УДК 513.88

Обратная задача с финальным переопределением для абстрактного эволюционного уравнения в упорядоченном банаховом пространстве

© 1993. А. И. Прилепко, И. В. Тихонов

Рассмотрим в *банаховой структуре* E с конусом E_+ [1] задачу о нахождении элемента f из соотношений

$$u'(t) = Au(t) + \Phi(t)f \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

$$u(T) = \psi \qquad (\psi \in D(A)). \tag{3}$$

Здесь $T > 0$ — число. Оператор A — линейный замкнутый, с плотной областью определения $D(A)$. Мы предполагаем, что A порождает C_0-полугруппу $S(t)$ *положительных операторов*: $S(t)E_+ \subset E_+$ при $t \geqslant 0$. Операторная функция $\Phi(t)$ гладко зависит от t, т.е. $\Phi \in C^1([0,T]; \mathcal{L}(E))$. Кроме того, $\Phi(t)$ удовлетворяет специальному требованию *равномерной дизъюнктности*: если $f_1 \perp f_2$, то $\Phi(t_1)f_1 \perp \Phi(t_2)f_2$ при любых $t_1, t_2 \in [0,T]$.

(Напомним обозначения: 1) $f_1 \perp f_2$ означает, что $\inf(|f_1|, |f_2|) = 0$; 2) $f \geqslant 0$ означает, что $f \in E_+$; 3) $L \geqslant 0$, где $L \in \mathcal{L}(E)$, означает, что $L(E_+) \subset E_+$. Всюду в статье $\mathcal{L}(E)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов из E в E с обычной операторной нормой.)

Фиксируем элемент $\psi \in D(A)$. *Решением задачи* (1)–(3) назовем элемент $f \in E$ такой, что решение $u(t) = u(t; f)$ соответствующей задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию (3).

Теорема 1 (принцип максимума для задачи (1)–(3)). *Предположим, что полугруппа $S(t)$, порожденная оператором A, позитивна, и пусть комплексный спектр оператора A лежит в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. Пусть $\Phi(t)$ — равномерно дизъюнктная на $[0,T]$ операторная функция, причем $\Phi(t) \geqslant 0$ и $\Phi'(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Кроме того, пусть $\operatorname{Ker}\Phi(T) = \{0\}$. Наконец, предположим, что элемент $\psi \in D(A)$ выбран так, что $A\psi \leqslant 0$. Тогда решение задачи* (1)–(3) (*если оно существует*) *удовлетворяет условию $f \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть f — решение задачи (1)–(3), отвечающее элементу ψ ($A\psi \leqslant 0$). Покажем, что $f \geqslant 0$. Пользуясь тем, что E — структура, представим f в виде $f = f^+ - f^-$, где $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = \sup(-f, 0)$. Ясно, что $f^+ \geqslant 0$, $f^- \geqslant 0$ и $f^+ \perp f^-$. Рассмотрим две задачи Коши:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \Phi(t)f^+, \\ u(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + \Phi(t)f^-, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $u_1(t)$ — решение первой из них, а $u_2(t)$ — второй. Сразу заметим, что тогда

$$u_1'(T) \geqslant 0, \qquad u_2'(T) \geqslant 0. \tag{5}$$

Действительно, по определению функции $u_1(t)$ имеем

$$u_1'(T) = S(T)\,\Phi(0)\,f^+ + \int_0^T S(T-s)\,\Phi'(s)\,f^+ ds,$$

где $S(\cdot) \geqslant 0$, $\Phi(\cdot) \geqslant 0$, $\Phi'(\cdot) \geqslant 0$ и $f^+ \geqslant 0$. Отсюда следует, что $u_1'(T) \geqslant 0$. Второе из неравенств (5) доказывается аналогично.

Далее, очевидно, что $u_1(T) - u_2(T) = \psi$ (ибо $f^+ - f^- = f$ — решение обратной задачи (1)–(3)). Введем обозначения $\varphi_1 \equiv u_1(T)$, $\varphi_2 \equiv u_2(T)$. Тогда $\varphi_1 = \psi + \varphi_2$. С другой стороны, полагая $t = T$ в уравнениях (4), получаем

$$u_1'(T) = A\varphi_1 + \Phi(T)\,f^+, \qquad u_2'(T) = A\varphi_2 + \Phi(T)\,f^-.$$

Отсюда в силу (5) следует, что $A\varphi_1 + \Phi(T)\,f^+ \geqslant 0$ и $A\varphi_2 + \Phi(T)\,f^- \geqslant 0$. Кроме того, так как $\varphi_1 = \psi + \varphi_2$, где $A\psi \leqslant 0$ (по условию теоремы), то $A\varphi_2 + \Phi(T)\,f^+ \geqslant -A\psi \geqslant 0$. Таким образом,

$$A\varphi_2 + \Phi(T)\,f^+ \geqslant 0, \qquad A\varphi_2 + \Phi(T)\,f^- \geqslant 0.$$

Но тогда $(-A\varphi_2) \leqslant \inf(\Phi(T)\,f^+, \Phi(T)\,f^-)$, причем элементы $\Phi(T)\,f^+$, $\Phi(T)\,f^-$ неотрицательны и дизъюнктны. Значит, $A\varphi_2 \geqslant 0$.

