Г. А. Калябин, Описание следов для анизотропных пространств типа Трибеля–Лизоркина,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 160–173

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

Г. А. КАЛЯБИН

ОПИСАНИЕ СЛЕДОВ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ТРИБЕЛЯ—ЛИЗОРКИНА

ВВЕДЕНИЕ

В работе используются следующие обозначения: $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, m, n — натуральные, $m < n$; k, j — индексы, пробегающие соответственно множества $\{1, 2, \ldots\}$, $\{1, 2, \ldots, n\}$; R_n — евклидово пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x = (w, y)$, $w = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, R_m — подпространство $\{y = 0\}$. Через ε, δ, c, c_1, $c_2, \ldots$ обозначаются различные положительные постоянные. Символ $| f, X |$ означает норму элемента f в нормированном пространстве X; $L_p(R_n)$ — совокупность всех (комплексно-значных) измеримых функций $g(x)$ таких, что

$$| g, L_p(R_n) | \equiv \Big(\int\limits_{R_n} | g(x) |^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1}$$

l_θ — пространство последовательностей (u_k) с нормой

$$| (u_k), l_\theta | \equiv \Big(\sum_{k=1}^{\infty} | u_k |^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leqslant \theta < \infty; \qquad | (u_k), l_\infty | \equiv \sup_k | u_k |. \tag{2}$$

Через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ будем обозначать прямое и обратное преобразование Фурье в R_n, т. е. (см. [1, § 1.5]) для $g \in L_1(R_n)$

$$\mathcal{F} g(\nu) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R_n} g(x) e^{i(\nu, x)} dx, \tag{3}$$

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in R_n; \qquad (\nu, x) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j x_j.$$

Пусть заданы n последовательностей положительных чисел $N_{j,k}$, относительно которых мы будем предполагать выполненным условие

$$N_{j,k+1} \geqslant (1 + \varepsilon_j) N_{j,k}, \qquad \varepsilon_j > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Для $g(x) \in L_p(R_n)$ положим

$$A_k g(x) = \mathcal{F}^{-1}((\Omega_k(\nu) - \Omega_{k-1}(\nu)) \mathcal{F} g(\nu))(x), \tag{5}$$

где $\Omega_0(\nu) \equiv 0$, $\Omega_k(\nu)$ — характеристическая функция прямоугольника (параллелепипеда),

$$\omega_k = \{\nu \mid |\nu_j| \leqslant N_{j,k}; \quad j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Зададим еще некоторое пространство последовательностей Φ со свойством

$$c_1 \,|\, (u_k),\ l_\infty \,| \leqslant |\, (u_k),\ \Phi \,| \leqslant c_2 \,|\, (u_k),\ l_\infty \,| \tag{6}$$

и произвольные положительные числа β_k и рассмотрим пространство $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$, состоящее из всех функций $g(x)$, для которых конечна величина

$$|\, g,\ L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n) \,| \equiv |\, g,\ L_p(R_n) \,| + |\, |\, (\beta_k A_k g(x)),\ \Phi \,|,\ \ L_p(R_n) \,|. \tag{7}$$

В настоящей работе дается полный ответ на вопрос, поставленный П. И. Лизоркиным: дать описание следов [1] функций из $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ на подпространстве R_m.

Показано, что при заданных p, β_k, $N_{j,k}$ указанное пространство следов не зависит от выбора пространства последовательностей Φ, подчиненного (6), и является обобщенным классом О. В. Бесова $B_p^{(\alpha,\,N)}(R_m)$.

Формулировка результата приводится в § 1, а доказательство в § 3. В § 2 содержатся некоторые вспомогательные утверждения, представляющие, возможно, и самостоятельный интерес.

Поясним определение классов $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ несколькими примерами.

1. В случае $\beta_k = 2^k$, $\Phi = l_p$ пространства $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ совпадают с обобщенными B-классами, теоремы вложения для которых получены в [4], где имеется также описание этих классов в терминах модулей непрерывности (см. также [6]).

2. Пусть $\mu_j(t) > \varepsilon > 0$ $(-\infty < t < \infty)$ — четные функции, неубывающие при $t > 0$, стремящиеся к ∞ вместе с t, и такие, что для некоторого $\rho > 0$ функции $\mu_j(t)\, t^{-\rho}$ не возрастают при $t > 0$.

В работе [4] изучались пространства $L_p^{(\mu)}(R_n)$, состоящие из всех функций $g(x) \in L_p(R_n)$ с конечной нормой

$$|\, g,\ L_p^{(\mu)}(R_n) \,| \equiv \sum_{j=1}^{n} |\, \mathcal{F}^{-1}(\mu_j \nu_j)\, \mathcal{F} g(\nu))(x),\ \ L_p(R_n) \,|. \tag{8}$$

В случае $\mu_j(t) = (1 + t^2)^{r_j/2}$ $(r_j > 0)$ пространства $L_p^{(\mu)}(R_n)$ суть анизотропные лиувиллевские классы (см. [7] и [1, гл. 9]); в частности, при целых r_j имеем соболевские пространства $W_p^r(R_n)$.

Пусть $\gamma_j = \inf\limits_{t>0} \mu_j(t)$; при сделанных предположениях относительно $\mu_j(t)$ для чисел

$$N_{j,k} \equiv \max\, \{t \mid \mu_j(t) \leqslant \gamma_j \cdot 2^k\} \tag{9}$$

будет выполняться условие (4) и, следовательно, в силу теоремы Пэли — Литтлвуда (см. [1, с. 65]) норма в $L_p^{(\mu)}(R_n)$ эквивалентна величине (см. (5))

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\, 2^k A_k g(x) \,|^2\right)^{1/2},\quad L_p(R_n)\right|. \tag{10}$$

Таким образом, в данном случае $L_p^{(\mu)}(R_n) = L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$, где $\beta_k = 2^k$, $\Phi = l_2$, а $N_{j,k}$ определяются формулой (9).

