Г. А. Бакай, О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей, *Труды МИАН*, 2022, том 316, 47–63

DOI: 10.4213/tm4207

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2022, т. 316, с. 47–63

УДК 519.214.8

О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей*

Г. А. Бакай[a]

Поступило 01.04.2021; после доработки 09.05.2021; принято к публикации 03.10.2021

Рассматриваются локальные теоремы для аддитивных функционалов от последовательностей, обладающих свойством регенерации — последовательностей случайных векторов $\{S_n\}_{n\ge 0}$ специального вида. Изучаются два случая регенерации: собственная и обрывающаяся. В предположении, что циклы регенерации удовлетворяют условию Крамера, в случае собственной регенерации в ряде работ А.А. Боровкова, А.А. Могульского и Е.И. Прокопенко, а также в работе А.В. Шкляева и Г.А. Бакая получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(S_n = x) \sim D(x/n)n^{-d/2}\exp(-L(x/n)n)$, $n\to\infty$, равномерные по $x/n = x(n)/n \in \mathbb{R}^d$, лежащим в некотором компакте, с некоторыми функциями D и L. В случае обрывающейся регенерации аналогичные результаты получены в работе Бакая, причем в этом случае выделена еще одна зона уклонений, в которой результат имеет вид $\mathbf{P}(S_n = x) \sim D_0(x/n)n^{-(d-1)/2}\exp(-L_0(x/n)n)$, $n\to\infty$, с некоторыми функциями D_0 и L_0. Соотношение выполнено равномерно по $x/n = x(n)/n \in \mathbb{R}^d$, лежащим в некотором компакте. В данной работе найден альтернативный способ вычисления функций, фигурирующих в асимптотиках, а также получены эквивалентные условия для данных теорем.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4207

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем говорить, что последовательность случайных векторов $\{S_n\}_{n\ge 0}$, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, $S_n\in\mathbb{R}^d$, обладает *обобщенным свойством регенерации* (о.с.р.), если $S_0=0$ и при $n>0$

$$S_n=\begin{cases}\xi_0, & \text{если }\ \eta_0\ge n,\\ \xi_0+\zeta, & \text{если }\ \eta_0=n-k,\ \eta_1>k,\ 0<k\le n,\\ \xi_0+\sum\limits_{j=1}^{r}\xi_j+\zeta, & \text{если }\ \eta_0+\sum\limits_{j=1}^{r}\eta_j=n-k,\ \eta_{r+1}>k,\ 0\le k\le n,\ r\in\mathbb{N},\end{cases} \tag{1.1}$$

где ξ_j, $j\ge 0$, суть d-мерные случайные векторы, η_0 — неотрицательная собственная случайная величина, η_j — положительные, но, возможно, несобственные величины, ζ — случайный вектор в $\mathbb{R}^d$ такие, что

(1) векторы (ξ_j,η_j), $j\in\mathbb{N}$, одинаково распределены и независимы в совокупности, $\xi_1\in\mathbb{R}^d$, $\eta_1\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$;

(2) вектор (ξ_0,η_0) не зависит от последовательности $\{(\xi_j,\eta_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\xi_0\in\mathbb{R}^d$, $\eta_0\in\mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$;

---

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00111).

[a] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

E-mail: gavrik_lur_bakay@mail.ru

(3) случайный вектор ζ при любом r при условии события

$$\left\{\eta_0+\sum_{j=1}^{r}\eta_j=n-k,\ k<\eta_{r+1}<+\infty\right\},\qquad n\in\mathbb{N}_0,\quad 0\le k\le n,\quad r\in\mathbb{N}_0,$$

имеет не зависящее от r распределение и не зависит от случайных векторов $\{(\xi_j,\eta_j)\}_{j=0}^{r}$ при условии того же события при любом $r\in\mathbb{N}_0$. Будем использовать обозначение $\widehat{\xi}_k$ для вектора с описанным выше распределением. На событии

$$\left\{\eta_0+\sum_{j=1}^{r}\eta_j=n-k,\ \eta_{r+1}=+\infty\right\}$$

вектор ζ полагаем равным нулю.

Будем использовать обозначение (ξ,η) в качестве общего обозначения для величин с тем же распределением (ξ_j,η_j), $j\in\mathbb{N}$.

Проясним определение *обобщенного свойства регенерации*. Так, если $\eta=1$, $\eta_0=0$, $\xi_0=0$ п.н., то $\{S_n\}_{n\ge0}$ есть случайное блуждание в $\mathbb{R}^d$. Если же $\eta=\eta_0=1$ п.н., то $\{S_n\}_{n\ge0}$ является случайным блужданием, в котором первый шаг имеет, вообще говоря, отличное от остальных распределение. Если распределение η нетривиально и вектор ζ тождественно равен нулю, то $\{S_n\}_{n\ge0}$ является обобщенным процессом восстановления, в котором, вообще говоря, первый шаг имеет отличное от остальных распределение.

Еще одним характерным примером такого рода последовательностей является последовательность частичных сумм функционалов от однородной цепи Маркова. Пусть Z_i, $i\in\mathbb{N}_0$, — марковская цепь, w_1 — некоторое возвратное состояние, g — некоторый функционал от состояний цепи. В качестве η в таком случае возьмем длину цикла по возвращению в состояние w_1, а в качестве ξ — сумму значений функционала от состояний цепи за такой цикл, т.е.

$$\tau_0:=\min\bigl\{k\in\mathbb{N}_0\colon\ Z_k=w_1\bigr\},\qquad \xi_0:=\sum_{j=0}^{\tau_0}g(Z_j),$$

$$\tau_i:=\min\bigl\{k>\tau_{i-1}\colon\ Z_k=w_1\bigr\},\qquad \eta_i:=\tau_i-\tau_{i-1},\qquad \xi_i:=\sum_{j=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i}g(Z_j),\qquad i\in\mathbb{N}.$$

В этом случае событие

$$\left\{\eta_0+\sum_{j=1}^{r}\eta_j=n-k,\ k<\eta_{r+1}<+\infty\right\},\qquad n\in\mathbb{N}_0,\quad 0\le k\le n,\quad r\in\mathbb{N}_0,$$

означает, что марковская цепь в момент $n-k$ вышла из данного состояния w_1, но не успела вернуться в него до момента n. При этом величина ζ представляет собой сумму значений нашего функционала от состояний цепи на указанном неполном цикле.

Если вероятность $\mathbf{P}(\eta=+\infty)$ равна нулю, то регенерацию будем называть *собственной*. Если же данная вероятность принадлежит интервалу $(0,1)$, то регенерацию будем называть *несобственной* или *обрывающейся*.

Несобственная регенерация, характеризуемая свойством $\mathbf{P}(\eta=+\infty)\in(0,1)$, возникает, например, при рассмотрении марковской цепи, в которой в качестве w_1 выбирается невозвратное состояние.

Точные асимптотики вероятностей больших уклонений в локальной форме для обобщенных процессов восстановления изучались в цикле работ [6, 7, 10–14] и в работе [2]. При дополнительных предположениях о распределении векторов (ξ_0,η_0), (ξ,η), $\{\widehat{\xi}_k\}_{k\ge0}$ в указанных работах в собственном случае получены точные асимптотики вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n = x) \sim \frac{D(x/n)}{n^{d/2}} \exp\Bigl(-L\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr)n\Bigr), \qquad n \to \infty, \tag{1.2}$$

равномерные по x/n из некоторого компакта. Функции D и L будут определены далее.

Если $\widehat{\xi}_k = 0$ для всех $k \ge 0$, то $\{S_n\}_{n\ge0}$ является неоднородным обобщенным процессом восстановления. В случае, когда распределение вектора (ξ,η) является нерешетчатым, в работах [6, 7] (в одномерном случае $d = 1$) и [11] (в многомерном случае) получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений в интегро-локальной форме. В работе [13] исследован случай, когда $\widehat{\xi}_k = \xi_{r+1}$ для всех $k \ge 0$. В арифметическом случае аналогичные результаты в локальной форме получены в работах [10] (в одномерном случае) и [14] (в многомерном случае).