Далее, так как спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, то резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ существует при $\lambda = 0$ и является положительным оператором [1, с. 184]. Поэтому из соотношения $A\varphi_2 \geqslant 0$ следует, что $\varphi_2 \leqslant 0$. С другой стороны, по определению φ_2 имеем

$$\varphi_2 \equiv u_2(T) = \int_0^T S(T-s)\,\Phi(s)\,f^- ds,$$

где $S(\cdot) \geqslant 0$, $\Phi(\cdot) \geqslant 0$ и $f^- \geqslant 0$. Следовательно, $\varphi_2 \geqslant 0$ и автоматически $\varphi_2 = 0$. Отсюда с учетом $\operatorname{Ker}\Phi(T) = \{0\}$ уже нетрудно получить, что $f^- = 0$. Но тогда $f = f^+ \geqslant 0$. Теорема доказана.

Легким следствием теоремы 1 являются такие утверждения:

Теорема 2. *Пусть A и $\Phi(t)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (1)–(3) *единственно* (*если оно существует*).

Теорема 3. *Пусть A и $\Phi(t)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Предположим дополнительно, что полугруппа $S(t)$ компактна при $t > 0$, а оператор $\Phi(T)$ непрерывно обратим, т.е. $[\Phi(T)]^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Тогда задача* (1)–(3) *однозначно разрешима при любом $\psi \in D(A)$.*

Доказательство теоремы 2 очевидно, а доказательство теоремы 3 основано на свойстве *фредгольмовости* задачи (1)–(3) [7]. Более точно, в условиях теоремы 3 обратная задача сводится к уравнению $f - Bf = g$, где B — компактный положительный оператор:

$$B \equiv [\Phi(T)]^{-1}\left(S(T)\,\Phi(0) + \int_0^T S(T-s)\,\Phi'(s)\,ds\right),$$

а $g \equiv [\Phi(T)]^{-1}(-A\psi)$ — фиксированный элемент. Теперь вывод теоремы 3 сразу следует из теоремы 2 и альтернативы Фредгольма. Заметим также, что в условиях теоремы 3 решение задачи (1)–(3) можно искать с помощью ряда Неймана: $f = \sum_{n=0}^{\infty} B^n g$. Действительно, по теореме 1 оператор $(I-B)^{-1}$ является положительным, и, значит, спектральный радиус оператора B меньше 1 [2, с. 329–330].

Замечания. 1) Условие равномерной дизъюнктности $\Phi(t)$ весьма естественно с точки зрения приложений. Так, в случае, когда E — функциональная банахова структура на множестве Ω, можно считать, что $\Phi(t)$ имеет вид

$$(\Phi(t)f)(x) = \varphi(x,t)f(x) \qquad (x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$$

с подходящей функцией $\varphi(x,t)$.

2) В доказательстве теоремы 1 используются некоторые соображения из предыдущей работы авторов [3]. Близкие по духу рассуждения имеются в [4–6] (в [4] — для эллиптических, а в [5] и [6] — для параболических уравнений). Однако сам принцип максимума (теорема 1) отмечается, по-видимому, впервые и является новым даже для конкретных уравнений математической физики. Отметим также работу [8], где доказан критерий единственности решения задачи (1)–(3) при условии, что $\Phi(t) \equiv I$.

Литература

1. *Клемент Ф. и др.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. **2.** *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. **3.** *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, вып. 2. – С. 77–87. **4.** *Прилепко А. И.* // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, №1. – С. 30–44. **5.** *Прилепко А. И., Соловьев В. В.* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, №11. – С. 1971–1980. **6.** *Прилепко А. И., Костин А. Б.* // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, №4. – С. 49–68. **7.** *Орловский Д. Г.* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, №9. – С. 1614–1621. **8.** *Эйдельман Ю. С.* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, №9. – С. 1647–1649.

Московский инженерно-физический институт

Поступило в редакцию
3 сентября 1991 г.,
в сокращенном виде
7 мая 1992 г.

УДК 517.983.3

О расширении одного оператора слабого типа

© 1993. В. А. Родин

Пусть f — интегрируемая 2π-периодическая функция и $S_n(f,x)$ — частная сумма порядка n ее тригонометрического ряда Фурье. В работе [1] показано, что оператор

$$(Tf)(x) = \sup_{m,n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left|S_{k+n}(f,x) - \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} S_{j+n}(f,x)\right| \tag{1}$$

имеет слабый тип $(1,1)$. Отсюда следует, что оператор (1) ограниченно действует из L_1 в квазинормированное пространство L_μ с $0<\mu<1$. В заметке найдено наименьшее (экстремальное) симметричное квазинормированное пространство, в которое из L_1 ограниченно действует оператор (1). Получено также необходимое и достаточное условие на симметричное функциональное пространство E для того, чтобы T действовал ограниченно из E в E.