M. A. Karapetyants, V. Yu. Protasov, Spaces of Dyadic Distributions,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 2020, Volume 54, Issue 4, 56–63

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 4, с. 56–63

УДК 517.518+517.982.4+517.965

О пространствах двоично-обобщенных функций[1]

© 2020. М. А. Карапетянц, В. Ю. Протасов

Исследуются пространства обобщенных функций на диадической полупрямой — положительной полупрямой, снабженной операцией поразрядного двоичного сложения и стандартной мерой Лебега. Доказано, что не существует пространства обобщенных функций, которое удовлетворяло бы ряду естественных минимальных требований, выдерживало бы преобразование Фурье–Уолша и умножение на линейные функции. Это, в частности, устанавливает оптимальность пространства, построенного С. С. Волосивецом в 2009 г. Продемонстрировано приложение обобщенных функций для исследования масштабирующих уравнений и всплесков на диадической полупрямой.

DOI: https://doi.org/10.1134/faa3799

§ 1. Введение

Существование адекватного определения обобщенных функций медленного роста на диадической полупрямой обсуждалось в литературе и на конференциях в начале 2000-х. Напомним, что диадическая полупрямая — это неотрицательная полупрямая $\mathbb{R}_+$ с введенной на ней операцией поразрядного двоичного сложения: если $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k 2^k$, $y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k 2^k$ — произвольные положительные числа в их двоичной записи (каждая запись начинается последовательностью нулей), то их диадическая сумма определяется как $x \oplus y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k (x_k + y_k)_2$, где $(x_k + y_k)_2$ — сумма по модулю два k-х разрядов в двоичной записи чисел x и y соответственно. При этом $x \ominus y = x \oplus y$. Мера Лебега на диадической полупрямой $\mathbb{R}_+$ совпадает с классической, равно как и все пространства $L_p(\mathbb{R}_+)$, а роль экспонент выполняют функции Уолша. В частности, преобразование Фурье–Уолша является взаимно однозначной изометрией пространства $L_2(\mathbb{R}_+)$. Подробнее о свойствах функций на диадической полупрямой и их приложениях см. в [3], [14].

В 2007 г. Голубов [2] построил пространство обобщенных функций на диадической полупрямой $\mathbb{R}_+$. Оно состоит из непрерывных линейных функционалов на пространстве основных функций $D_d(\mathbb{R}_+)$, которое, в свою очередь, является пространством бесконечно гладких (в диадическом смысле) финитных функций на $\mathbb{R}_+$, таких, что

(1) носители каждой такой функции φ и всех ее двоичных производных φ^{α}, $\alpha \in \mathbb{N}$, лежат в некотором двоичном интервале δ;

[1]Второй автор поддержан грантами РФФИ 20-01-00469 и 19-04-01227. Его исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и финансировалось в рамках господдержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

(2) для любого $\alpha \in \mathbb{N}$ последовательность $\varphi * (\Lambda_n^\alpha)(x)$ равномерно сходится к ψ^α на $\mathbb{R}_+$ при $n \to \infty$, где

$$\Lambda_n^\alpha = \int_0^{2^n} (h(t))^{-\alpha} \psi(x,t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$h(x) = 2^{-n}, \quad 2^n \leqslant x < 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$\psi(x,t)$ — обобщенные функции Уолша (см. соответствующее определение в §2).

Также была предложена конструкция пространства $S_d(\mathbb{R}_+)$ функций, быстро убывающих на бесконечности. В ее основу легли бесконечно гладкие (в диадическом смысле) финитные функции, такие, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{x\to\infty} (h(x))^{-\beta} \varphi^\alpha(x) = 0.$$

Было определено и пространство двоично-обобщенных функций медленного роста как пространство линейных непрерывных функционалов над $S_d(\mathbb{R}_+)$.

