УДК 517.95

С. М. Ситник

ОПЕРАТОРЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

В работе приводятся основные определения и некоторые результаты теории дробного интегро-дифференцирования для дифференциального оператора Бесселя $B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x} D$.

Уравнения в частных производных с таким оператором встречаются при исследовании задач с радиальной или весовой симметрией, теории уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, краевых задач для стационарного уравнения Шредингера в случае решений с существенными особенностями и многих других [1–3]. Поэтому представляет значительный интерес обобщить для оператора Бесселя основные определения и результаты классической теории дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля [1, 2]. Указанные операторы могут быть также применены в теории операторов преобразования.

Определение. Пусть $f(x) \in C^{2k}(0, b]$. Определим правосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии $f^{(i)}(b) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ по формуле

$$\left(B_{b-}^{\nu,k} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\, dy =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_x^b \left(y^2 - x^2\right)^{\left(k-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right) f(y)\, dy. \quad (1)$$

Определим левосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии $f^{(i)}(a) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ по формуле

$$\left(B_{a+}^{\nu,k} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_a^x \left(\frac{x^2 - y^2}{2x}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) f(y)\, dy =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_a^x \left(x^2 - y^2\right)^{\left(k-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right) f(y)\, dy, \quad (2)$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра.

Введённые операторы являются интегральными реализациями отрицательных целых степеней $(B_\nu)^{-k}$, некоторые соответствующие представления в другом контексте решения дифференциальных уравнений были ранее получены в [4]. Их распространение на произвольные комплексные значения параметра k проводится аналогично классическому случаю [1]. При $\nu = 0$ оператор Бесселя сводится ко второй производной, а введённые операторы (1)–(2) — к интегралам Римана—Лиувилля

$$B_{b-}^{k,0} f = I_{b-}^{2k} f, \quad B_{a+}^{k,0} f = I_{a+}^{2k} f.$$

Многочисленные приложения операторов дробного интегро-дифференцирования основаны на их вхождении в остаточный член формулы Тейлора. Нами получены формулы Тейлора для дифференциального оператора Бесселя с остаточным членом [5, 6].

Теорема. *Справедлива формула Тейлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора Бесселя с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-2} {}_2F_1\left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i-1; 2i-1; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \left(B^{i-1} f \right) \Big|_b - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \left(D B^{i-1} f \right) \Big|_b \right\} + B_{b-}^{\nu,k} \left(B^k f \right),$$

где $B_{b-}^{\nu,k}$ — оператор левостороннего дробного интегрирования Бесселя (1).

Также справедлива двойственная формула, использующая формально сопряжённый оператор

$$C_\nu f = D^2 f - D\left(\frac{\nu}{y} f \right) = D^2 - \frac{\nu}{y} D f + \frac{\nu}{y^2}.$$

Отметим, что формула Тейлора для дифференциального оператора Бесселя с неопределёнными явно коэффициентами и остаточным членом рассматривалась в [7]. Наш подход не содержит неявно определяемых операторов и неизвестных числовых коэффициентов. В [7] также содержатся приложения к оценкам остатка метода конечных элементов и разностных методов для ряда задач. Рассмотрены и более общие дробные степени, порождаемые дифференциальными выражениями $(\frac{1}{x} D)^m (B_\nu)^k$. Это семейство операторов интересно тем, что содержит обычные операторы Римана—Лиувилля ($m = 0$, $\nu = 0$), дробное интегро-дифференцирование Бесселя ($m = 0$), операторы Эрдейи—Кобера ($k = 0$). В этом случае также доказана формула Тейлора.

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Мн.: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. — 299 с.
3. *Репин О.А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. — Самара: Изд-во Саратов. ун-та, Сам. филиал, 1992. — 162 с.
4. *Sprinkhuizen—Kuyper I.G.* A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second–order differential operator // J. Math. Analysis and Applications, 1979. — No. 72. — P. 674–702.
5. *Коновалова Д.С., Ситник С.М.* Формула Тэйлора для операторов типа Бесселя // Понтрягинские чтения – VII: Тез. докл. Воронеж. мат. шк. — Воронеж, 1996. — С. 102.
6. *Ситник С.М.* Дробное интегродифференцирование для дифференциального оператора Бесселя // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Материалы международ. симп. — Нальчик–Эльбрус, 2004. — С. 163–167.
7. *Катрахов В.В., Катрахова А.А.* Формула Тэйлора с оператором Бесселя для функций одной и двух переменных. — Воронеж, 1982. — 32 с. — (Деп. в ВИНИТИ).

Воронежский институт МВД России, г. Воронеж

УДК 517.925

В. Р. Смилянский

СВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К СКАЛЯРНЫМ УРАВНЕНИЯМ ТОГО ЖЕ ПОРЯДКА И ТИПА

Как известно, решения обыкновенных *скалярных* линейных дифференциальных уравнений какого-либо данного порядка и типа обычно исследованы гораздо детальнее, чем решения *систем* линейных дифференциальных уравнений того же порядка и типа. Например, все определяемые дифференциальными уравнениями специальные функции, рассмотренные в [1–3], определяются именно *скалярными* уравнениями второго порядка. Причина в том, что при исследовании скалярных уравнений различные соотношения носят скалярный характер, в то время как при исследовании систем аналогичные соотношения (например, рекуррентные) получаются в матричной форме. Это делает актуальной поставленную в заглавии задачу.