Часть результатов, близких к полученным в работах [6, 7, 10–14], была также доказана в работе [2], где в сильно арифметическом случае найдены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для распределений случайных векторов $\widehat{\xi}_k$, отличных от нуля.

В несобственном случае точные асимптотики вероятностей больших уклонений получены в работе [1]. При этом в данной работе рассмотрены два варианта поведения асимптотики рассматриваемых вероятностей. В одном из них асимптотика имеет тот же вид, что и в соотношении (1.2), при этом несобственность регенерации в этом случае несущественна. Во втором варианте асимптотика имеет вид

$$\mathbf{P}(S_n = x) \sim \frac{D_0(x/n)}{n^{(d-1)/2}} \exp\Bigl(-L_0\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr)n\Bigr), \qquad n \to \infty, \tag{1.3}$$

и в этом случае несобственность распределения величин η играет определяющую роль. Здесь D_0 и L_0 — некоторые функции, определенные ниже.

Выражения для функций D и L в соотношении (1.2), равно как и для функций D_0 и L_0 в (1.3), в указанных работах были получены в терминах распределений случайных векторов (ξ_0,η_0), (ξ,η) и $\widehat{\xi}_k$, $k \ge 0$. Однако в ряде приложений отыскание распределений указанных векторов и их моментов достаточно трудоемко. Дополнительной сложностью для применения упомянутых теорем является то, что условия в них выражены в терминах циклов регенерации, но не распределения $\{S_n\}_{n\ge0}$, которое зачастую значительно проще для исследования.

В данной работе предлагается иной подход к нахождению функций D и L, а также к проверке моментных условий на распределения (ξ_0,η_0), (ξ,η), ζ. Предположим, что последовательность $\{S_n\}_{n\ge0}$ обладает о.с.р. вида (1.1), регенерация является собственной и при $n \to \infty$ выполнены соотношения

$$\mathbf{E}\exp(\langle h, S_n\rangle) = \rho^n(h)\bigl(\rho_0(h) + \delta^n o(1)\bigr), \qquad h \in K \subset H, \tag{1.4}$$

$$\max\bigl\{\mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h,\xi_0\rangle);\, \eta_0 \ge n\bigr),\, \mathbf{E}\exp(\langle h,\widehat{\xi}_n\rangle)\,\mathbf{P}(\eta > n)\bigr\} = \delta^n\rho^n(h)o(1), \tag{1.5}$$

где H — некоторое открытое подмножество $\mathbb{R}^d$, K — его произвольное компактное подмножество, величина $\delta \in (0,1)$ зависит только от множества K, $o(1)$ равномерно мало по $h \in K$. Тогда при некоторых дополнительных условиях на функции ρ_0 и ρ справедливо соотношение (1.2) и функции D и L выражаются в терминах функций ρ_0 и ρ.

Для случая несобственной регенерации также получены подобные теоремы в условиях, аналогичных (1.4) и (1.5).

Отметим также работу [8], в которой получены точные асимптотики вида (1.2) в условиях, подобных (1.4). В работе [8] рассматриваются последовательности случайных величин значительно более общего вида, чем последовательности, обладающие о.с.р. вида (1.1), ввиду чего на функции ρ_0 и ρ в соотношении (1.4) накладываются более жесткие условия.

Полученные результаты имеют приложения к задаче о больших уклонениях максимума случайного блуждания. Данная задача рассматривалась ранее в работах [3, 5, 9, 15] и приводится здесь в качестве иллюстрации нового подхода к решению этой задачи.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 введены основные обозначения, в разд. 3 сформулированы основные теоремы. Их доказательства содержатся в разд. 4. В разд. 5 полученные результаты применяются к задаче о больших уклонениях максимума крамеровского случайного блуждания. Раздел 6 содержит доказательства вспомогательных утверждений.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\geq 0}$ обладает о.с.р. вида (1.1). Введем при $h \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$ следующие функции:

$$r_{0,k}(h) := \mathbf{E}\big(e^{\langle h,\xi_0\rangle};\, \eta_0 = k\big), \qquad R_0(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} r_{0,k}(h) = \mathbf{E}\big(\exp(\langle h,\xi_0\rangle + t\eta_0)\big), \tag{2.1}$$

$$\widehat{r}_{0,k}(h) := \mathbf{E}\big(e^{\langle h,\xi_0\rangle};\, \eta_0 > k\big), \qquad \widehat{R}_0(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \widehat{r}_{0,k}(h), \tag{2.2}$$

$$r_k(h) := \mathbf{E}\big(e^{\langle h,\xi\rangle};\, \eta = k\big), \qquad R(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} r_k(h) = \mathbf{E}\big(\exp(\langle h,\xi\rangle + t\eta);\, \eta < +\infty\big), \tag{2.3}$$

$$\widehat{r}_k(h) := \mathbf{E}\big(e^{\langle h,\widehat{\xi}_k\rangle}\big)\,\mathbf{P}(k < \eta < +\infty) + \mathbf{P}(\eta = +\infty), \qquad \widehat{R}(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \widehat{r}_k(h). \tag{2.4}$$

Пусть

$$\begin{gathered}\widehat{A}_0 := \operatorname{int}\big\{(h,t) \in \mathbb{R}^{d+1}\colon\ \max\{R_0(h,t), \widehat{R}_0(h,t), \widehat{R}(h,t)\} < +\infty\big\},\\ \widetilde{A} := \operatorname{int}\big\{(h,t) \in \mathbb{R}^{d+1}\colon\ R(h,t) < +\infty\big\}, \qquad A := \widetilde{A} \cap \widehat{A}_0.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Отметим, что функция $R(h_0,\cdot)$ строго монотонна по второй переменной на области определения. Предположим, что множество $\widetilde{A}$ непусто, и положим

$$\widetilde{B} := \operatorname{int}\big\{h \in \mathbb{R}^d\colon\ \exists t \in \mathbb{R}\colon\ R(h,t) > 1,\ (h,t) \in \widetilde{A}\big\}. \tag{2.6}$$

Если множество $\widetilde{B}$ непусто, то неявная функция $t_0(h)$, задаваемая уравнением

$$R(h, t_0(h)) = 1,$$

является выпуклой вверх и бесконечно дифференцируемой на множестве $\widetilde{B}$ в силу теоремы о неявной функции и аналитичности функции $R(h,t)$ на $\widetilde{A}$. Пусть

$$B := \operatorname{int}\big\{h \in \widetilde{B}\colon\ (h, t_0(h)) \in \widehat{A}_0\big\}. \tag{2.7}$$

Также нам потребуются следующие условия.

Пусть Y — собственный случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^k$ для некоторого натурального k, F — его функция распределения. Положим

$$J(F) := \big\{\{\widetilde{C},\widetilde{b}\},\ \widetilde{C} \in M^{k\times k}(\mathbb{R}),\ \widetilde{b} \in \mathbb{R}^k\colon\ \mathbf{P}(Y - \widetilde{b} \in \widetilde{C}\mathbb{Z}^k) = 1\big\}.$$

Здесь $M^{k\times k}(\mathbb{R})$ — множество квадратных матриц размера k над полем вещественных чисел. Распределение вектора Y будем называть *решетчатым*, если $J(F)$ непусто. Будем предполагать, что

$$\min\big\{\operatorname{rk}\widetilde{C}\colon\ \exists\widetilde{b} \in \mathbb{R}^d\colon\ \{\widetilde{C},\widetilde{b}\} \in J(F)\big\} = k,$$

иными словами, вектор Y не вкладывается в линейное подпространство размерности, меньшей k, в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Показателем решетчатости распределения Y назовем величину

$$q(F) := \max\bigl\{\det \widetilde{C}\colon\ \exists \widetilde{b} \in \mathbb{R}^d\colon\ \{\widetilde{C}, \widetilde{b}\} \in J(F)\bigr\}.$$

Пусть $\widetilde{C}_0$ и $\widetilde{b}_0$ таковы, что $\det \widetilde{C}_0 = q(F)$ и $\{\widetilde{C}_0, \widetilde{b}_0\} \in J(F)$. Множество $\widetilde{C}_0\mathbb{Z}^k$ будем называть *решеткой распределения* Y. Если $\widetilde{b}_0 \in \widetilde{C}_0\mathbb{Z}^k$, то будем говорить, что распределение Y не имеет сдвига; в противном случае вектор $\widetilde{b}_0$ будем называть *сдвигом распределения*. Решетка и сдвиг распределения, вообще говоря, определяются неоднозначно.