---

[1] След функции понимается в общепринятом смысле ([1, § 6. 4]).

3. В некоторых задачах появляются более сложно устроенные пространства Φ.

Пусть $L_p^{(\mu)}(R_n)$, $N_{j,k}$ — те же, что и в предыдущем примере, $\varphi(t) > 0$ $(t > 0)$ — измеримая функция такая, что

$$\psi(t) \equiv \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau < \infty; \qquad 0 < t < \infty. \tag{11}$$

Рассмотрим совокупность $L_{p,\varphi}^{(\mu)}$ функций $f(x, t)$ $(x \in R_n,\ 0 < t < \infty)$, для которых [1]

$$|f, L_{p,\varphi}^{(\mu)}|^p \equiv \int_{R_n} dx \int_0^\infty \left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \right|^p dt + \int_0^\infty \varphi(t)\, |f(x,t), L_p^{(\mu)}(R_n)|^p\, dt < \infty. \tag{12}$$

Известно, что если $f \in L_{p,\varphi}^{(\mu)}$, то (возможно после некоторого изменения на множестве меры 0 в R_{n+1}) существует предел $f(x, t)$ при $t \to 0$ (при всех $x \in R_n$ и в смысле сходимости в $L_p(R_n)$).

Описание свойств предельных функций $g(x) = f(x, 0)$, $f \in L_{p,\varphi}^{(\mu)}$ дано автором в работах [5, 8]. Несколько преобразуя это описание с помощью теоремы Пэли — Литтлвуда, можно утверждать, что пространство следов на R_n функций класса $L_{p,\varphi}^{(\mu)}$ есть $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$, где β_k — корни уравнений

$$\beta_k^{-p} \psi(\beta_k^{-p'}) = 2^{-kp} \tag{13}$$

(ясно, что числа β_k возрастают), а Φ — пространство последовательностей (u_k) с нормой

$$|(u_k), \Phi| \equiv \left(\sum_{s=1}^\infty \left(\sum_{k=\lambda_{s-1}}^{\lambda_s - 1} |u_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Здесь $\lambda_0 = 1$, а λ_s $(s = 1, 2, \ldots)$ — наименьшее k, для которого выполняются неравенства

$$\beta_k^{-p'} \leqslant \beta_{\lambda_{s-1}}^{-p'}/2; \qquad \psi(\beta_k^{-p'}) \leqslant \psi(\beta_{\lambda_{s-1}}^{-p'}/2).$$

Проверка условий (6) для нормы (14) не представляет затруднений.

Располагая теоремой о следах для классов $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$, мы можем, таким образом, описать следы функций из $L_{p,\varphi}^{(\mu)}$ на подпространствах R_m $(m < n)$.

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $\mathfrak{M}_{k,p}(R_m)$ означает совокупность всех целых функций $g(z_1, \ldots, z_m)$ $(z_j = x_j + it_j;\ x_j, t_j \in R_1)$ экспоненциального типа $N_{j,k}$ по переменным z_j, принадлежащих при $t_1 = \ldots = t_m = 0$ пространству $L_p(R_m)$ (см. [1. гл, 3]); зададим последовательность чисел $a_k > 0$ такую, что

$$\sum_{k=1}^\infty a_k^{-p'} < \infty \tag{1.1}$$

и рассмотрим совокупность $B_p^{(a,N)}(R_m)$ всех функций $f(w) \in L_p(R_m)$,

---

[1] Производная в (12) понимается в обобщенном смысле (см. [1, § 4.1]).

представимых в виде сходящегося в $L_p(R_m)$ ряда

$$f(w)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(w), \qquad f_k \in \mathfrak{M}_{k,p}(R_m), \tag{1.2}$$

для которого

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \,|\, f_k(w), L_p(R_m)\,|)^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.3}$$

Из (1.1), (1.3) и неравенства Гёльдера следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, f_k(w), L_p(R_m)\,| < \infty, \tag{1.4}$$

т. е. ряд (1.2) со свойством (1.3) сходится абсолютно по норме $L_p(R_m)$.

Норму в $B_p^{(a,N)}(R_m)$ определим как сумму $|\, f, L_p(R_m)\,|$ и нижней грани левой части (1.3) по всем рядам (1.2).

В случае, когда $a_k=\tau^k$ $(\tau>1)$, $N_{j,k}=\tau^{k/r_j}$ $(r_j>0)$, пространства $B_p^{(a,N)}(R_m)$ совпадают с анизотропными классами О. В. Бесова $B_p^r(R_m)$ (при разных $\tau>1$ получается один и тот же класс).

Следует отметить, что при нарушении условия (1.1) введение классов $B_p^{(a,N)}(R_m)$ становится бессодержательным, поскольку в этом случае любая функция $f(w)$ из $L_p(R_m)$ будет входить и в $B_p^{(a,N)}(R_m)$.