Основная проблема в конструкциях пространств D_d and S_d заключается в том, что они не инвариантны относительно преобразования Фурье–Уолша. По этой причине преобразование Фурье–Уолша не будет корректно определено и на соответствующих пространствах обобщенных функций D'_d, S'_d. Данная проблема была решена С. С. Волосивецем в 2009 г. Заметим, что аналогичные конструкции в пространстве L_2 над другими группами появлялись в [4]–[6]. В работе [1] Волосивец предложил другое пространство основных функций, более узкое, чем D_d. Это пространство H_d «двоично-аналитических» функций: конечных линейных комбинаций функций $\chi_{\Delta_{j,k}}$, где χ обозначает характеристическую функцию, а $\Delta_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ — двоичный полуинтервал ранга $j \in \mathbb{Z}$. Название оправдано тем, что $f(\,\cdot\, + h) - f(\,\cdot\,) \equiv 0$ для любой такой функции f при произвольном $h \in (0, 2^{-n})$, где n — наибольший ранг входящего в комбинацию интервала. Топология определяется сходимостью к нулю: $f_k \to 0$ при $k \to \infty$, если у последовательности $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ранги интервалов, входящих в носители, ограничены сверху, носители содержатся в фиксированном отрезке и последовательность сходится к нулю поточечно. Несложно показать, что H_d является полным линейным пространством, инвариантным относительно преобразования Фурье–Уолша. Линейность и полнота проверяются непосредственно. Инвариантность относительно преобразования Фурье–Уолша следует из того, что если $\operatorname{supp} f \subset [0, 2^m]$ и n — максимальный ранг интервалов, входящих в носитель функции f, то $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [0, 2^n]$ и m — максимальный ранг интервалов, входящих в носитель функции $\widehat{f}$. Таким образом, преобразование Фурье–Уолша переводит пространство основных функций H_d в себя. Тогда преобразование Фурье–Уолша на соответствующем пространстве обобщенных функций H'_d (пространстве непрерывных линейных функционалов на H_d) определяется стандартно: для любого $f \in H'_d$ имеем $(\widehat{f}, \varphi) = (f, \check{\varphi})$, $\varphi \in H_d$, где $\check{\varphi}$ — обратное преобразование Фурье–Уолша.

§ 2. О возможности умножений на гладкие функции. Основной результат

Построенные Волосивецем обобщенные функции чрезвычайно удобны в силу их простоты и широты применений. Поскольку пространство основных функций очень узко (оно порождено только двоичными сжатиями и сдвигами функции $\chi_{[0,1)}$), пространство обобщенных функций, напротив, обширно. Например, любая локально суммируемая на $\mathbb{R}_+$ функция f принадлежит H'_d и, следовательно, ее преобразование Фурье–Уолша принадлежит H'_d. Никаких условий медленного роста от f не требуется. Поэтому H'_d содержит, скажем, экспоненты, что неверно для пространства Шварца.

Главным недостатком пространства H'_d является то, что оно не выдерживает умножения на гладкие функции, в частности, на полиномы. Например, не для любой обобщенной функции $f \in H'_d$ будет верно, что $xf \in H'_d$. Возникает естественный вопрос: существует ли пространство обобщенных функций на диадической полупрямой, которое выдерживает как преобразование Фурье–Уолша, так и умножение на гладкие функции, например, полиномы? Следующая теорема дает отрицательный ответ и по сути устанавливает «неулучшаемость» пространства H'_d. Не существует расширения пространства основных функций H_d, которое допускало бы даже умножение на линейные функции.

Нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольных $x, y \in \mathbb{R}_+$, положим $(y, x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty} y_k x_{-1-k}$, где x_i, y_i — цифры двоичного разложения элементов x и y соответственно. Заметим, что указанная сумма всегда содержит конечное число ненулевых слагаемых. Для целого $k \geqslant 0$ функция Уолша определяется как $\mathbf{w}_k(x) = (-1)^{(k,x)}$. Далее, $\psi(x, y) = \mathbf{w}_{[y]}(x)\cdot\mathbf{w}_{[x]}(y)$, где $[y]$ означает целую часть числа y. Преобразование Фурье–Уолша функции $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ определяется формулой $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) f(x)\, dx$, далее оно стандартным образом распространяется на $L_2(\mathbb{R}_+)$. Преобразование Фурье–Уолша является обратимым ортогональным преобразованием пространства $L_2(\mathbb{R}_+)$ [3], [14].