Решеткой и сдвигом для несобственного распределения случайного вектора Y будем называть решетку и сдвиг собственного распределения, которое определяется формулой

$$\mathbf{P}(\widehat{Y} \in G) = \mathbf{P}\bigl(Y \in G \bigm| \|Y\| < +\infty\bigr), \qquad G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ — борелевская сигма-алгебра подмножеств $\mathbb{R}^d$.

В работах [2] и [6, 7, 10–14] в случае собственной регенерации накладываются следующие условия на величины (ξ, η), (ξ_0, η_0) и ζ:

(LC1) распределение вектора (ξ, η) не имеет сдвига и имеет решетку $C\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$, где C — невырожденная матрица;

(LC2) носитель распределения вектора (ξ_0, η_0) содержится в $C\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$;

(LC3) носитель распределения вектора $\widehat{\xi}_k$ при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ содержится в $C\mathbb{Z}^d$;

(MC1) множество B, определенное в (2.7), непусто.

Положим

$$B' := \bigl\{-\operatorname{grad} t_0(h)\colon\ h \in B\bigr\}. \tag{2.8}$$

В случае собственной регенерации в работе [2] получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{S_n\}_{n\ge 0}$ *обладает о.с.р. вида* (1.1), *причем выполнены условия* (LC1)–(LC3) *и* (MC1). *Пусть векторы* $x = x(n) \in C\mathbb{Z}^d$ *таковы, что* $x/n \in K'$ *при всех* n *для некоторого компакта* $K' \subseteq B'$. *Тогда равномерно по* $x/n \in K'$ *выполнено соотношение* (1.2):

$$\mathbf{P}(S_n = x) \sim \frac{D(x/n)}{n^{d/2}} \exp\Bigl(-L\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr)n\Bigr), \qquad n \to \infty.$$

Здесь

$$L(\theta) = \langle \theta, h_\theta \rangle - (-t_0(h_\theta)), \qquad h_\theta\colon\ -t_0'(h_\theta) = \theta, \qquad \theta \in B', \tag{2.9}$$

$$\alpha_0(h) := \bigl((\ln R)_t'(h,t)|_{(h,t_0(h))}\bigr)^{-1}, \qquad G(h) := \frac{R_0(h,t_0(h))\,\alpha_0(h)\,\widehat{R}(h,t_0(h))}{\sqrt{(2\pi)^d \det(-t_0''(h))}}, \qquad h \in B, \tag{2.10}$$

$$D(\theta) := (\det C)\, G(h_\theta). \tag{2.11}$$

Замечание 1. Функция $L(\theta)$ называется *второй функцией уклонения* случайного вектора (ξ, η); она была введена в работе [4].

В случае несобственной регенерации в работе [1] выделены две зоны уклонений. Первая из них соответствует случаю $x/n \in B'$, где B' определяется соотношением (2.8). При этом асимптотики вероятностей больших уклонений имеют вид, описываемый соотношением (1.2), где функции L и D определяются соотношениями (2.9) и (2.11).

Определим вторую зону уклонений для случая несобственной регенерации. Положим

$$B_0 := \bigl\{h \in \widetilde{B}\colon\ t_0(h) = 0,\ (h,0) \in \operatorname{int}\{(h,t) \in \mathbb{R}^d\colon\ R_0(h,t) + \widehat{R}_0(h,t) < +\infty\}\bigr\}, \tag{2.12}$$

$$B_0' := \operatorname{int}\bigl\{-\beta \operatorname{grad} t_0(h)\colon\ h \in B_0,\ \beta \in (0,1)\bigr\}.$$

Введем следующее условие:

(MC2) множество B_0, определенное в (2.12), непусто.

На множестве B_0' определим отображения

$$\beta_0 = \beta_0(\theta)\colon\ B_0' \to (0,1), \qquad t_0\bigl(h_{\theta/\beta_0(\theta)}\bigr) = 0, \tag{2.13}$$

$$\gamma = \gamma(\theta)\colon\ B_0' \to \mathbb{R}^d, \qquad \gamma(\theta) = \frac{\theta}{\beta_0(\theta)}. \tag{2.14}$$

В работе [1] доказана следующая

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\ge 0}$ обладает о.с.р. вида* (1.1), *регенерация является несобственной, причем выполнены условия* (LC1)–(LC3) *и* (MC2). *Пусть векторы $x = x(n) \in C\mathbb{Z}^d$ таковы, что $x/n \in K_0'$ при всех n для некоторого компакта $K_0' \subseteq B_0'$. Тогда равномерно по $x/n \in K_0'$ выполнено соотношение* (1.3):

$$\mathbf{P}(S_n = x) \sim \frac{D_0(x/n)}{n^{(d-1)/2}} \exp\Bigl(-L_0\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr)n\Bigr), \qquad n \to \infty.$$

Здесь

$$L_0(\theta) = \langle \theta, h_{\gamma(\theta)}\rangle, \qquad \theta \in B_0', \tag{2.15}$$

$$\alpha_0(h) := \bigl((\ln R)_t'(h,t)|_{(h,t_0(h))}\bigr)^{-1}, \qquad G_0(h) := \frac{R_0(h,t_0(h))\,\alpha_0(h)\,\mathbf{P}(\eta = +\infty)}{\sqrt{(2\pi)^{d-1}\det(-t_0''(h))}}, \qquad h \in B_0, \tag{2.16}$$

$$D_0(\theta) := (\det C)\,\frac{G_0(h_{\gamma(\theta)})}{\sqrt{(\beta_0^{d-1}(\theta))\langle \gamma(\theta), (-t_0''(h_{\gamma(\theta)}))^{-1}\gamma(\theta)\rangle}}. \tag{2.17}$$

Замечание 2. Функция $\beta_0(\theta)$, определенная в (2.13), не является линейной функцией θ на множестве B_0'. Однако если вектор $\vec{e} \in \mathbb{R}^d$ и число $c > 0$ таковы, что $\vec{e} \in B_0'$, $c\vec{e} \in B_0'$, то справедливы соотношения

$$\beta_0(c\vec{e}) = c\beta_0(\vec{e}).$$

Кроме того, отображение $\gamma(\theta)$ постоянно вдоль каждого направления:

$$\gamma(c\vec{e}) = \gamma(\vec{e}).$$

Следовательно, функция $D_0(\theta)$, определенная в (2.17), удовлетворяет соотношению

$$D_0(c\vec{e}) = c^{-(d-1)/2} D_0(\vec{e}).$$

Замечание 3. В одномерном случае $d = 1$ функция $D_0(\theta)$ не зависит от θ в силу замечания 2 и имеет вид

$$D_0(\theta) = \frac{R_0(h_\gamma, t_0(h_\gamma))\,\alpha_0(h_\gamma)\,\mathbf{P}(\eta = +\infty)}{\gamma}.$$

Использование полученных результатов, как было сказано выше, затрудняется тем, что их описание происходит на основе циклов регенерации. Так, условие (MC1) в теореме 1 и условие (MC2) в теореме 2 зачастую неудобны для проверки в распространенной ситуации, когда распределения векторов (ξ,η), (ξ_0,η_0), $\widehat{\xi}_k$, $k\in\mathbb{N}_0$, не имеют компактного аналитического выражения. Кроме того, выражения для функций $D(\cdot)$, $L(\cdot)$ и $D_0(\cdot)$, $L_0(\cdot)$ в асимптотиках также получены в терминах циклов регенерации, что затрудняет работу с ними в ряде приложений.