В самом деле, пусть $h_k(w)\in\mathfrak{M}_{k,p}(R_m)$ сходится к $f(w)$ в $L_p(R_m)$ (см. [1, с. 226]). Предполагая (1.1) невыполненным, мы можем указать последовательность индексов n_s $(s=1, 2, \ldots)$ со свойствами

$$n_{s+1}>n_s\geqslant s, \qquad \sum_{k=n_s}^{n_{s+1}-1} a_k^{-p'}\equiv B_s>2^s \quad (n_1=1). \tag{1.5}$$

Для $n_s\leqslant k<n_{s+1}$ обозначим $(h_0(w)\equiv 0)$

$$q_k(w)=B_s^{-1}a_k^{-p'}(h_s(w)-h_{s-1}(w)). \tag{1.6}$$

По построению $q_k(w)\in\mathfrak{M}_{k,p}(R_m)$ и справедливо равенство

$$\sum_{n_s\leqslant k<n_{s+1}} q_k(w)=h_s(w)-h_{s-1}(w), \tag{1.7}$$

из которого явствует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k(w)$ в пространстве $L_p(R_m)$ к функции $f(w)$.

Далее, из (1.6), (1.5) находим, что

$$\sum_{n_s\leqslant k<n_{s+1}}(a_k\,|\,q_k(w), L_p(R_m)\,|)^p=|\,(h_s-h_{s-1}), L_p(R_m)\,|^p B_s^{1-p} \tag{1.8}$$

и так как первый сомножитель в правой части ограничен, а второй не превосходит $2^{-s(p-1)}$, мы можем заключить, что величина (1.2) конечна, т. е. $f\in B_p^{(a,N)}(R_m)$.

После этого замечания дадим описание следов функций из пространств $L_{p\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ на R_m в терминах классов $B_p^{(a,N)}(R_m)$.

Основная теорема. *В обозначениях, принятых во введении, положим для* $k=1, 2\ldots$

$$\alpha_k=\beta_k\prod_{j=m+1}^{n} N_{j,k}^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.9}$$

Условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'} < \infty \tag{1.10}$$

необходимо и достаточно для существования следа на R_m у любой функции $g(x) \in L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$.

При выполнении этого условия имеют место вложения

$$L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n) \rightleftarrows B_p^{(\alpha,N)}(R_m). \tag{1.11}$$

Доказательство этой теоремы следует в основном рассуждениям работы [3], в которой рассмотрен случай $\beta_k = 2^k$, $\Phi = l_2$.

Отметим, что в силу (6) справедливы вложения

$$L_{pl_1}^{(\beta,N)}(R_n) \subsetneq L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n) \subsetneq L_{pl_\infty}^{(\beta,N)}(R_n) \tag{1.12}$$

и поэтому теорема будет доказана, если мы убедимся в справедливости следующих трех утверждений:

I. *При нарушении условия* (1.10) *существует функция $g(x) \in L_{pl_1}^{(\beta,N)}(R_n)$ не имеющая следа на подпространстве R_m.*

II. *Для любой функции $f(w) \in B_p^{(\alpha,N)}(R_m)$ можно построить функцию $g(x)$ такую, что для почти всех $w \in R_m$ и в смысле сходимости в $L_p(R_m)$ $\lim\limits_{y\to 0} g(w, y) = f(w)$ и, кроме того, выполняется неравенство*

$$|g(x), L_{pl_1}^{(\beta,N)}(R_n)| \leqslant c\, |f(w), B_p^{(\alpha,N)}(R_m)|, \tag{1.13}$$

где постоянная c не зависит от f.

III. *Если выполнено* (1.10), *то любая функция $g(x)$ из класса $L_{pl_\infty}^{(\beta,N)}(R_n)$ может быть изменена на множестве нулевой меры в R_n таким образом, что она будет равномерно непрерывной по y при всех $w \in R_m$, функция $f_y(w) \equiv g(w, y)$ принадлежит классу $B_p^{(\alpha,N)}(R_m)$ при всех $y \in R_{n-m}$, является непрерывной по y как отображение из R_{n-m} в $B_p^{(\alpha,N)}(R_m)$ и выполняются неравенства*

$$\sup_{y\in R_{n-m}} |g(w, y), B_p^{(\alpha,N)}(R_m)| \leqslant c\,|g(x), L_{pl_\infty}^{(\beta,N)}(R_n)|, \tag{1.14}$$

$$\left(\int\limits_{R_{n-m}} |g(w, y), B_p^{(\alpha,N)}(R_m)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\,|g(x), L_{pt_\infty}^{(\beta,N)}(R_n)|, \tag{1.15}$$

где c не зависит от g.

Отметим, что последнее неравенство дополняет прямое вложение $L_{p,l_\infty}^{(\beta,N)}(R_n) \to B_p^{(\alpha,N)}(R_m)$.

Объединяя утверждение основной теоремы с результатами работы [4], получаем.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы, соотношение* (1.10) *и существует постоянная $\tau > 1$ такая, что $\alpha_{k+1} \leqslant \tau\alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$; обозначим*

$$n_k = \min\left\{s \,\Big|\, \sum_{l=s}^{\infty} \alpha_l^{-p'} \leqslant 2^{-kp'}\right\}, \tag{1.16}$$

$$h_{j,k} = (N_{j,n_k})^{-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.17}$$

(ясно, что $h_{j,k}$ не возрастают при увеличении k).

Выберем $\rho_j > 0$ такие, что при всех k, $l \geqslant 1$ и некоторой c [1]

$$h_{j,k+l} \leqslant c h_{j,k}\, 2^{-l\rho_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{1.18}$$

Тогда и только тогда функция $f(w) \in L_p(R_m)$ является следом на R_m некоторой функции $g(x) \in L_{p\Phi}^{(\beta, N)}(R_n)$, когда для всех $j = 1, 2, \ldots, m$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \omega_{p,x_j}^{(s_j)}(h_{j,k}; f)\right)^p < \infty, \tag{1.19}$$

где $\omega_{p,x_j}^{(s_j)}(h; f)$ — модуль непрерывности порядка $s_j > 1/\rho_j$ функции f по направлению оси x_j в метрике $L_p(R_m)$.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе устанавливаются пять лемм, которые составляют ядро доказательства теоремы.

