u\|_{2,\tilde{K}^n}), \tag{43}$$
$$\|\widetilde{\eta u}\|_{1,K^n}\leqslant C\|u\|_{2,\tilde{K}^n}.$$

Допустим, что (42) неверно, и поэтому найдется последовательность $u_k(x)$ гладких периодических в $\mathbf{R}^n$ функций, для которой

$$\|u_k\|_{2,\tilde{K}^n}=1,\quad 1\geqslant k\|\nabla u\|_{2,\tilde{K}^n}. \tag{44}$$

---

*) Здесь и в дальнейшем $G=\mathbf{R}^n\setminus F\times(-\infty, +\infty)$.

Так как $W^1_{1,\alpha}(K^n)$ компактно вложено в $L_2(K^n)$, то из (43), (44) следует, что $\nabla u_k \to 0$ в $L_2(\tilde{K}^n)$, а по подпоследовательности $u_k \to u$ в $L_2(\tilde{K}^n)$. Поскольку u_k периодичны, то эти же предельные соотношения верны и в $L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\mathbf{R}^n\setminus F})$, но в таком случае $\nabla u = 0$ в $\mathbf{R}^n\setminus F$. Отсюда выводим, что $u = \mathrm{const}$, а так как u удовлетворяет (41), то $u=0$. Это противоречит (44), лемма доказана.

Из леммы 7 следует, что элементы пространства V есть функции из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\mathbf{R}^n\setminus F})$, удовлетворяющие (41) и периодические вместе с производными, а их сужения на $\tilde{K}^n$ образуют подпространство в $W^1_2(\tilde{K}^n)$.

Через W обозначим пополнение множества гладких периодических в $\mathbf{R}^{n+1}$ функций $u(x,t)$, удовлетворяющих (41) при каждом $t \in (0, 2\pi)$, в метрике

$$(u, v)_W = \int_{\tilde{K}^{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt.$$

Элементы W есть периодические вместе с производными по x_i функции, удовлетворяющие (41) при п. в. t, а множество их сужений на $\tilde{K}^{n+1}$ совпадает с $L_2(0, 2\pi, V)$. Всякую функцию из W можно разложить в ряд Фурье по t, поэтому в W всюду плотны конечные суммы вида $\sum_k u_k(x)e^{ikt}$, где $u_k(x)$ — гладкие периодические в $\mathbf{R}^n$ функции. Любой функционал $f \in W^*$ можно представить в виде «суммы производных»

$$\langle f, u\rangle = \int_{\tilde{K}^{n+1}} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dxdt,$$

причем $f_i \in L_2(\tilde{K}^{n+1})$ и $\|f\|_{W^*} = \left(\sum_i \|f_i\|^2_{2,\tilde{K}^{n+1}}\right)^{1/2}$. Условно будем записывать f в виде $f = -\partial f_i/\partial x_i$. Равенство

$$\langle f, u\rangle = \int_{\tilde{K}^{n+1}} fudxdt,$$

где $f \in L_2(\tilde{K}^{n+1})$, вследствие неравенства Пуанкаре тоже определяет функционал $f \in W^*$ — функционал типа функции f.

Нам понадобится теорема о разрешимости абстрактного уравнения

$$Tu + Au = f, \tag{45}$$

в котором T — замкнутый линейный плотно определенный оператор, действующий из $D(T) \subset W$ в W^*, $A: W \to W^*$ — линейный непрерывный коэрцитивный оператор, $f \in W^*$. Этому уравнению посвящена обширная литература. Подходящей для нас оказалась теорема 3 из [8, с. 151], ее условия проверяются ниже. Рассмотрим уравнение

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \tag{46}$$

в котором $f_i \in L_2(\tilde{K}^{n+1})$ периодичны в G. Ищется периодическое в G решение (46), удовлетворяющее на ∂F условию (1). Эту задачу сведем к уравнению (45), для чего определим оператор $T = c(x)\dfrac{\partial}{\partial t}$ как оператор из $D(T) \subset W$ в W^*. Обозначим через D_0 множество всевозможных конечных сумм вида $u(x,t) = \sum_k u_k(x)e^{ikt}$, $u_k(x) \in V$ и для $u \in D_0$ определим $T_0 u$ как функционал типа функции $T_0 u = c(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = c(x) \sum_k iku_k(x)e^{ikt}$. Множество D_0 линейно и плотно в W, и если u, $v \in D_0$, то $\langle T_0 u, v\rangle =$