Основная цель работы — получить альтернативные выражения для функций в соотношениях теорем 1 и 2 и найти эквивалентные условия вместо (MC1) и (MC2).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{S_n\}_{n\ge 0}$ *обладает о.с.р. вида* (1.1) *и выполнены условия* (LC1)–(LC3). *Рассмотрим непустое открытое множество* $H\subset\mathbb{R}^d$. *Пусть для произвольного компактного подмножества* K *множества* H *найдется такое* $\delta=\delta(K)\in(0,1)$, *что выполнены соотношения*

$$\mathbf{E}\exp(\langle h,S_n\rangle)=\rho_0(h)\rho^n(h)+o(1)(\delta\rho(h))^n,\qquad n\to\infty, \tag{3.1}$$

$$\max\{r_{0,n}(h),\widehat{r}_{0,n}(h),\widehat{r}_n(h)\}=o(1)(\delta\rho(h))^n, \tag{3.2}$$

где $o(1)$ *равномерно мало по* $h\in K$. *Функции* $r_{0,n}(h)$, $\widehat{r}_{0,n}(h)$, $\widehat{r}_n(h)$, $n\in\mathbb{N}$, *определены в* (2.1), (2.2), (2.4) *соответственно. Предположим также, что функция* $\rho(h)$ *непрерывна и положительна на* H, *функция* $\rho_0(h)$ *положительна, ограничена и отделена от нуля на* K. *Тогда последовательность* $\{S_n\}_{n\ge0}$ *удовлетворяет условию* (MC1), *т.е. множество* B, *определенное в* (2.7), *непусто, причем* $H\subseteq B$. *Более того, функция* $\rho(h)$ *бесконечно дифференцируема на* H *и при* $h\in H$ *справедливы соотношения*

$$\rho_0(h)=R_0(h,t_0(h))\,\alpha_0(h)\widehat{R}(h,t_0(h)),\qquad \rho(h)=\exp(-t_0(h)). \tag{3.3}$$

Таким образом, если для последовательности $\{S_n\}_{n\ge0}$ выполнены условия теоремы 3, то для нее выполнены условия теоремы 1. Следовательно, справедливо соотношение (1.2), причем выражение для функции $G(h)$, определенной в (2.16), может быть получено из соотношения (3.3).

Теорема 3 позволяет установить непустоту множества B, не используя напрямую распределение вектора (ξ,η) и явный вид функции $R(h,t)$. Однако теорема 3 не включает в себя случай, рассмотренный в теореме 2.

Введем последовательность событий

$$G_0:=\Omega,\qquad G_n:=\left\{\eta_0=0,\ \exists r\in\mathbb{N}\colon\ \sum_{i=1}^{r}\eta_i=n\right\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\{S_n\}_{n\ge0}$ *обладает о.с.р. вида* (1.1) *и выполнены условия* (LC1)–(LC3). *Рассмотрим непустое открытое множество* $H_1\subset\mathbb{R}^d$. *Пусть для произвольного компактного подмножества* K_1 *множества* H_1 *найдется такое* $\delta_1=\delta_1(K_1)\in$ $\in(0,1)$, *что выполнены соотношения*

$$\mathbf{E}\big(\exp(\langle h,S_n-\zeta-\xi_0\rangle);G_n\big)=\rho_1(h)\rho^n(h)+o(1)(\delta_1\rho(h))^n,\qquad n\to\infty, \tag{3.4}$$

где $o(1)$ *равномерно мало по* $h\in K_1$. *Более того, предположим, что функция* $\rho(h)$ *непрерывна и положительна на* H_1, *функция* $\rho_1(h)$ *положительна, ограничена и отделена от нуля на* K_1. *Тогда множество* $\widetilde{B}$, *определенное в* (2.6), *непусто,* $H_1\subseteq\widetilde{B}$, *функция* $\rho(h)$ *бесконечно дифференцируема на* H_1 *и при* $h\in H_1$ *справедливы соотношения*

$$\rho(h)=\exp(-t_0(h)),\qquad \alpha_0(h)=\rho_1(h)(\mathbf{P}(\eta_0=0))^{-1}, \tag{3.5}$$

где функция $\alpha_0(h)$ *определена в* (2.16).

Замечание 4. Функция $t_0(h)$ выражается в соотношении (3.5) в терминах функции $\rho(h)$, заданной соотношением (3.4). Таким образом, проверку условия (MC2) можно провести на основе анализа функции в левой части соотношения (3.4), не используя напрямую распределение циклов регенерации.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *множество*

$$H_1^0 := \big\{h \in H_1\colon\ \ln\rho(h) = 0\big\} \tag{3.6}$$

непусто и справедливо соотношение

$$\max\{r_{0,n}(h), \widehat{r}_{0,n}(h)\} = o(1)\delta_1^n, \qquad n \to \infty, \tag{3.7}$$

где $o(1)$ *равномерно мало по* $h \in K_1^0$ *— произвольному подкомпакту множества* H_1^0. *Тогда множество* B_0, *определенное в* (2.12), *непусто,* $H_1^0 \subseteq B_0$. *Таким образом, выполнены условия теоремы* 2.

Замечание 5. К сожалению, более компактного представления, чем выражение (3.3), для функции $D_0(\cdot)$, определенной соотношением (2.17), в случае теоремы 2 получить не удалось.

Условие (3.4) зачастую более удобно для проверки, чем условие (3.1). Сформулируем соответствующий аналог теоремы 3.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4 *и справедливо соотношение*

$$\max\{r_{0,n}(h), \widehat{r}_{0,n}(h), \widehat{r}_n(h)\} = o(1)(\delta_1\rho(h))^n, \qquad n \to \infty, \tag{3.8}$$

где $o(1)$ *равномерно мало по* $h \in K_1$. *Тогда множество* B, *определенное в* (2.7), *непусто,* $H_1 \subseteq B$. *Таким образом, выполнены условия теоремы* 1 *и справедливы соотношения*

$$R_0(h, t_0(h)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k}(h) r_{0,k}(h), \qquad \widehat{R}(h, t_0(h)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-k}(h)\widehat{r}_{0,k}(h). \tag{3.9}$$

Теоремы 3 и 4 в сочетании со следствием 2 являются своего рода инструментами для проверки условий теорем об асимптотиках вероятностей больших уклонений, полученных в работах [6, 7, 10–14]. Вместе с тем теорема 4 может оказаться удобной при исследовании вероятностей больших уклонений для обрывающихся обобщенных процессов восстановления в так называемой нерегулярной зоне уклонений.

Сформулируем достаточные условия для выполнения соотношений вида (3.1) и (3.4).

Теорема 5. *Пусть функция* $f(s)$ *задана в виде степенного ряда*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n. \tag{3.10}$$

Предположим, что справедливо представление

$$f(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)}, \tag{3.11}$$

где функции ϕ, ψ *удовлетворяют следующим условиям*:

(1) ϕ, ψ *голоморфны в круге* $B_{1+\delta}(0) := \{s \in \mathbb{C}\colon |s| < 1+\delta\}$ *для некоторого* $\delta > 0$;

(2) $\psi(1) = 0$, $\psi'(1) \neq 0$ *и* $\psi(s) \neq 0$ *при* $s \in B_{1+\delta}(0) \cap \{s \neq 1\}$.