Если определять пространство обобщенных функций на диадической полупрямой, то каким должно быть пространство основных функций? Естественно потребовать, чтобы оно содержало характеристическую функцию единичного интервала $\chi_{[0,1)}$, а также было инвариантно относительно целого сдвига $f(x) \mapsto f(x \oplus 1)$ и относительно двоичного сжатия и растяжения $f(x) \mapsto f(2x)$, $f(x) \mapsto f(x/2)$. В этом случае оно уже содержит H_d. Таким образом, H_d является наименьшим пространством основных функций, удовлетворяющим данным требованиям. Среди требований нет инвариантности относительно преобразования Фурье–Уолша, поскольку оно выполнено автоматически. Действительно, $\widehat{\chi}_{[0,1)} = \chi_{[0,1)}$, поэтому преобразование Фурье–Уолша переводит H_d в себя. Вопрос состоит в том, можно ли расширить H_d так, чтобы оно было инвариантно относительно умножения на алгебраические полиномы? В этом случае и обобщенные функции можно будет умножать на полиномы: если $f \in H'_d$, то обобщенная функция xf определяется, как и в классическом случае: $(xf, \varphi) =$

$(f, x\varphi)$, где (f, φ) обозначает действие обобщенной функции f на пробную функцию φ, $\varphi \in H_d$.

Теорема 1 дает отрицательный ответ на этот вопрос при еще одном естественном условии: пространство обобщенных функций должно содержать $L_2(\mathbb{R}_+)$. Это означает, что произвольный элемент $g \in L_2(\mathbb{R}_+)$ естественным образом действует на пространстве H_d, т. е. что интеграл $\int_{\mathbb{R}_+} fg\,dx$ определен для любой функции f из нового пространства.

Теорема 1. *Не существует линейного пространства измеримых функций на диадической полупрямой, которое содержало бы функцию $\chi_{[0,1)}$, было инвариантно относительно преобразования Фурье–Уолша и относительно умножения на линейные функции и на котором каждый элемент пространства $L_2(\mathbb{R})$ действовал бы по формуле скалярного умножения.*

Доказательство. Предположим, что такое пространство существует, и обозначим его через $\widetilde{H}_d$. Вычислим преобразование Фурье–Уолша функции $f(x) = x\chi_{[0,1)}(x)$. Имеем

$$\widehat{f}(y) = \int_0^1 x \cdot \psi(x,y)\,dx = \int_0^1 x \cdot \mathbf{w}_{[x]}(y) \cdot \mathbf{w}_{[y]}(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \mathbf{w}_{[y]}(x)\,dx,$$

поскольку $\mathbf{w}_{[x]}(y) = \mathbf{w}_0(y) = 1$. Значение данного интеграла зависит только от целой части y. Вычислим его для $y \in [2^n, 2^n+1)$, когда $[y] = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. $[y] = 10\ldots0$ (n нулей); тогда $\mathbf{w}_{[y]}(x) = (-1)^{(2^n,x)} = (-1)^{x_{-n-1}}$. Таким образом, при $y \in [2^n, 2^n+1)$ имеем

$$\int_0^1 x \cdot \mathbf{w}_{[y]}(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot x_{-n-1}\,dx = \sum_{k=0}^{2^{n+1}} (-1)^k \int_{k2^{-n-1}}^{(k+1)2^{-n-1}} x\,dx$$
$$= \sum_{k=0}^{2^{n+1}} (-1)^k \frac{(k+1)^2 - k^2}{2^{2n+3}} = -2^{-(n+1)}.$$

Итак,

$$\widehat{f}(y) = -2^{-(n+1)}, \qquad y \in [2^n, 2^n+1),\ n \in \mathbb{N}.$$

По предположению $\widehat{f}(y) \in \widetilde{H}_d$ и поэтому $y\widehat{f}(y) \in \widetilde{H}_d$. С другой стороны, каждый элемент из $L_2(\mathbb{R}_+)$ естественным образом действует на функциях из $\widetilde{H}_d$. Выберем следующий элемент $g \in L_2(\mathbb{R}_+)$:

$$g(y) = \begin{cases} -1/(n+1) & \text{при } y \in [2^n; 2^n+1),\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$(g, y\widehat{f}(y)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_{2^n}^{2^n+1} \frac{y}{2^{n+1}}\,dy = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{y^2}{2^{n+2}}\bigg|_{2^n}^{2^n+1}$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{2^{2n} - (2^n+1)^2}{2^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} + 2^{-n-2}}{n+1} = \infty.$$

Следовательно, действие $(g, y\widehat{f}(y))$ не определено, что приводит к противоречию. $\square$

Замечание. Можно определить пространство основных функций Q_d как совокупность диадически гладких и быстро убывающих функций. Диадическая гладкость понимается нами как справедливость неравенства

$$\|f(x \oplus t) - f(x)\|_2 \leqslant C(\alpha) \cdot t^{\alpha}, \qquad t > 0,$$

для любого $\alpha > 0$. Быстрое убывание — как обычно: $|f(x)| \leqslant C(x+1)^{-n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}_+$. Пространство Q_d также инвариантно относительно преобразования Фурье–Уолша, и оно выдерживает умножение на диадически гладкие функции ограниченного роста (растущие не быстрее полинома). Однако диадическая гладкость не совпадает с классической, и умножения на линейные функции такое пространство также не выдерживает.