$= -\langle T_0 v, u\rangle$. Поэтому T_0 допускает замыкание, которое и примем в качестве T. Оператор $A: W \to W^*$ определим равенством

$$\langle Au, v\rangle = \int_{\tilde{K}^{n+1}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dxdt.$$

Он, очевидно, непрерывен и коэрцитивен. Оператор T удовлетворяет на $D(T)$ условию $\langle Tu, u\rangle = 0$, а на подпространстве W_m, состоящем из сумм вида $\sum_{|k|\leqslant m} u_k(x)e^{ikt}$, он ограничен. Пусть $u\in W_m$, $f = Tu$, $f_m = f|W_m$. Для произвольной $v\in W$ через v^m обозначим частную сумму ряда Фурье для v, $v^m = \sum_{|k|\leqslant m} v_k(x)e^{ikt}$. Так как $\langle Tu, v\rangle = \langle Tu, v^m\rangle = \langle f_m, v^m\rangle$, а $\|v^m\|_W \leqslant \leqslant \|v\|_W$, то $|\langle Tu, v\rangle| \leqslant \|f_m\|_{W^*}\cdot\|v\|_W$, откуда $\|Tu\|_{W^*} \leqslant \|f_m\|_{W^*}$. Тем самым выполнены все условия упомянутой выше теоремы из [8] и уравнение (45) с построенными T, A однозначно разрешимо для любого $f\in W^*$. Его решение для $f = \partial f_i/\partial x_i$ будем рассматривать как обобщенное решение поставленной выше задачи для уравнения (46).

Из определения T следует, что для любого $\delta > 0$ найдется $u^\delta \in D_0$ такая, что $Tu^\delta + Au^\delta = f^\delta$, $\|u - u^\delta\|_W \leqslant \delta$, $\|f - f^\delta\|_{W^*} \leqslant \delta$. «Почти-решение» u^δ при некотором m имеет вид $u^\delta = \sum_{|k|\leqslant m} u_k^\delta e^{ikt}$, где $u_k^\delta \in V$, поэтому u_k^δ можно считать гладкими в $\mathbf{R}^n$. Функционал $f - f^\delta$ запишем в виде $f - f^\delta = -\partial g_i^\delta/\partial x_i$ так, чтобы $\|f - f^\delta\|^2_{W^*} = \sum_{i=1}^n \|g_i^\delta\|^2_{2\tilde{K}^{n+1}}$. Из определения u^δ следует, что

$$\int_{\tilde{K}^{n+1}} \left(c\frac{\partial u^\delta}{\partial t}\varphi + a_{ij}\frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dxdt + \int_{\tilde{K}^{n+1}} (f_i + g_i^\delta)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dxdt = 0 \qquad (47)$$

для любой $\varphi \in W$. Но тогда для любой $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$

$$\int_G \left(c\frac{\partial u^\delta}{\partial t}\varphi + a_{ij}\frac{\partial u^\delta}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dxdt + \int_G (f_i + g_i^\delta)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dxdt = 0. \qquad (48)$$

Действительно, условие $\langle c\varphi\rangle_x = 0$ в (47) на самом деле излишне, так как для $\varphi = \varphi(t)$

$$\int_{\tilde{K}^{n+1}} c\frac{\partial u^\delta}{\partial t}\varphi dxdt = i\sum_{|k|\leqslant m} k \int_{\tilde{K}^n} cu_k^\delta dx \int_0^{2\pi} \varphi e^{ikt}dt = 0$$

в силу того, что $u_k^\delta \in V$, и поэтому $\langle cu_k^\delta\rangle = 0$. Ввиду периодичности всех функций в (47) это тождество остается справедливым, если заменить в нем $\tilde{K}^{n+1}$ на $\beta + \tilde{K}^{n+1}$, а тогда верно и (48), если $\operatorname{supp}\varphi \subset \beta + \tilde{K}^{n+1}$ при некотором $\beta\in\mathbf{R}^{n+1}$. К произвольной $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ можно перейти теперь с помощью разбиения единицы.