Тогда для произвольного $0 < \delta' < \delta$ *справедливо соотношение*

$$a_n = a^* + (1+\delta')^{-n} o(1), \qquad a^* = -\frac{\phi(1)}{\psi'(1)}, \qquad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Таким образом, соотношения (3.1) и (3.4) могут быть получены посредством анализа производящих функций последовательностей

$$\big\{\mathbf{E}\exp(\langle h, S_n\rangle)\big\}_{n\in\mathbb{N}_0} \qquad \text{и} \qquad \big\{\mathbf{E}(\exp(\langle h, S_n-\zeta-\xi_0\rangle); G_n)\big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$

соответственно.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что для произвольного компакта $K\subset H$ найдется такое положительное число $\varepsilon=\varepsilon(K)$, что

$$\big\{(h,t)\colon\ h\in K,\ t\le \ln\rho(h)+\varepsilon\big\}\subseteq A, \tag{4.1}$$

где, как и прежде,

$$A=\operatorname{int}\big\{(h,t),\ h\in\mathbb{R}^d,\ t\in\mathbb{R}\colon\ \max\{R_0(h,t),\widehat{R}_0(h,t),R(h,t),\widehat{R}(h,t)\}<+\infty\big\}$$

и дополнительно

$$R(h,\ln\rho(h))\equiv 1,\qquad h\in K. \tag{4.2}$$

Введем функцию

$$P(h,t):=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{tk}\,\mathbf{E}\exp(\langle h,S_k\rangle).$$

Функция $P(h,t)$ определена при (h,t), принадлежащих множеству

$$A_H:=\big\{(u,s)\in\mathbb{R}^{d+1}\colon\ u\in H,\ s<-\ln\rho(h)\big\}, \tag{4.3}$$

в силу условия (3.1). Более того, при (h,t) из множества A_H определены также функции $R_0(h,t)$, $\widehat{R}_0(h,t)$, $\widehat{R}(h,t)$ в силу условия (3.2).

Покажем, что при $(h,t)\in A_H$ определена функция

$$R(h,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}e^{tk}\,\mathbf{E}\big(\exp(\langle h,\xi_1\rangle);\ \eta_1=k\big).$$

Выберем такое $j_0\in\mathbb{N}_0$, что $\mathbf{P}(\eta_0=j_0)>0$. Тогда в силу того, что для последовательности $\{S_n\}_{n\ge0}$ выполнено о.с.р. вида (1.1), для произвольного натурального k справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\exp(\langle h,S_{k+j_0}\rangle)\ge\mathbf{E}\exp\big(\langle h,\xi_0+\xi_1+\zeta\rangle;\ \eta_0=j_0,\ \eta_1=k,\ \eta_2>0\big)=\\
&=\big(\mathbf{P}(\eta_2=+\infty)+\mathbf{P}(0<\eta_2<+\infty)\,\mathbf{E}\exp(\langle h,\widehat{\xi}_0\rangle)\big)\,\mathbf{E}\exp(\langle h,\xi_0\rangle;\ \eta_0=j_0)\,\mathbf{E}\exp(\langle h,\xi_1\rangle;\ \eta_1=k)=\\
&=\widehat{r}_0(h)\times r_{0,j_0}(h)\times r_k(h).
\end{aligned}$$

Следовательно, из сходимости ряда $P(h,t)$ следует сходимость ряда $R(h,t)$. Заметим также, что множество A_H открыто в силу непрерывности функции $\rho(h)$ и открытости множества H. Таким образом,

$$A_H\subseteq A.$$

Заметим, что в силу того, что последовательность $\{S_n\}_{n\ge0}$ обладает о.с.р. вида (1.1), при (h,t) из множества A_H справедливо тождество

$$P(h,t)=\frac{R_0(h,t)\widehat{R}(h,t)}{1-R(h,t)}+\widehat{R}_0(h,t). \tag{4.4}$$

Осуществим замену

$$s = \rho(h)e^t \tag{4.5}$$

и перейдем к функциям

$$\begin{gathered} U(h,s) := P(h, \ln s - \ln\rho(h)), \\ Q_0(h,s) := R_0(h, \ln s - \ln\rho(h)), \qquad Q(h,s) := R(h, \ln s - \ln\rho(h)), \\ \widehat{Q}_0(h,s) := \widehat{R}_0(h, \ln s - \ln\rho(h)), \qquad \widehat{Q}(h,s) := \widehat{R}(h, \ln s - \ln\rho(h)). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Таким образом, из соотношения (4.4) и замены (4.5) вытекает соотношение

$$U(h,s) = \frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{1-Q(h,s)} + \widehat{Q}_0(h,s),$$

откуда получаем соотношение

$$Q(h,s) = 1 - \frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{U(h,s)-\widehat{Q}_0(h,s)}. \tag{4.7}$$

Положим

$$f_n(h) := \rho^{-n}(h)\,\mathbf{E}\exp(\langle h, S_n\rangle) - \rho_0(h), \qquad F(h,s) := \sum_{n=0}^{+\infty} s^n f_n(h), \qquad h\in K, \tag{4.8}$$

и представим функцию $U(h,s)$ в виде

$$U(h,s) = \frac{\rho_0(h)}{1-s} + F(h,s). \tag{4.9}$$

Таким образом, из (4.7) имеем

$$Q(h,s) = 1 - (1-s)\frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{\rho_0(h) + (1-s)(F(h,s)-\widehat{Q}_0(h,s))}. \tag{4.10}$$

Из определения функции $F(h,s)$ вытекает, что при фиксированном $h\in K$ она является степенным рядом переменной s. При всех $h\in K$ данный ряд сходится в круге $|s|<\delta^{-1}$ в силу условия (3.1). То же выполнено для функций $Q_0(h,s)$, $\widehat{Q}(h,s)$ и $\widehat{Q}_0(h,s)$ в силу условия (3.2). Следовательно, справедливо соотношение

$$\limsup_{s\to 1}\sup_{h\in K}\bigl|(1-s)\bigl(F(h,s)-\widehat{Q}_0(h,s)\bigr)\bigr| = 0. \tag{4.11}$$

Положим

$$c_0(K) := \inf_{h\in K}\rho_0(h) > 0. \tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) получаем, что найдется

$$\varepsilon = \varepsilon(K) \in (0, \delta^{-1}-1) \tag{4.13}$$

такое, что справедливо соотношение

$$\rho_0(h) + (1-s)\bigl(F(h,s)-\widehat{Q}_0(h,s)\bigr) > 0, \qquad s\in[1-\varepsilon, 1+\varepsilon], \quad h\in K. \tag{4.14}$$

Таким образом, в силу (4.14) при всех $h\in K$ правая часть (4.10) есть аналитическая функция переменной s на отрезке $[0, 1+\varepsilon]$. Левая часть (4.10) имеет вид

$$Q(h,s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(h)s^n, \qquad q_n(h) := \rho^{-n}(h)\,\mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h,\xi\rangle);\, \eta = n\bigr) \ge 0, \qquad h\in K.$$

В силу неотрицательности коэффициентов $q_n(h)$, $n \geq 0$, из расходимости ряда $Q(h,s)$ при некотором $h \in K$ в некоторой точке $s = re^{i\phi}$, $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$, следует, что при том же h ряд расходится и в точке $s = r$. Однако в силу доказанного при всех $h \in K$ функция $Q(h,s)$ является аналитической при $s \in [0, 1+\varepsilon]$. Таким образом, при всех $h \in K$ степенной ряд $Q(h,s)$ сходится в круге $|s| \leq 1+\varepsilon$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(h)(1+\varepsilon)^n < +\infty, \qquad h \in K,$$

откуда

$$\rho^{-n}(h)\,\mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h, \xi\rangle);\, \eta = n\bigr) = o(1)(1+\varepsilon)^{-n}, \tag{4.15}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K$.