Лемма 1. *Пусть p, $N_{j,k}$ — те же, что во введении; для последовательности неотрицательных чисел (u_k) обозначим*

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(\prod_{j=1}^{n} (1 + N_{j,k} |x_j|)^{-1}\right). \tag{2.1}$$

С постоянной c, не зависящей от (u_k), справедливо неравенство

$$\int_{R_n} H^p(x)\, dx \leqslant c \sum_{k=1}^{\infty} u_k^p \left(\prod_{j=1}^{n} N_{j,k}^{-1}\right). \tag{2.2}$$

Доказательство для случая $n = 1$ приведено в работе [3], далее рассуждаем по индукции; обозначаем $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$:

$$\tilde{u}_k = u_k \prod_{j=1}^{n-1} N_{j,k}^{-\frac{1}{p}}; \qquad \tilde{H}(x_n) = \left(\int_{R_{n-1}} H^p(\tilde{x}, x_n)\, d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

В силу индуктивного предположения и того факта, что норма в l_p не превосходит нормы в l_1, получаем из (2.1), (2.3) для любого x_n неравенство

$$\tilde{H}(x_n) \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{\infty} (u_k^p (1 + N_{n,k} |x_n|)^{-p} \prod_{j=1}^{n-1} N_{j,k}^{-1}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k (1 + N_{n,k} |x_n|)^{-1}. \tag{2.4}$$

Остается к $\tilde{H}(x_n)$ вновь применить одномерный случай неравенства (2.2). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — отображения метрического пространства Y в банахово пространство X, непрерывные в неизолированной точке $\zeta \in Y$ и такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\xi), X|$ ограничена вне любой окрестности точки ζ, а суммы $\sum_{k=1}^{N} f_k(\zeta)$ не ограничены в X.*

Тогда существует подмножество Ψ натуральных чисел такое, что ряд $\sum_{k \in \psi} f_k(\xi)$ (сходящийся, очевидно, абсолютно и равномерно вне любой окрестнос-

---

[1] Неравенство (1.18) справедливо во всяком случае при $\rho_j = \log_\tau (1 + \varepsilon_j)$, где ε_j из (4), но, возможно, и при бо́льших ρ_j.

ти ζ) *представляет собой функцию, неограниченную в любой окрестности точки* ζ.

Доказательство. Используя условия леммы, определяем рекуррентно последовательности n_s, m_s и последовательности δ_s, ε_s положительных чисел такие, что при всех $s = 1, 2\ldots$ выполняется:

1) $n_s < m_s < n_{s+1}$, $\quad \delta_{s+1} < \varepsilon_s < \delta_s/2$;

2) в шаре $B_{\delta_s}(\zeta)$ (радиуса δ_s с центром ζ) имеет место

$$\left|\left(\sum_{k=n_s}^{m_s} f_k(\xi)\right), X\right| \geqslant 3\sum_{k=1}^{n_s} |f_k(\xi), X| \geqslant 3^s;$$

3) множество $\Delta_s \equiv B_{\delta_s}(\zeta) \setminus B_{\varepsilon_s}(\zeta)$ непусто и для $\xi \in \Lambda_s$

$$\sum_{k=n_{s+1}}^{\infty} |f_k(\xi), X| < 3^{s-1}.$$

Порядок построения: n_1, m_1, δ_1, ε_1, n_2, m_2, δ_2, ε_2 и т. д.

Полагая $\Psi = \bigcup_{s=1}^{\infty} \{n_s \leqslant k \leqslant m_s\}$, будем иметь в силу условий 2) и 3) при любом $\xi \in \Lambda_s$ неравенство

$$\left|\left(\sum_{k\in\Psi} f_k(\xi)\right), X\right| \geqslant 3^s/6, \tag{2.5}$$

которое доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть* $f(z_1,\ldots,z_n)$ $(z_j = x_j + it_j;\ j = 1, 2,\ldots,n)$ — *целая функция экспоненциального типа* N_j *по переменным* z_j. *Имеет место неравенство*

$$|f(0)| \leqslant c_n \sup_k (\operatorname{mes} \Delta_k)^{-1} \int_{\Delta_k} |f(x)|\, dx, \tag{2.6}$$

где Δ_k — *прямоугольник в* R_n: $\{|x_j| \leqslant 2^k N_j^{-1};\ j = 1, 2,\ldots, n\}$.

Доказательство. Функция $(\sin z/z)$ целая экспоненциального типа 1, поэтому функция

$$g(z_1,\ldots,z_n) \equiv f(z_1,\ldots,z_n) \prod_{j=1}^{n} (\sin N_j z_j/N_j z_j)^{n+1} \tag{2.7}$$

есть целая экспоненциального типа $N_j(n+2)$ по переменным z_j.