5. Доказательство основной теоремы. Из условий (4)—(7) следует, что для любых $\delta > 0$, x_0, $h\in\mathbf{R}^n$, $\rho \geqslant \delta$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0\delta$ выполняются условия (11)—(14) с заменой в них F на $F_{\varepsilon,h}$ с теми же константами a, c_0, α, β. Понятно, что продолжения $\tilde{u}$, $\bar{u}$ в (12)—(14) строятся из соответствующих продолжений (5)—(7) с помощью гомотетии и сдвига: преобразование $y = (x - x_0)\rho^{-1}$ отображает $K_\rho(x_0)\setminus F_{\varepsilon,h}$ на $K_1(0)\setminus F_{\varepsilon_1, h_1}$, где $\varepsilon_1 = \rho^{-1}\varepsilon$, $h_1 = h + \varepsilon^{-1}x_0$. Пусть $\varepsilon_k \to 0$, $h_k\in\mathbf{R}^n$ и каждому k в задаче 1 поставлена в соответствие начальная функция $u_{0k}(x)$, $\|u_0^k\|_{\infty, \mathbf{R}^n\setminus F} \leqslant 1$. Соответствующее решение (1) обозначим $u_k(x,t)$. Положим $F_k = F_{\varepsilon_k, h_k}$, $a_{ij}^k(x,t) = a_{ij}(\varepsilon_k^{-1}x + h_k, \varepsilon_k^{-2}t)$, $c^k(x) = c(\varepsilon_k^{-1}x + h_k)$, $u^k(x,t) = u_k(\varepsilon_k^{-1}x + h_k, \varepsilon_k^{-2}t)$. Тогда u^k

будет решением задачи (37) с $u_0^k(x)=u_{0k}(\varepsilon_k^{-1}x+h_k)$. Все условия леммы 6 выполнены и по этой лемме существуют продолжения $v_k(x,t)$ решений $u^k(x,t)$ на $\mathbf{R}_+^{n+1}$, которые по подпоследовательности равномерно на компактах в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ сходятся к некоторой непрерывной функции $v(x,t)$. Ниже строится уравнение, которому удовлетворяет v. Предполагается, что выполнены условия основной теоремы, сформулированной во введении.

Пусть $N_s(y,\tau)$ — решение в смысле п. 4 вспомогательного уравнения

$$c(y)\frac{\partial N_s}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ij}(y,\tau)\frac{\partial N_s}{\partial y_i}\right)=-\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_j}. \qquad (49)$$

Оно формально отличается от (46), но приводится к нему заменой τ на $-\tau$. Для почти-решения $N_s^\delta(y,\tau)$ запишем тождество (48):

$$\int_G\left(c(y)\frac{\partial N_s^\delta}{\partial\tau}\psi-a_{ij}(y,\tau)\frac{\partial N_s^\delta}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\right)dyd\tau=\int_G(a_{sj}+a_{sj}^\delta)\frac{\partial\psi}{\partial y_j}dyd\tau. \qquad (50)$$

В нем a_{sj}^δ периодичны, $a_{sj}^\delta\in L_2(\tilde K^{n+1})$, $\|a_{sj}^\delta\|_{2,\tilde K^{n+1}}\to 0$ при $\delta\to 0$. Поскольку в (50) производная ψ по τ не входит, в качестве ψ можно взять функцию, равную нулю при $\tau<0$, финитную в $\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}}$ и такую, что $\psi,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y_j}\in L_2(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$.

Пусть $\varphi_0(x,t)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$. Свяжем тождество (3) для u^k и тождество (50), полагая $y=\varepsilon_k^{-1}x+h_k$, $\tau=\varepsilon_k^{-2}t$, $\varphi(x,t)=\varphi_0(x,t)+\varepsilon_kN_s^\delta(y,\tau)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_s}$, $\psi(y,\tau)=u^k(x,t)\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_s}$, $\psi=0$ при $\tau<0$. После несложных преобразований получим равенство

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbf{R}^n}\widehat{c^k}\widehat{u_0^k}\varphi(x,0)dx-\int_{\mathbf{R}_+^{n+1}}\Big\{\Big[\hat a_{ij}(y,\tau)\frac{\partial N_s^\delta}{\partial y_i}+\hat a_{sj}(y,\tau)\Big]\widehat{u^k}(x,t)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_s\partial x_j}+\\+\widehat{c^k}\,\widehat{u^k}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\Big\}dxdt=\int_{\mathbf{R}_+^{n+1}}\widehat{a_{sj}^\delta}(y,\tau)\left[\frac{\partial\widehat{u^k}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_s}+\widehat{u^k}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_s\partial x_j}\right]dxdt\equiv\lambda_{k,\delta}.\end{aligned} \qquad (51)$$