§ 3. Приложения к теории всплесков

Первые примеры всплесков на диадической полупрямой и различных ее обобщениях восходят к работе Лэнга [9], затем общие конструкции были построены в работах [15], [12], [13]. Исследовались также всплески на более общих абелевых группах [10]. Для построения всплесков необходимо решить *масштабирующее уравнение* — функциональное разностное уравнение со сжатием аргумента

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n} c_k \varphi(2x \ominus k), \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

Подобные уравнения также применяются при исследовании диадических аппроксимационных алгоритмов [8]. Теория масштабирующих уравнений на классической прямой $\mathbb{R}$ была в основном построена к концу 1980-х гг. ([7], [11]). Однако на диадической полупрямой многие вопросы оставались нерешенными. Всегда ли уравнение разрешимо и в каком классе функций? Будет ли решение единственным с точностью до умножения на константу? Если решение финитно, то какова длина носителя? Пространство обобщенных функций H_d позволяет дать исчерпывающие ответы на все эти вопросы. Мы формулируем их в теореме 2. Сначала введем необходимые понятия.

Решение масштабирующего уравнения называется масштабирующей функцией. Масштабирующая функция φ является неподвижной точкой *оператора переноса* (transition operator) $Tf = \sum_{k=0}^{2^n} c_k f(2x \ominus k)$, т. е. $T\varphi = \varphi$. Положим $m(y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n} c_k \mathbf{w}_k(y)$. Этот полином Уолша называется маской уравнения. Известно [12], что исследование общих масштабирующих уравнений сводится к случаю $\sum_k c_k = 2$, что равносильно равенству $m(0) = 1$.

Теорема 2. *Для любой последовательности комплексных коэффициентов* $\{c_k\}_{k=0}^{2^n}$ *с суммой, равной* 2, *масштабирующее уравнение имеет единственное, с точностью до умножения на константу, обобщенное решение* $\varphi \in H_d'$. *Это* *решение имеет носитель на отрезке* $[0, 2^n]$, *и его преобразование Фурье задается формулой*

$$\widehat{\varphi}(y) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}y).$$

Более того, для любой финитной суммируемой функции $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ *последовательность* $T^k f$ *сходится в пространстве* H'_d *к решению* $c\varphi$, *где* $c = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,dx$.

Доказательство. Пользуясь свойствами преобразования Фурье–Уолша, получаем $\widehat{Tf}(y) = m(y/2)\widehat{f}(y/2)$. Следовательно, для каждого k

$$\widehat{T^k f}(y) = \widehat{f}(2^{-k}y) \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}y). \tag{1}$$

Покажем, что для любой финитной функции $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ произведение (1) сходится равномерно на каждом отрезке $[0, 2^N]$. Заметим, что функция $m(y)$ является полиномом Уолша степени 2^n, поэтому она постоянна на двоичных интервалах ранга n. А так как $\sum_i c_i = 2$, то $m(0) = 1$. Поэтому $m(z) = 1$ для всех $z \in [0, 2^{-n})$. Следовательно, при $k > n + N$ имеем $2^{-k}y \in [0, 2^{-n})$ для любого $y \in [0, 2^N]$, а значит, $m(2^{-k}y) = 1$. Таким образом, на отрезке $[0, 2^N]$ каждый сомножитель в произведении (1) с номером $k > n+N$ тождественно равен единице; следовательно, произведение равномерно сходится на этом отрезке. Таким образом, произведение (1) сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{R}_+$, а следовательно, оно сходится в смысле обобщенных функций в H'_d. Значит, и $T^k f$ сходится в H'_d к некоторой обобщенной функции ψ. Тогда $T\psi = \psi$, т. е. ψ — решение масштабирующего уравнения.