Обозначим через L supremum в правой части (2.6) и пусть $\Gamma_k = \Delta_k \setminus \Delta_{k-1}$ $(\Delta_0 = \varnothing)$. Тогда по определению L для всех k выполняется

$$\int_{\Gamma_k} |f(x)|\, dx \leqslant \int_{\Delta_k} |f(x)|\, dx \leqslant L(\operatorname{mes} \Delta_k) = L\cdot 2^{n(k+1)} \prod_{j=1}^{n} N_j^{-1}. \tag{2.8}$$

С другой стороны, на Γ_k модуль второго сомножителя в (2.7) не превосходит $2^{(1-k)(n+1)}$ и поэтому из (2.8) следует

$$\int_{\Gamma_k} |g(x)|\, dx \leqslant 2^{-k}\cdot 2^{2n+1}\left(\prod_{j=1}^{n} N_j^{-1}\right) L. \tag{2.9}$$

Суммируя (2.9) по всем k, получаем

$$\int_{R_n} |g(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma_k} |g(x)|\, dx \leqslant 2^{2n+1}\left(\prod_{j=1}^{n} N_j^{-1}\right) L. \tag{2.10}$$

Применяя к функции g неравенство разных метрик ([1, с. 150), находим с учетом (2.7), что

$$|f(0)| = |g(0)| \leqslant 2^n (n+2)^n \left(\prod_{j=1}^{n} N_j\right) \int\limits_{R_n} |g(x)|\, dx \leqslant 2^{3n+1} (n+2)^n L.$$

Лемма доказана, причем c_n в (2.6) не превосходит $2^{3n+1}(n+2)^n$. Отметим, что для случая $n = 1$ это утверждение установлено в работе [3].

Для локально суммируемой в R_n функции $g(x)$ введем *максимальную функцию* Харди — Литтлвуда ([2, гл. 1])

$$(Mg)(x) \equiv \sup_{\substack{v_j>0 \\ j=1,2,\ldots,n}} (\operatorname{mes} \Delta_v(x))^{-1} \int\limits_{\Delta_v(x)} |g(t)|\, dt, \tag{2.11}$$

где $\Delta_v(x)$ — прямоугольник $\{t \in R_n \,\|\, t_j - x_j| < v_j;\ \ j = 1, 2, \ldots, n\}$.

Лемма 4. *Пусть $f(z_1, \ldots, z_2)$ те же, что и в предыдущей лемме, для любых x, $t \in R_n$ имеет место неравенство*

$$|f(t)| \leqslant c_n \left(\prod_{j=1}^{n} (1 + N_j |t_j - x_j|)\right) (Mf)(x), \tag{2.12}$$

где постоянная c_n та же, что и в (2.6).

Доказательство. Поскольку все инвариантно относительно сдвига, мы можем считать в (2.12) $t = 0$. Пусть L и Δ_k имеют тот же смысл, что и в доказательстве леммы 3, $0 < \lambda < 1$, а натуральное s выбрано таким, что (см. (2.6))

$$\int\limits_{\Delta_s} |f(t)|\, dt \geqslant L\lambda (\operatorname{mes} \Delta_s). \tag{2.13}$$

Рассмотрим прямоугольник (с центром в точке x)

$$\Delta = \{t \in R_n \mid |t_j - x_j| \leqslant |x_j| + 2^s N_j^{-1};\quad j = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.14}$$

По построению $\Delta \supset \Delta_s$ и

$$(\operatorname{mes} \Delta) = 2^n \prod_{j=1}^{n} (|x_j| + 2^s N_j^{-1}) =$$

$$= (\operatorname{mes} \Delta_s) \prod_{j=1}^{n} (1 + 2^{-s} N_j |x_j|) \leqslant \operatorname{mes} \Delta_s \prod_{j=1}^{n} (1 + N_j |x_j|). \tag{2.15}$$

Отсюда в силу (2.11), (2.6), (2.13) вытекает

$$(Mf)(x) \geqslant (\operatorname{mes} \Delta)^{-1} \int\limits_{\Delta_s} |f(t)|\, dt \geqslant L\lambda (\operatorname{mes} \Delta)^{-1} (\operatorname{mes} \Delta_s) \geqslant$$

$$\geqslant c_n^{-1} \left(\prod_{j=1}^{n} (1 + N_j |x_j|)\right)^{-1} |f(0)|\, \lambda. \tag{2.16}$$

Поскольку $\lambda < 1$ произвольно, лемма доказана.

Из (2.12) следует, что

$$|f(t)| \leqslant 2^n c_n (Mf)(x); \quad |t_j - x_j| < N_j^{-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.17}$$

Лемма 5. *Пусть E_k ($k = 1, 2, \ldots$) — последовательность измеримых множеств в R_n такая, что для чисел $\mu_k \equiv \operatorname{mes} E_k$ выполнено*

$$\mu_{k+1} \leqslant \lambda\mu_k, \quad \lambda < 1, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.18}$$

Для неотрицательной измеримой в R_n функции $F(x)$ положим

$$F_k(x) = \inf\{F(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in E_k + x\} \tag{2.19}$$

($E_k + x$ означает арифметическую сумму).

Имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sup_x F_k(x) \leqslant c_1 \int_{R_n} F(x)\,dx, \tag{2.20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \int_{R_n} F_k(x)\,dx \leqslant c_2 \int_{R_n} F(x)\,dx. \tag{2.21}$$

Доказательство. Выберем натуральное l таким, что $\lambda^l \leqslant (1 - \lambda)/2$, и рассмотрим множества

$$E'_k \equiv E_k \setminus \bigcup_{s > k+l} E_s. \tag{2.22}$$

По построению в силу (2.18) $\operatorname{mes} E'_k \geqslant \mu_k/2$, и каждая точка $x \in R_n$ принадлежит не более чем l множествам E'_k, так как $E'_k \cap E'_s = \varnothing$ при $|k - s| > l$. Из (2.19) следует, что

$$F_k(x) \leqslant (\operatorname{mes} E'_k)^{-1} \int_{x+E'_k} F(\tilde{x})\,d\tilde{x}. \tag{2.23}$$

Умножая это неравенство на μ_k и суммируя по k, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x) \leqslant 2l \int_{x+E'} F(\tilde{x})\,d\tilde{x}, \qquad E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k. \tag{2.24}$$

Интегрируя по x и меняя порядок интегрирования в правой части, приходим к соотношению

$$\int_{R_n} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x)\Big)\,dx \leqslant 2l \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\Big) \int_{R_n} F(x)\,dx, \tag{2.25}$$

которое совпадает с (2.21).