В этом равенстве опущены интегралы, содержащие множителем ε_k, которые очевидным образом стремятся к нулю при $k\to\infty$. Пусть $\bar c=\langle c\rangle$,

$$\bar a_{sj}^\delta=\left\langle a_{ij}\frac{\partial N_s^\delta}{\partial y_i}+a_{sj}\right\rangle,\quad \bar a_{sj}=\left\langle a_{ij}\frac{\partial N_s}{\partial y_i}+a_{sj}\right\rangle.$$

Ниже доказана положительная определенность матрицы $(\bar a_{sj})$. Так как $|\widehat{c^ku_0^k}|\leqslant l$ в $\mathbf{R}^n$, то можно считать, что $\widehat{c^ku_0^k}\rightharpoonup w_0(x)$ в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ ($\rightharpoonup$ — слабая сходимость). В силу энергетической оценки (23) и принципа максимума $\widehat\nabla u^k$ равномерно по k ограничены в $L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\mathbf{R}_+^{n+1}})$. Поэтому

$$\lambda_{k,\delta}^2\leqslant c(\varphi_0)\sum_{s,j}\|a_{sj}^\delta\|_{2,\tilde K^{n+1}}^2\to 0$$

при $\delta\to 0$, так что $\lambda_{k,\delta}\to 0$ равномерно по k. Кроме того, $N_s^\delta\to N_s$ в W при $\delta\to 0$, а тогда $\lim\limits_{\delta\to 0}\bar a_{sj}^\delta=\bar a_{sj}$. Переходя в (51) к пределу сначала при $k\to\infty$, а затем при $\delta\to 0$, приходим к соотношению

$$\int_{\mathbf{R}_+^{n+1}}\left(\bar cv\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\bar a_{sj}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_s\partial x_j}\right)dxdt+\int_{\mathbf{R}^n}w_0(x)\varphi_0(x,0)dx=0,$$

которое ввиду произвольности $\varphi_0\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ означает, что v есть решение уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0}=w_0\bar c^{-1}$.

Докажем положительную определенность матрицы $(\bar a_{sj})$. Умножим тождество (48), записанное для N_s^δ, на ξ_s, просуммируем по s и положим

$\varphi = N_s^\delta \xi_s \equiv N^\delta$. Получим равенство

$$\left\langle c \frac{\partial N^\delta}{\partial \tau} N^\delta \right\rangle - \left\langle a_{ij} \frac{\partial N^\delta}{\partial y_j} \frac{\partial N^\delta}{\partial y_i} \right\rangle = \left\langle (a_{sj}\xi_s + a_{sj}^\delta \xi_s) \frac{\partial N^\delta}{\partial y_j} \right\rangle$$

Так как $\left\langle c \frac{\partial N^\delta}{\partial \tau} N^\delta \right\rangle = 0$, то при $\delta \to 0$ это равенство принимает вид

$$\left\langle a_{sj}\xi_s \frac{\partial N}{\partial y_j} \right\rangle = -\left\langle a_{ij} \frac{\partial N}{\partial y_i} \frac{\partial N}{\partial y_j} \right\rangle,$$

где $N = N_s \xi_s$. Отсюда и из формулы для $\bar{a}_{sj}$ находим, что

$$\bar{a}_{sj}\xi_s\xi_j = \left\langle a_{sj}\left(\xi_s + \frac{\partial N}{\partial y_s}\right)\left(\xi_j + \frac{\partial N}{\partial y_j}\right) \right\rangle \geqslant l^{-1} \int_{\bar{K}^{n+1}} |\xi + \nabla N|^2 dy d\tau.$$

Правая часть неравенства есть неотрицательная квадратичная форма от ξ. Если при некотором $\xi \neq 0$ она обращается в нуль, то $\nabla N = -\xi$ в G, а так как $\mathbf{R}^n \setminus F$ связно, то $N(y, \tau) = -\xi y + C(\tau)$. Но при $\xi \neq 0$ это противоречит периодичности N по y.