Так как функция f финитна, можно предполагать, что ее носитель расположен на полуинтервале $[0, 2^{\ell})$. Тогда на $[0, 2^{-\ell})$ функция $\widehat{f}$ тождественно равна $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}_+} f\,dt = c$. При $k > \ell + N$ имеем $2^{-k}y \in [0, 2^{-\ell})$ для любого $y \in [0, 2^N]$, а значит, $\widehat{f}\big(2^{-k}y\big) = c$. Следовательно, произведение (1) сходится при $k \to \infty$ к произведению $c\prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}y)$. Значит, обратное преобразование Фурье–Уолша этого произведения является решением масштабирующего уравнения. Поэтому и обратное преобразование Фурье–Уолша произведения $\prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}y)$ является масштабирующей функцией. Обозначим ее через φ. Итак, для любой финитной функции f последовательность $T^k f$ сходится к $c\varphi$.

Пусть теперь φ_0 — произвольное финитное решение масштабирующего уравнения. Так как $T\varphi_0 = \varphi_0$, то $T^k\varphi_0 = \varphi_0$ для любого k. Значит, последовательность $T^k\varphi_0$ сходится к φ, поэтому функция φ_0 пропорциональна φ (точнее, $\varphi_0 = \varphi \int_{\mathbb{R}} \varphi_0\,dx$). Это доказывает единственность решения. Наконец, для доказательство того, что носитель решения лежит на отрезке $[0, 2^n]$, достаточно взять произвольную функцию f с носителем на этом отрезке. Тогда носитель функции Tf также лежит на этом отрезке, а значит, и носители всех функций $T^k f$. Поэтому, предел последовательности $T^k f$ (являющийся решением) имеет носитель на том же отрезке. $\square$

Теорема 2 позволяет исследовать свойства решений многих масштабирующих уравнений [11]. Например, имеет место следующий факт, полезный в теории вероятностей и при изучении уточняющих схем (subdivision schemes) в теории приближений.

Следствие 1. *Если все коэффициенты c_k неотрицательны, то решение φ, нормированное условием $\int_{\mathbb{R}_+} \varphi\, dx = 1$, является неотрицательной обобщенной функцией.*

Доказательство. Возьмем $f = \chi_{[0,1)}$ и рассмотрим последовательность $T^k f$. Поскольку оператор T переводит неотрицательные обобщенные функции в неотрицательные, все члены этой последовательности неотрицательны. Следовательно, и ее предел, являющийся решением масштабирующего уравнения, также неотрицателен. □

Благодарности. Авторы признательны С. С. Волосивецу за ценные обсуждения работы, а также анонимному рецензенту за внимательное чтение и полезные замечания.

Литература

[1] С. С. Волосивец, *О некоторых приложениях* **P***-ичных обобщенных функций и приближении системой* **P***-ичных сдвигов одной функции*, Сиб. матем. журн., **50**:1 (2009), 3–18.

[2] Б. И. Голубов, *Двоичные обобщенные функции*, Матем. сб., **198**:2 (2007), 67–90.

[3] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша*: *Теория и применения*, Наука, М., 1987.

[4] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *P-adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, River Edge, 1994.

[5] F. Bruhat, *Distributions sur un groupe localemont compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques*, Bull. Soc. Math. France, **89** (1961), 43–75.

[6] M. H. Taibleson, *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, Princeton, 2015.

[7] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001.

[8] М. А. Карапетянц, *Уточняющие алгоритмы на диадической полупрямой*, Изв. РАН. Сер. матем., **84**:5 (2020), 98–118.

[9] W. C. Lang, *Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group*, Intern. J. Math. Math. Sci., **21**:2 (1998), 307–317.

[10] С. Ф. Лукомский, Г. С. Бердников, Ю. С. Крусс, *Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина*, Матем. заметки, **98**:2 (2015), 310–313.

[11] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

[12] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, *Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой*, Матем. сб., **197**:10 (2006), 129–160.

[13] Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков, *Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши*, Матем. заметки, **86**:3 (2009), 429–444.

[14] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series*: *An introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.

[15] Ю. А. Фарков, *Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах*, Изв. РАН. Сер. матем., **69**:3 (2005), 193–220.

М. А. Карапетянц
Московский физико-технический институт, Москва, Россия
Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: karapetyantsmk@gmail.com

Поступила в редакцию
20 мая 2020 г.
После доработки
16 июля 2020 г.
Принята к публикации
22 июля 2020 г.

В. Ю. Протасов
University of L'Aquila, L'Aquila, Italy
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
E-mail: v-protassov@yandex.ru