Для доказательства (2.20) рассмотрим произвольную последовательность точек $x^{(k)} \in R_n$, и пусть $\tilde{E}_k = (E_k + x^{(k)}) \setminus \bigcup_{s > k+l} (E_s + x^{(s)})$. Как и ранее, находим, что $\operatorname{mes} \tilde{E}_k \geqslant \mu_k/2$ и каждая точка $x \in R_n$ входит не более чем в l множеств $\tilde{E}_k$. Отсюда следует, что

$$\mu_k F_k(x^{(k)}) \leqslant 2 \int_{\tilde{E}_k} F(\tilde{x})\,d\tilde{x}. \tag{2.26}$$

Суммируя по всем k и обозначая $\tilde{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x^{(k)}) \leqslant 2l \int_{\tilde{E}} F(x)\,dx \leqslant 2l \int_{R_n} F(x)\,dx, \tag{2.27}$$

и поскольку $x^{(k)}$ совершенно произвольны, неравенство (2.20) установлено.

Приведенное рассуждение дает такие оценки для констант в (2.20), (2.21):

$$c_1 \leqslant 2l, \quad c_2 \leqslant 2l \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k; \qquad l = \left[\log_\lambda \frac{1-\lambda}{2}\right] + 1. \tag{2.28}$$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Мы сохраняем все обозначения введения и § 1.

Шаг 1. Прямое вложение (см. утверждение III § 1):

Пусть $g(x) \in L_{pl_\infty}^{(\beta,N)}(R_n)$, это означает, что $g \in L_p(R_n)$ и (см. (7), (5), (2))

$$G(x) \equiv \sup_k \beta_k |A_k g(x)| \in L_p(R_n). \tag{3.1}$$

При этом $| g, L_{pl_\infty}^{(\beta,N)}(R_n) | \rightleftharpoons | g, L_p(R_n) | + | G, L_p(R_n) |$.

Обозначим через E множество (полной меры в R_m) всех тех w, для которых

$$T(w) \equiv \int_{R_{n-m}} G^p(w, y)\, dy < \infty. \tag{3.2}$$

Ясно, что $T(w)$, E, равно как и $G(x)$, суть величины, не зависящие от изменения $g(x)$ на множестве нулевой меры в R_n.

Согласно классической теореме Харди — Литтлвуда — Винера ([2, гл. 1]) справедливо неравенство

$$\tilde{T}(w) \equiv \int_{R_{n-m}} (\tilde{M} G(w, y))^p\, dy \leqslant c_p T(w), \qquad 1 < p < \infty, \tag{3.3}$$

где $\tilde{M}$ означает операцию взятия максимальной функции по переменным $x_{m+1}, \ldots, x_n$ при фиксированном $w \rightleftharpoons (x_1, \ldots, x_m)$ (см. (2.11)).

Функции $A_k g(x)$ по своему определению (см. (5) и [1, § 8.10]) суть целые экспоненциального типа $N_{j,k}$ по переменным x_j ($j \rightleftharpoons 1, 2, \ldots, n$), поэтому из леммы 4 вытекает соотношение (см. (2.17))

$$A_k g(w, y) \leqslant c \tilde{M} A_k g(w, \tilde{y}) \qquad (|\tilde{x}_j - x_j| \leqslant N_{j,k}^{-1}; \quad j \rightleftharpoons m+1, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Применение леммы 5 дает с учетом (1.9), (3.1), (3.2), (3.3) неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \sup_{y \in R_{n-m}} |A_k g(w, y)|\right)^p \leqslant c T(w), \tag{3.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{R_{n-m}} (\alpha_k |A_k g(w, y)|)^p\, dy \leqslant c T(w). \tag{3.6}$$

Но согласно (1.10) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'} < \infty$ и, применяя к (3.5) неравенство Гёльдера, получаем равномерную (по y) сходимость при всех $w \in E$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k g(w, y). \tag{3.7}$$

Сумма этого ряда, которую мы обозначим $\hat{g}(w, y)$, есть непрерывная (по y) функция при всех $w \in E$. Она может отличаться от функции $g(w, y)$

лишь на множестве меры 0 в R_n, поскольку, как хорошо известно ([1, § 8.10]) ряд (3.7) сходится к $g(x)$ в метрике $L_p(R_n)$. Для определенности положим $\hat{g}(w, y) = 0$, $w \in E$.

Из (3.5), (3.7) и условия (1.10) легко находим с помощью неравенства Гёльдера, что

$$|\hat{g}(w, y) - \hat{g}(w, \tilde{y})| \leqslant \gamma(|y - \tilde{y}|)\, T^{\frac{1}{p}}(w), \tag{3.8}$$

где $\gamma(h) \to 0$ вместе с h. Также очевидно, что

$$\sum_{k=s}^{\infty} |A_k g(w, y)| \leqslant cT^{\frac{1}{p}}(w) \Big(\sum_{k=s}^{\infty} \alpha_k^{-p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \tag{3.9}$$

и, поскольку $\int\limits_{R_n} T(w)\, dw = |G, L_p(R_n)|^p$, мы заключаем, что ряд (3.7), рассматриваемый как функция w, сходится (равномерно по y) в пространстве $L_p(R_m)$. Из (3.5) заключаем, что при каждом $u \in R_{n-m}$ функция $\hat{g}(w, u)$, являющаяся следом $g(x)$ на гиперплоскости $\{y = u\}$, принадлежит пространству $B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$, а соотношение (3.6) влечет (1.15). Кроме того, из (3.8) явствует, что отображение $y \to \hat{g}(w, y)$ непрерывно из R_{n-m} в $L_p(R_m)$.