Докажем основную теорему. Если утверждение (9) несправедливо, то найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $x_k \in \mathbf{R}^n \setminus F$, $u_{0k} \in L_\infty(\mathbf{R}^n \setminus F)$, $t_k \to \infty$ такие, что

$$|u_k(x_k, t_k) - v_k(x_k, t_k)| \geqslant \varepsilon_0, \tag{52}$$

где $v_k(x, t)$ — решение задачи Коши для (8) с начальной функцией $\bar{c}^{-1}\hat{c}(x)\hat{u}_{0k}(x)$, при этом $\|u_{0k}\|_{\infty, \mathbf{R}^n \setminus F} \leqslant 1$. Положим $\varepsilon_k = t_k^{-1/2}$, $h_k = x_k$, $u^k(x, t) = u_k(\varepsilon_k^{-1}x + h, \varepsilon_k^{-2}t)$, $v^k(x, t) = v_k(\varepsilon_k^{-1}x + h_k, \varepsilon_k^{-2}t)$. Тогда (52) принимает вид

$$|u^k(0, 1) - v^k(0, 1)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{53}$$

Как установлено выше, $u^k(x, t)$ равномерно на компактах в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ по подпоследовательности сходятся к $v(x, t)$ — решению (8) с начальной функцией $\bar{c}^{-1}w_0(x)$, $w_0(x)$ — слабый в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ предел $\widehat{c^k}\,\widehat{u_0^k}$. Но это же верно и по отношению к $v^k(x, t)$, которые являются решениями (8) с начальными функциями $\bar{c}^{-1}\widehat{c^k}\,\widehat{u_0^k}$, так что и $v^k(x, t)$ равномерно на компактах в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ сходятся к той же $v(x, t)$. Но тогда $u^k(0, 1) - v^k(0, 1) \to 0$, что противоречит (53). Теорема доказана.

6. Трехмерный периодический каркас. Рассмотрим разбиение $\mathbf{R}^3$ на кубы Ω_k с ребром 1 и соответствующий этому разбиению каркас, устройство которого описано во введении. Для большей геометрической наглядности будем рассматривать каркас, составленный из брусьев не круглого, а квадратичного сечения, иначе говоря, вместо бесконечного цилиндра радиуса 1/4 возьмем бесконечный брус с параллельными координатным плоскостям гранями и квадратом со стороной 1/2 в сечении и из таких брусьев построим каркас. Внутренность каркаса есть $\mathbf{R}^3 \setminus F$, а его внешность — F. Для каждого куба Ω_k введем в рассмотрение два множества Ω_k', Ω_k'': $\Omega_k' = \Omega_k \setminus F$ — «остов» куба, $\Omega_k'' = (\tilde{\Omega}_k \setminus \Omega_k) \cup \Omega_k'$ — «оболочка» куба, $\tilde{\Omega}_k$ — куб с тем же центром, что и Ω_k, и ребром, равным 3/2.

Нам понадобится универсальный оператор продолжения И. Стейна [7, гл. 6]. В [7] доказано, что если Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с минимально гладкой границей (по существу это означает, что Ω удовлетворяет условию конуса, точное определение см. в [7, с. 224]), то существует линейный оператор S, продолжающий функции с Ω на $\mathbf{R}^n$, такой, что $SW_p^k(\Omega) \subset W_p^k(\mathbf{R}^n)$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k = 0, 1 \ldots$, причем $\|Su\|_{W_p^k(\mathbf{R}^n)} \leqslant A_{k,n} \times \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$, $A_{k,n}$ не зависит от u и p. В частности, гладкие в $\bar{\Omega}$ функции S переводит в гладкие функции на $\mathbf{R}^n$, $SW_p^1(\Omega) \subset W_p^1(\mathbf{R}^n)$, $SL_p(\Omega) \subset L_p(\mathbf{R}^n)$, $p \geqslant 1$. Оператор S легко исправить так [2, с. 1304], что в последнем случае градиент будет оцениваться через градиент. Таким образом, для $p \geqslant 1$

$$\|Su\|_{p,\mathbf{R}^n}\leqslant C_{n,p}\,\|u\|_{p,\Omega},\quad \|\nabla Su\|_{p,\mathbf{R}^n}\leqslant C_{n,p}\|\nabla u\|_{p,\Omega}. \tag{54}$$

Заметим, что остов Ω_k' и оболочки Ω_k'' удовлетворяют минимальному условию гладкости из [7].