В силу выбора $\varepsilon(K)$ в соотношении (4.13), соотношения (4.15) и условия (3.2) получаем, что при (h,t) из множества

$$\bigl\{(h,t)\colon\ h \in K,\ t \leq -\ln\rho(h) + \ln(1+\varepsilon)\bigr\} \tag{4.16}$$

определены функции $R(h,t)$, $R_0(h,t)$, $\widehat{R}_0(h,t)$ и $\widehat{R}(h,t)$. Из произвольности компакта K и непрерывности функции $\rho(h)$ вытекает справедливость соотношения (4.1), откуда получаем, что справедливо соотношение $H \subseteq B$, где множество B определено в (2.7).

Заметим, что при $h \in K$ функция $t = -\ln\rho(h)$ является решением уравнения $R(h,t) = 1$, поскольку в силу (4.10) имеем $R(h, \ln\rho(h)) = Q(h,1) = 1$ при $h \in K$. Таким образом, справедливо соотношение

$$\rho(h) = \exp(-t_0(h)). \tag{4.17}$$

Остается показать, что при $h \in K$ справедливо соотношение

$$\rho_0(h) = R_0(h, t_0(h))\,\alpha_0(h)\,\widehat{R}(h, t_0(h)). \tag{4.18}$$

В силу предыдущих рассуждений при всех $h \in K$ и $s \in (0, 1+\varepsilon)$ справедливо соотношение (4.10), откуда

$$\frac{\partial}{\partial s} Q(h,s)\Big|_{s=1} = \frac{Q_0(h,s)\widehat{Q}(h,s)}{\rho_0(h)}\Big|_{s=1}. \tag{4.19}$$

В силу замены (4.6) и соотношения (4.17) справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial s} Q(h,s)\Big|_{s=1} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial t} R(h,t)\Big|_{s=1} = \frac{\partial}{\partial t} R(h,t)\Big|_{t=t_0(h)} = \alpha_0^{-1}(h), \tag{4.20}$$

так как $R(h, t_0(h)) = 1$ в силу определения $t_0(h)$. Функция $\alpha_0(h)$ введена в соотношении (2.16). При этом в силу замены (4.6) справедливо соотношение

$$Q_0(h,s)\,\widehat{Q}(h,s)\big|_{s=1} = R_0(h, t_0(h))\,\widehat{R}(h, t_0(h)). \tag{4.21}$$

Таким образом, соотношение (4.18) вытекает из соотношений (4.19)–(4.21). Теорема 3 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4 во многом повторяет доказательство теоремы 3. Достаточно показать, что для произвольного компакта $K_1 \subset H_1$ найдется такое положительное число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(K_1)$, что

$$\bigl\{(h,t)\colon\ h \in K_1,\ t \leq \ln\rho(h) + \varepsilon_1\bigr\} \subseteq \widetilde{A}, \tag{4.22}$$

где, как и прежде,

$$\widetilde{A} = \operatorname{int}\bigl\{(h,t),\ h \in \mathbb{R}^d,\ t \in \mathbb{R}\colon\ R(h,t) < +\infty\bigr\}$$

и выполнено соотношение

$$R(h,\ln\rho(h))\equiv 1,\qquad h\in K_1. \tag{4.23}$$

Напомним, что функция $R(h,t)$ определяется соотношением

$$R(h,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{tn}\,\mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h,\xi_1\rangle);\,\eta_1=n\bigr)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{tn}r_n(h).$$

Покажем, что область определения функции $R(h,t)$ содержит в себе множество

$$\widetilde{A}_H:=\bigl\{(h,t)\in\mathbb{R}^{d+1}\colon\ h\in H_1,\ t<-\ln\rho(h)\bigr\}. \tag{4.24}$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h,S_n-\zeta-\xi_0\rangle)\,;G_n\bigr)\ge\mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h,S_n-\zeta-\xi_0\rangle);\,\eta_0=0,\,\eta_1=n\bigr)=\mathbf{P}(\eta_0=0)\,r_n(h)$$

при $n\in\mathbb{N}$, откуда при $h\in H_1$ и $t<-\ln\rho(h)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}e^{tn}r_n(h)<+\infty$$

в силу условия (3.4). Множество $\widetilde{A}_H$ открыто в силу открытости множества H_1 и непрерывности функции $\rho(h)$. Таким образом, справедливо соотношение

$$\widetilde{A}_H\subseteq\widetilde{A}.$$

Рассмотрим функцию

$$P_0(h,t):=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{tn}\,\mathbf{E}\bigl(\exp(\langle h,S_n-\zeta-\xi_0\rangle);\,G_n\bigr). \tag{4.25}$$

В силу условия (3.4) функция $P_0(h,t)$ определена при (h,t) из множества $\widetilde{A}_H$. В силу того, что последовательность случайных векторов $\{S_n\}_{n\ge 0}$ обладает о.с.р. вида (1.1), при (h,t) из множества $\widetilde{A}_H$ выполнено соотношение

$$P_0(h,t)=\frac{\mathbf{P}(\eta_0=0)}{1-R(h,t)}. \tag{4.26}$$

Заметим, что соотношение (4.26) является частным случаем соотношения (4.4); здесь

$$R_0(h,t)=\mathbf{P}(\eta_0=0),\qquad \widehat{R}(h,t)=1,\qquad \widehat{R}_0(h,t)=0.$$

Таким образом, дальнейшее доказательство теоремы 4 вытекает из доказательства теоремы 3, поскольку в рассматриваемом случае для функций $R_0(h,t)$, $\widehat{R}(h,t)$ и $\widehat{R}_0(h,t)$ выполнено условие (3.1). $\square$

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим функцию

$$g(s)=(1-s)f(s)=(1-s)\frac{\phi(s)}{\psi(s)}. \tag{4.27}$$

Функция $g(s)$ раскладывается в степенной ряд

$$g(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_ns^n,$$

коэффициенты которого имеют вид

$$b_0 := a_0, \qquad b_n := a_n - a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.28}$$

Заметим, что в силу условий теоремы 5, наложенных на функции ϕ и ψ, функция g голоморфна в круге $B_{1+\delta}(0)$.

Таким образом, для произвольного $\delta' \in (0, \delta)$ справедливо соотношение

$$|b_n| = (1+\delta')^{-n} o(1), \qquad n \to \infty, \tag{4.29}$$

и в силу (4.27) имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = g(1) = -\frac{\phi(1)}{\psi'(1)} = a^*. \tag{4.30}$$

Остается заметить, что из (4.28) вытекает справедливость соотношения

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = a_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.31}$$

и в силу (4.29) имеем

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = (1+\delta')^{-n} o(1), \qquad n \to \infty. \tag{4.32}$$

Таким образом, теорема 5 вытекает из соотношений (4.30)–(4.32). $\square$

5. МАКСИМУМ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Применим результаты разд. 3 к следующей задаче.

Пусть κ, κ_i, $i \in \mathbb{N}$, — независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть

$$W_0 := 0, \qquad W_n := \sum_{i=1}^{n} \kappa_i, \qquad M_n := \max\bigl\{W_j,\ j = 0, \dots, n\bigr\}. \tag{5.1}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(a1) распределение величины κ центрально решетчато с шагом решетки q_κ;

(a2) носитель распределения случайной величины κ содержит не менее двух положительных значений u_1 и u_2, $0 < u_1 < u_2$;

(a3) функция $I(y) := \mathbf{E} \exp(y\kappa)$ определена на непустом интервале $(0, y_+)$, где

$$y_+ := \sup\bigl\{y \in \mathbb{R}\colon\ I(y) < +\infty\bigr\}; \tag{5.2}$$

(a4) найдется такое $0 < y < y_+$, что $I(y) > 1$;

(a5) величина $\mu := \mathbf{E}\,\kappa$ отрицательна и, возможно, бесконечна.

Заметим, что если выполнены условия (a2), (a3), то функция $I(y)$ является строго выпуклой вверх и аналитической на интервале $(0, y_+)$.

Приведенные ниже теоремы, как мы указывали ранее, были известны и до данной работы, однако мы предложим новый подход к их доказательству.