Шаг 2. Теорема о продолжении (утверждение II § 1).

Пусть $f(w) \in B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$, т. е. существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(w), \qquad f_k \in \mathfrak{M}_{k, p}(R_m), \tag{3.10}$$

сходящийся к $f(w)$ в $L_p(R_m)$ и такой, что

$$F(w) \equiv \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |f_k(w)|)^p\Big)^{1/p} \in L_p(R_m). \tag{3.11}$$

Фиксируем некоторую функцию $q(t)$ $(t \in R_1)$ со свойствами:

(i) $q(0) = 1$,

(ii) $|q(t)| \leqslant c(1 + |t|)^{-1}$,

(iii) преобразование Фурье функции $q(t)$ есть финитная функция с носителем, содержащимся в $[(1 + \varepsilon)^{-1}, 1]$, где $\varepsilon = \min\limits_{m < j \leqslant n} \varepsilon_j$ (см. (4)).

Всеми этими свойствами обладает, например, функция

$$q(t) = (\sin t\delta / t\delta)\, e^{i\gamma t}, \quad \delta = 2(1 + \varepsilon^{-1}), \quad \gamma = (1 + 2^{-1}\varepsilon), \quad (1 + \varepsilon)^{-1} \tag{3.12}$$

Далее, введем обозначение

$$Q_k(y) = \prod_{j=m+1}^{n} q(N_{j,k} x_j) \tag{3.13}$$

и рассмотрим ряд (ср. [1, § 9.5])

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(w)\, Q_k(y). \tag{3.14}$$

В силу (3.13), (3.11), свойства (ii) функции $q(t)$ и неравенства Гёльдера имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(w)\, Q_k(y)| \leqslant cF(w) \prod_{j=m+1}^{n} (1 + N_{j,1}|x_j|)^{-1} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.15}$$

Последний сомножитель здесь согласно (1.10) конечен, второй, очевидно, принадлежит $L_p(R_{n-m})$, а первый — $L_p(R_m)$. Следовательно, ряд (3.14) сходится абсолютно и равномерно по y при всех w таких, что $F(w) < \infty$ (эти w образуют множество $\tilde{E}$ полной меры в R_m) к функции $g(x) \in L_p(R_n)$, и так как $Q_k(0) = 1$, то $g(w, 0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(w)$ совпадает с $f(w)$ при почти всех $w \in R_m$.

Спектр $f_k(w)$ расположен (см. [1, § 3.1.5]) в прямоугольнике $\omega_k' = \{(\nu_1, \ldots, \nu_m) \,|\, |\nu_j| \leqslant N_{j,k};\ j = 1, \ldots, m\}$ и поэтому с учетом свойства (iii) функции $q(t)$ и соотношений (4), (5) мы можем утверждать, что для суммы ряда (3.14) выполнено

$$A_k g(x) = Q_k(y) f_k(w). \tag{3.16}$$

Из леммы 1 и определения чисел α_k (см. (1.9)) вытекает неравенство (см. еще (3.11))

$$\int\limits_{R_{n-m}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k A_k g(w, y)|\right]^p dy \leqslant cF^p(w). \tag{3.17}$$

Интегрирование этого неравенства по $w \in R_m$ показывает с учетом определений, что

$$|g, L_{p, l_1}^{(\beta, N)}(R_n)| \leqslant c\,|f, B_p^{(\alpha, N)}(R_m)|. \tag{3.18}$$

Тот факт, что $f(w)$ является следом на R_m функции $g(x)$ также и в смысле сходимости в $L_p(R_m)$, следует из рассуждений шага 1, поскольку $L_{p,l_1}^{(\beta,N)}(R_n) \subset L_{p,l_\infty}^{(\beta,N)}(R_n)$.

Шаг 3. Необходимость условия (1.10) (см. утверждение I § 1).

Предположим, в отличие от рассуждений первого и второго шага, что условие (1.10) нарушается, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'} = \infty. \tag{3.19}$$

Обозначая через b_k наименьшее из чисел $N_{m+1,k}, \ldots, N_{n,k}$ и учитывая, что в силу (4) $b_{k+1} \geqslant (1 + \varepsilon) b_k$; $\varepsilon > 0$, мы можем утверждать, что наряду с (3.19) при любом $\delta > 0$ будет выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + b_k^{-\delta})^{-p'} = \infty. \tag{3.20}$$

В самом деле, (3.20) очевидно в случае, когда $\alpha_k \leqslant b_k^{-\delta}$ для бесконечного множества индексов k, в противном случае $\alpha_k > b_k^{-\delta}$ при $k > k_0$, и (3.20) следует из (3.19).

Пусть $Q_k(y)$ те же, что на предыдущем шаге (см. (3.13)); непосредственно из определений явствуют неравенства

$$|Q_k(y), L_p(R_{n-m})| \leqslant c \prod_{j=m+1}^{n} N_{j,k}^{-\frac{1}{p}} \leqslant c b_k^{\frac{m-n}{p}}, \tag{3.21}$$

$$|Q_k(y)| \leqslant c \prod_{j=m+1}^{n} (1 + N_{j,k}|x_j|)^{-1} \leqslant c\left(1 + b_k \max_{m<j\leqslant n} |x_j|\right). \tag{3.22}$$

Согласно (3.20) для каждого $\delta > 0$ существует последовательность чисел $\gamma_k > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k (a_k + b_k^{-\delta}))^p < \infty, \tag{3.23}$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k a_k)^p < \infty, \quad \gamma_k \leqslant c b_k^{\delta}. \tag{3.24}$$

Поэтому если δ выбрано меньше $\min(1, (n-m)p^{-1})$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |Q_k(y)| \tag{3.25}$$

сходится в силу (3.21), (3.22) к ограниченной вне любой окрестности точки $y = 0$ функции, принадлежащей $L_p(R_{n-m})$.