Разобьем семейство $\{\Omega_k\}$ на два класса — «черные» и «белые» кубы — так, что для каждого куба определенного цвета все смежные с ним гранями имеют противоположный цвет («шахматная» структура в $\mathbf{R}^3$). Пусть $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$. Для каждого белого куба Ω_k продолжим u с остова Ω_k' на $\mathbf{R}^3$ с помощью S и положим $\tilde u|\Omega_k=Su|\Omega_k$. Теперь $\tilde u$ определена на всех белых кубах и тем самым на оболочках всех черных кубов, на каркасе она совпадает с u. Для каждого черного куба Ω_k продолжим $\tilde u$ с оболочки Ω_k'' на $\mathbf{R}^3$ с помощью S и положим $\tilde u|\Omega_k=S\tilde u|\Omega_k$. В результате получим функцию $\tilde u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, совпадающую с u на каркасе. Очевидно, $\tilde u=0$ во всяком случае на всех тех кубах, соседние с которыми, т. е. имеющие хотя бы одну общую граничную точку, не пересекаются с supp u. В соответствии с (54) для белых Ω_k

$$\|\tilde u\|_{2\Omega_k}\leqslant C\|u\|_{2,\Omega_k'},\quad \|\nabla\tilde u\|_{2,\Omega_k}\leqslant C\|\nabla u\|_{2,\Omega_k'}$$

и аналогичные оценки с заменой в них Ω_k' на Ω_k'' верны для черных Ω_k. Но в последнем случае $\tilde u$, $\nabla\tilde u$ на оболочке Ω_k'' можно оценить через u, ∇u на остовах кубов Ω_j, соседних с Ω_k. Таким образом, для всех Ω_k $\|\tilde u\|_{2,\Omega_k}\leqslant C\sum_j\|u\|_{2,\Omega_j'}$, $\|\nabla\tilde u\|_{2,\Omega_k}\leqslant C\sum_j\|\nabla u\|_{2,\Omega_j'}$. Суммирование здесь ведется по всем кубам Ω_j, соседним с Ω_k. Так как число соседних кубов конечно (равно 26), то, суммируя эти неравенства по k, получим оценки

$$\|\tilde u\|_{2,\mathbf{R}^3}\leqslant C\|u\|_{2,\mathbf{R}^3\setminus F},\quad \|\nabla\tilde u\|_{2,\mathbf{R}^3}\leqslant C\|\nabla u\|_{2,\mathbf{R}^3\setminus F}. \tag{55}$$

Для $F_{\varepsilon,h}$ продолжение $\tilde u$ определяем по уже построенному при $\varepsilon=1$, $h=0$ с помощью гомотетии и сдвига, вследствие однородности оценки (55) сохраняются. Ясно также, что если $u\in C_0^\infty(K_1)$, то при достаточно малом $\varepsilon>0$ и всех $h\in\mathbf{R}^3$ $\tilde u\in C_0^\infty(K_2)$. Итак, неравенство (5) справедливо с $\alpha=2$, а (6) (даже в более сильной форме) — с заменой в левой части $\|u\|_{1,K_2}$ на $\|u\|_{2,K_2}$. Описанную процедуру можно осуществить, если u — гладкая в $\mathbf{R}^3$, но уже необязательно финитная функция, и тогда для любой ограниченной области $\Omega\cap\mathbf{R}^3$ $\|\nabla\tilde u\|_{1,\Omega}\leqslant C\|\nabla u\|_{1,\Omega'}$, Ω' — объединение остовов всех кубов, для которых хотя бы один из соседних пересекается с Ω. Тем самым справедливо (7) с $\beta=1$.

Пусть теперь F — замыкание каркаса, $\mathbf{R}^3\setminus F$ — его внешность. Легко видеть, что аналогичная процедура будет осуществима, если в качестве Ω_k взять кубы, центры которых расположены в узлах каркаса. Значит, и здесь условия (5)—(7) выполняются с $\alpha=2$, $\beta=1$. Укажем в заключение, что достаточно общие теоремы о продолжении доказаны в монографии [9]. В недавно появившейся статье [10] установлена общая теорема о продолжении для произвольного периодического F с липшицевой границей. Условиям этой теоремы удовлетворяет и трехмерный периодический каркас. Мы разобрали этот последний случай исключительно ввиду элементарности приведенных здесь рассуждений.

Литература

1. Гущин А. К. // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 4. С. 451—508.
2. Жиков В. В. // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 10. С. 1283—1305.
3. Жиков В. В. // Мат. сб. 1977. Т. 104, № 4. С. 597—616.
4. Жиков В. В. // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 304—318.
5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
6. Валиков К. В. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 686—695.

7. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973.

8. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., 1978.

9. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М., 1990.

10. Agerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D.// Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. 1992. Vol. 18, N 5. P. 481—496.

Владимирский политехнический институт

Поступила в редакцию
9 февраля 1993 г.