Теорема 6. *Допустим, что распределение случайной величины κ удовлетворяет условиям* (a1)–(a5). *Тогда соотношение*

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim q_\kappa \frac{F_1(x/n)}{\sqrt{n}} \exp\Bigl(-\Lambda\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr) n\Bigr), \qquad n \to \infty, \tag{5.3}$$

выполнено равномерно по $x/n \in [a,b]$, *где* $[a,b]$ — *произвольный отрезок, лежащий внутри интервала* (γ, m_+). *Здесь*

$$\Lambda(\theta) := \theta y_\theta - \ln I(y_\theta), \qquad y_\theta\colon\ m(y_\theta) = \theta, \qquad m(y) := (\ln I(y))', \tag{5.4}$$

$$m_+ := \liminf_{y\to y_+ -0} m(y), \qquad \gamma > 0\colon\ I(y_\gamma) = 1, \qquad \sigma^2(y) := (\ln I(y))'', \tag{5.5}$$

$$F_1(\theta) := \frac{\alpha(y_\theta) D_1(y_\theta)}{\sqrt{2\pi}\sigma(y_\theta)}, \qquad D_1(y) := \sum_{n=0}^{+\infty} I^{-n}(y)\,\mathbf{P}\big(W_i \le 0,\, i \le n\big), \tag{5.6}$$

$$\alpha(y) := \mathbf{P}\big(W_i^{(y)} > 0,\, i \in \mathbb{N}\big), \tag{5.7}$$

где $\{W_i^{(y)}\}_{i\ge 0}$, $y \in (0, y_+)$, — *случайное блуждание с шагами* $\kappa_i^{(y)}$,

$$\mathbf{P}\big(\kappa^{(y)} = u\big) = I^{-1}(y)\exp(uy)\,\mathbf{P}(\kappa = u), \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Теорема 7. *Допустим, что распределение случайной величины* κ *удовлетворяет условиям* (a1)–(a5). *Тогда соотношение*

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim q_\kappa F_0 \exp(-x y_\gamma), \qquad n \to \infty, \tag{5.9}$$

выполнено равномерно по $x/n \in [a,b]$, *где* $[a,b]$ — *произвольный отрезок, лежащий внутри интервала* $(0,\gamma)$, *а* γ *определено в* (5.5). *Здесь*

$$F_0 := \frac{1}{\gamma}\alpha(y_\gamma)\,\mathbf{P}\big(W_i \le 0,\, i \in \mathbb{N}\big) \tag{5.10}$$

и $\alpha(y)$ *определено в* (5.7).

Доказательство теоремы 6. Заметим, что для доказательства теоремы 6 достаточно проверить, что последовательность случайных величин $\{M_n\}_{n\ge 0}$ удовлетворяет условиям теоремы 4 и следствия 2. Нам потребуются вспомогательные утверждения, которые будут доказаны позднее.

Лемма 1. *Последовательность случайных величин* $\{M_n\}_{n\ge 0}$, *определенная в* (5.1), *обладает о.с.р. вида* (1.1) *с* $(\xi_0, \eta_0) = (0,0)$, $\widehat{\xi}_k = 0$, $k \ge 0$, *и* $(\xi_i, \eta_i) = (\lambda_i, \tau_i)$, $i \in \mathbb{N}$, *где*

$$\begin{gathered} \lambda_i := (W_{N_i} - W_{N_{i-1}})I(N_i < +\infty), \qquad \tau_i := N_i - N_{i-1}, \qquad i \in \mathbb{N}, \\ N_0 := 0, \qquad N_i := \min\big\{k > N_{i-1}\colon\ W_k > W_{N_{i-1}}\big\}. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Здесь по определению полагаем минимум пустого множества равным $+\infty$. *При этом случайные векторы* $(\lambda_1,\tau_1), (\lambda_2,\tau_2), \ldots$ *независимы и одинаково распределены. При выполнении условий* (a1), (a2) *совместное распределение случайного вектора* (λ_1, τ_1) *является сильно арифметическим с решеткой* $q_\kappa\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *При выполнении условия* (a5) *величина* τ_1 *является несобственной, выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}(\tau_1 = +\infty) = \mathbf{P}\big(W_i \le 0,\, i \in \mathbb{N}\big) > 0. \tag{5.12}$$

Для проверки условия (3.4) нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (a3), (a4). *Тогда для произвольного отрезка* $[c_1, c_2] \subset$ $\subset (y_0, y_+)$ *найдется такое* $\delta = \delta([c_1,c_2]) \in (0,1)$, *что при* $y \in [c_1, c_2]$ *выполнено соотношение*

$$\mathbf{E}\big(e^{yW_n};\, W_i < W_n,\, 0 \le i < n\big) = I^n(y)\,\mathbf{P}\big(W_i^{(y)} > 0,\, i \in \mathbb{N}\big) + \delta^n I^n(y) o(1), \qquad n \to \infty, \tag{5.13}$$

причем $o(1)$ *равномерно мало по* $y \in [c_1, c_2]$. *Напомним, что величина* y_0 *определяется соотношением* $m(y_0) = 0$.

Соотношение (5.13) соответствует соотношению (3.4). При этом функция $I(y)$ непрерывна на интервале (y_0, y_+), а функция $\alpha(y)$ отделена от нуля на отрезке $[c_1, c_2]$, поскольку

$$\mathbf{E}\, W_1^{(y)} = m(y) > 0, \qquad y \in [c_1, c_2].$$

Для завершения доказательства теоремы 6 остается показать, что для последовательности $\{M_n\}_{n\geq 0}$ выполнены условия следствия 2. Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (a3)–(a5). *Тогда для произвольного отрезка* $[c_1, c_2] \subset \subset (y_\gamma, y_+)$ *найдется такое* $\delta = \delta([c_1, c_2]) \in (0, 1)$, *что при* $y \in [c_1, c_2]$ *выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}\big(W_i \leq 0,\, 0 \leq i \leq n\big) = \delta^n I^n(y) o(1), \qquad n \to \infty, \tag{5.14}$$

причем $o(1)$ *равномерно мало по* $y \in [c_1, c_2]$. *Напомним, что величина* y_γ *определяется соотношениями* $y_\gamma > 0$, $I(y_\gamma) = 1$.

Таким образом, для последовательности $\{M_n\}_{n\geq 0}$ выполнены условия теоремы 4 и следствия 2. Следовательно, равномерно по x таким, что $x/n \in [a, b] \subset (\gamma, m_+)$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim q_\kappa \frac{F_1(x/n)}{\sqrt{n}} \exp\Big(-\Lambda\Big(\frac{x}{n}\Big) n\Big), \qquad n \to \infty,$$

где функции Λ и F_1 определены в (5.4) и (5.6) соответственно. $\square$

Доказательство теоремы 7. Как и при доказательстве теоремы 6, заметим, что в предположениях теоремы 7 справедливы леммы 1 и 2, откуда вытекает, что выполнены условия теоремы 4.

В условиях (a3), (a4) величина y_γ является единственным решением уравнения $I(y) = 1$ на интервале (y_0, y_+). Следовательно, множество B_0, введенное в (2.12), в данном случае содержит единственный элемент y_γ и множеством B_0' является интервал $(0, \gamma)$.

Заметим, что функция $\gamma(\theta)$, введенная в (2.14), в данном случае является константой γ, а функция $D_0(\theta)$, введенная в (2.17), не зависит от $\theta \in (0, \gamma)$ и равна

$$q_\kappa \frac{\alpha(y_\gamma)\, \mathbf{P}(\tau_1 = +\infty)}{\sqrt{\sigma^2(y_\gamma)\gamma^2\sigma^{-2}(y_\gamma)}} = q_\kappa \frac{\alpha(y_\gamma)\, \mathbf{P}(W_i \leq 0,\, i \in \mathbb{N})}{\gamma} = q_\kappa F_0.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 2, откуда равномерно по $x = x(n)$ таким, что $x/n \in [a, b] \subset (0, \gamma)$, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(M_n = x) \sim q_\kappa F_0 \exp(-x y_\gamma), \qquad n \to \infty. \quad \square$$

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство леммы 1. Покажем, что последовательность $\{M_n\}_{n\geq 0}$ обладает о.с.р. вида (1.1).