Применяя лемму 2, строим множество Ψ натуральных чисел такое, что функция

$$V(y) \equiv \sum_{k \in \psi} \gamma_k Q_k(y) \tag{3.26}$$

не ограничена в любой окрестности нуля; с другой стороны, $V(y)$, очевидно, ограничена вне любой окрестности нуля и принадлежит $L_p(R_{n-m})$.

Теперь из первого неравенства (3.24) и рассуждений, буквально повторяющих рассуждения предыдущего шага, следует, что функция

$$g(x) \equiv Q_0(w) V(y), \tag{3.27}$$

где $Q_0(w) \not\equiv 0$ принадлежит $\mathfrak{M}_{1,p}(R_m)$, есть функция класса $L_{p,l_1}^{(\beta,N)}(R_n)$.

С другой стороны, величина

$$|g(w, y), \quad L_p(R_m)| = |Q_0(w), L_p(R_m)| V(y) \tag{3.28}$$

не ограничена в окрестности $y = 0$ и, следовательно, $g(x)$ не имеет следа на R_m.

На этом заканчивается доказательство основной теоремы.

Отметим, что рассуждения настоящей работы применимы к более общей ситуации, а именно:

Пусть $X(R_m)$ есть некоторое пространство измеримых функций, определенных на R_m, такое, что из $\{|f_2(w)| \leqslant |f_1(w)|$ при почти всех $w \in R_m\}$ следует $\{|f_2(w), X(R_m)| \leqslant |f_1(w), X(R_m)|\}$.

Пусть $\hat{X}_p(R_n)$ есть совокупность всех измеримых функций $g(x)$, $x \in R_n$ с конечной нормой

$$|g, \hat{X}_p(R_n)| \equiv \left| \left(\int_{R_{n-m}} |g(w, y)|^p \, dy \right)^{1/p}, X(R_m) \right|. \tag{3.29}$$

Предположим, что для любой функции из $\hat{X}_p(R_n)$ ряд (3.7) сходится к ней по норме этого пространства (все эти условия выполнены, например, для случая $X(R_m) = L_q(R_m)$, $1 < q < \infty$).

Определим пространства $L_{\hat{X}_p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ и $B_{p,X}^{(\alpha,N)}(R_m)$, вводя нормы (см. (7), (5), (1.2), (1.3)).

$$|g, L_{\hat{X}_p\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)| \equiv |g, \hat{X}_p(R_n)| + |\,|(\beta_k (A_k g)(x)), \Phi|, \hat{X}_p(R_n)|, \tag{3.30}$$

$$|f, B_{pX}^{(\alpha,N)}(R_m)| \equiv |f, X(R_m)| + \inf \left\{ \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k f_k(w)|^p \right)^{1/p}, X(R_m) \right| \right\}, \tag{3.31}$$

где $f_k(w)$ — целые экспоненциального типа $N_{j,k}$ по x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(w) = f(w)$ (в X (R_m)).

Тогда при условии (1.10) имеют место вложения

$$L^{(\beta, N)}_{\tilde{X}_p, \Phi}(R_n) \to L^{(\beta, N)}_{\tilde{X}_p, l_\infty}(R_n) \to B^{(\alpha, N)}_{p, X}(R_m) \to L^{(\beta, N)}_{\tilde{X}_p l_1}(R_n) \to L^{(\beta, N)}_{\tilde{X}_p, \Phi}(R_n). \quad (3.32)$$

Первое и последнее вложения здесь очевидны, второе и третье устанавливаются точно так же, как и в основном случае (X $(R_m) = L_p$ (R_m)).

Действительно, достаточно заменить интегрирование по $w \in R_m$ ключевых соотношений (3.5) и (3.17) взятием нормы корней p-й степени из них в пространстве X (R_m).

Укажем еще (это не относится к следствию из основной теоремы), что условие (4) на рост $N_{j,k}$ использовалось лишь для $m < j \leqslant n$; относительно остальных j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ достаточно предполагать, что $N_{j,k}$, не убывая, стремятся к ∞ вместе с k.

Автор выражает искреннюю благодарность П. И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Замечание. После того, как данная работа была сдана в печать, автору стало известно об исследовании М. Л. Гольдмана (см. его статью «Описание следов для некоторых функциональных классов» в настоящем сборнике), в котором другими методами получены близкие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы сложения. М.: Наука, 1969.
2. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
3. *Калябин Г. А.* Пространства следов для обобщенно-лиувиллевских анизотропных классов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, 42, № 2, с. 305—314.
4. *Калябин Г. А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля.— ДАН СССР, 1977, 232, № 6.
5. *Калябин Г. А.* Задача о следах для весовых анизотропных классов лиувиллевского типа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, 41, № 5, с. 1138—1160.
6. *Гольдман М. Л.* Описание пространства следов для функций обобщенного гельдерова класса.— ДАН СССР, 1976, 231, с. 525—528.
7. *Лизоркин П. И.* Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространства Соболева $L_p^{r_1 \ldots r_n}$ с дробными производными.— ДАН СССР, 1966, 170, с. 508—511.
8. *Калябин Г. А.* Описание следов для функций из весовых классов лиувиллевского типа.— ДАН СССР, 1976, 227, № 2, с. 284—287.