Случайные векторы (λ_i, τ_i), $i \in \mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены, так как последовательность $\{W_n\}_{n\geq 0}$ является случайным блужданием. Таким образом,

$$M_n = \sum_{i=1}^{T_n} \lambda_i, \qquad T_n := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \colon N_k \leq n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

откуда вытекает обобщенное свойство регенерации.

Остается показать, что при выполнении условий (a1), (a2) распределение вектора (λ_1, τ_1) является сильно арифметическим с решеткой $q_\kappa\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Заметим, что в силу условия (a1) найдется такое $Q\in\mathbb{N}$, что при всех $n\ge Q$, $n\in\mathbb{N}$, вероятности

$$\mathbf{P}\bigl(W_i\le 0,\, i<n,\, W_n=0\bigr),\qquad \mathbf{P}\bigl(W_i\le 0,\, i<n,\, W_n=-q_\kappa\bigr) \tag{6.1}$$

положительны. Более того, при $n\ge Q$ в силу условия (a2) вероятности

$$\mathbf{P}\bigl(W_i\le 0,\, i<n,\, W_n=0,\, W_{n+1}>0\bigr),\qquad \mathbf{P}\bigl(W_i\le 0,\, i<n,\, W_n=-q_\kappa,\, W_{n+1}>0\bigr) \tag{6.2}$$

также положительны, поскольку в противном случае одна из вероятностей событий $\{\kappa>0\}$ или $\{\kappa>q_\kappa\}$ была бы нулевой, что невозможно в силу условий (a1), (a2).

Заметим, что если выполнены условия (a1), (a2), то значения u_1 и u_2 не меньше q_κ и кратны ему. Из соотношения (6.2) вытекает, что носитель распределения случайного вектора (λ_1,τ_1) содержит значения

$$(u_2,n),\ (u_2-q_\kappa,n),\qquad n\ge Q,$$

поэтому решетка распределения вектора (λ_1,τ_1) содержится в $q_\kappa\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. При этом указанная решетка распределения не может быть быть вложенной в $q_\kappa\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, так как значения величины λ_1 лежат в $q_\kappa\mathbb{Z}$, а величина τ_1 принимает только натуральные значения. $\square$

Доказательство леммы 2. Заметим, что при $y\in(y_0,y_+)$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\bigl(e^{yW_n};\, W_i<W_n,\, 0\le i<n\bigr)&=I^n(y)\,\mathbf{P}\bigl(W_i^{(y)}<W_n^{(y)},\, 0\le i<n\bigr)=\\&=I^n(y)\,\mathbf{P}\bigl(W_i^{(y)}>0,\, 0<i\le n\bigr)=\\&=I^n(y)\bigl(\mathbf{P}\bigl(W_i^{(y)}>0,\, i\in\mathbb{N}\bigr)-\mathbf{P}\bigl(\exists k>n\colon\ W_k^{(y)}\le 0\bigr)\bigr).\end{aligned} \tag{6.3}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что при $y\in(y_0,y_+)$

$$\mathbf{P}\bigl(W_i^{(y)}>0,\, i\in\mathbb{N}\bigr)>0,$$

так как в силу определения y_0 выполнено соотношение

$$\mathbf{E}\,W_1^{(y)}=m(y)>0,\qquad y\in(y_0,y_+).$$

Таким образом, в силу (6.3) для доказательства леммы 2 остается показать, что для произвольного отрезка $[c_1,c_2]\subset(y_0,y_+)$ найдется такое $\delta=\delta([c_1,c_2])\in(0,1)$, что выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\bigl(\exists k>n\colon\ W_k^{(y)}\le 0\bigr)=\delta^n o(1),\qquad n\to\infty, \tag{6.4}$$

где $o(1)$ равномерно мало по $y\in[c_1,c_2]$. Пусть $z:=(y_0-c_1)/2$. Заметим, что величина z отрицательна, при этом $y_0<z+c_1\le z+c_2<y_+$. Тогда левая часть (6.4) оценивается сверху суммой

$$\sum_{k>n}\mathbf{P}\bigl(W_k^{(y)}\le 0\bigr)\le\sum_{k>n}\mathbf{E}\bigl(\exp\bigl(zW_k^{(y)}\bigr)\bigr)=\frac{I^n(z+y)\,I^{-n}(y)}{1-I(z+y)\,I^{-1}(y)},\qquad y\in[c_1,c_2]. \tag{6.5}$$

Положим

$$\delta=\max_{y\in[c_1,c_2]}\bigl(I(z+y)\,I^{-1}(y)\bigr).$$

Величина δ меньше единицы, поскольку функция $I(y)$ монотонно возрастает на интервале (y_0,y_+) и выполнено неравенство $y_0<z+c_1\le z+c_2<y_+$. Таким образом, из соотношения (6.5) вытекает соотношение (6.4), откуда, принимая во внимание (6.3), получаем утверждение леммы 2. $\square$

Доказательство леммы 3. Нетрудно видеть, что функция $I(y)$ непрерывна, положительна и монотонно возрастает на интервале (y_γ, y_+). Положим

$$\delta = \delta([c_1, c_2]) = \Bigl(I\Bigl(\frac{y_\gamma + c_1}{2}\Bigr)\Bigr)^{-1}.$$

Величина δ меньше единицы, так как $1 = I(y_\gamma) < I((y_\gamma + c_1)/2)$. Таким образом, при $y \in [c_1, c_2]$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\bigl(W_i \le 0,\ i \le n\bigr) \le 1 < \delta^n I^n(y), \qquad n \in \mathbb{N},$$

откуда и следует лемма 3. $\square$

Благодарности. Автор выражает сердечную благодарность своему научному руководителю Александру Викторовичу Шкляеву за общение и внимание, ценные замечания по содержанию и оформлению работы. Автор также благодарит Владимира Алексеевича Ватутина и Валерия Ивановича Афанасьева за замечания по работе, сделанные во время доклада на семинаре кафедры дискретной математики МИАН. Кроме того, автор выражает признательность анонимному рецензенту, благодаря замечаниям которого работа была значительно улучшена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакай Г.А.* Большие уклонения для обрывающегося обобщенного процесса восстановления // Теория вероятн. и ее примен. 2021. Т. 66, №2. С. 261–283.
2. *Бакай Г.А., Шкляев А.В.* Большие уклонения обобщенного процесса восстановления // Дискрет. математика. 2019. Т. 31, №1. С. 21–55.
3. *Боровков А.А.* О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, №3. С. 493–509.
4. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, №4. С. 745–782.
5. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Предельные теоремы в задаче достижения границы многомерным блужданием // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, №2. С. 289–317.
6. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. I // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, №3. С. 491–513.
7. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера. II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, №4. С. 736–758.
8. *Joutard C.* Strong large deviations for arbitrary sequences of random variables // Ann. Inst. Stat. Math. 2013. V. 65, N 1. P. 49–67.
9. *Козлов М.В.* О больших уклонениях максимума крамеровского случайного блуждания и процесса ожидания // Теория вероятн. и ее примен. 2013. Т. 58, №1. С. 81–116.
10. *Могульский А.А.* Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 21–41.
11. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 475–502.
12. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. II // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 503–527.
13. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Интегро-локальные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. III // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 528–553.
14. *Могульский А.А., Прокопенко Е.И.* Локальные теоремы для арифметических многомерных обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера // Мат. тр. 2019. Т. 22, №2. С. 106–133.
15. *Шкляев А.В.* Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума // Теория вероятн. и ее примен. 2010. Т. 55, №3. С. 590–598.