Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, О множествах неединственности для пространств голоморфных функций, *Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ.*, 2016, выпуск 4, 108–115

DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.4.8

DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.4.8
УДК 517.53 : 517.574
ББК 22.161

О МНОЖЕСТВАХ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Булат Нурмиевич Хабибуллин
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры
высшей алгебры и геометрии,
Башкирский государственный университет
khabib-bulat@mail.ru
ул. З. Валиди, 32, 450076 г. Уфа, Российская Федерация

Фархат Булатович Хабибуллин
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
высшей алгебры и геометрии,
Башкирский государственный университет
khabibullinfb@list.ru
ул. З. Валиди, 32, 450076 г. Уфа, Российская Федерация

Аннотация. В статье усовершенствуются и уточняются некоторые результаты из предшествующей нашей недавней статьи из журнала «Известия вузов. Математика» 2015 г. за счет последних наших результатов 2016 г. об оценках снизу субгармонических функций логарифмом модуля голоморфной ненулевой функции.

Ключевые слова: голоморфная функция, последовательность нулей, субгармоническая функция, мера Рисса, последовательности неединственности.

Введение

Как обычно, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно всех *вещественных* и *комплексных чисел* или их естественные геометрические интерпретации; кроме того, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — *единичный круг* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Используются определения и понятия из [3; 6; 8; 9], но при необходимости мы их повторяем. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Каждой не более чем счетной последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ без точек сгущения в D сопоставляем *считающую меру* n_Λ, а именно: $n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1$ —

число точек из Λ, попавших в $S \subset D$. Заметим, что среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. По определению функция $n_\Lambda(\lambda) := n_\Lambda(\{\lambda\})$ — дивизор последовательности Λ, то есть число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ. Так, $\lambda \in \Lambda$, если $n_\Lambda(\lambda) > 0$.

Векторное пространство всех голоморфных в D функций обозначаем как $\mathrm{Hol}(D)$. Если не оговорено противное, пространство $\mathrm{Hol}(D)$ наделяем топологией равномерной сходимости на компактах из D. Ненулевой функции $f \in \mathrm{Hol}(D)$ соответствует *последовательность нулей* Zero_f, перенумерованная с учетом кратности.

Последовательность точек $\Lambda \subset D$ называется *подпоследовательностью нулей* для подмножества $H \subset \mathrm{Hol}(D)$, если найдется ненулевая функция $f \in H$, для которой $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_f$ в том смысле, что $n_\Lambda(\lambda) \leq n_{\mathrm{Zero}_f}(\lambda)$ для всех $\lambda \in D$. Если H замкнуто относительно вычитания, например, векторное подпространство над $\mathbb{R}$, то подпоследовательность нулей для H называют *последовательностью,* или *множеством, неединственности* для H.

Выпуклый конус всех субгармонических функций в области $D \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $\mathrm{sbh}(D)$. Субгармоническую функцию, тождественно равную $-\infty$ на D, обозначаем $\boldsymbol{-\infty}$. Для $s \in \mathrm{sbh}(D)$ меру Рисса функции s чаще всего будем обозначать как ν_s, и наоборот, субгармоническую функцию s в D с мерой Рисса ν часто записываем в виде $s := s_\nu$. Борелевскую положительную меру (конечную на компактах из D), или меру Радона ν [9, Appendix A], называем *подмерой для подмножества* $S \subset \mathrm{sbh}(D)$, если найдется функция $s \in S$, которая $\neq \boldsymbol{-\infty}$, с мерой Рисса $\nu_s \geq \nu$ на D. Иначе говоря, ν — подмера для S, если для некоторой (любой) субгармонической функции s_ν с мерой Рисса ν найдется функция $v \in \mathrm{sbh}(D)$, не равная $\boldsymbol{-\infty}$, для которой $s := s_\nu + v \in S$. Возможность варьирования слов «некоторый» и «любой» в последнем предложении обеспечена «нечувствительностью» неравенств к перекидыванию гармонических слагаемых от одного субгармонического слагаемого к другому.

Для (весовой) функции $M\colon D \to [-\infty, +\infty]$ со значениями в расширенной вещественной оси $[-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с естественным отношением порядка определим весовой класс субгармонических функций

$$\mathrm{sbh}(D; M] := \{s \in \mathrm{sbh}(D)\colon s \leq M + \mathrm{const} \textit{ на } D\},$$

где здесь и далее const — какая-либо постоянная, а «$s \leq M + \mathrm{const}$ *на* D» означает выполнение поточечных неравенств $s(z) \leq M(z) + \mathrm{const}$ во всех точках $z \in D$. Аналогично, определим весовое пространство голоморфных функций

$$\mathrm{Hol}(D; \exp M] := \{f \in \mathrm{Hol}(D)\colon |f| \leq \mathrm{const} \cdot \exp M \textit{ на } D\}.$$

В разделе 1 рассматривается следующая задача. Пусть N и M — две весовые функции в области $D \subset \mathbb{C}$ и Λ — последовательность точек в D. При каких простых соотношениях между N и M некоторая подмера $\mu \geq n_\Lambda$ для $\mathrm{sbh}(D; M]$ определяет подпоследовательность нулей Λ для пространства $\mathrm{Hol}(D; \exp N]$ или, возможно, чуть большего пространства? Более или менее удовлетворительное решение этой задачи позволяет свести исследование подпоследовательностей нулей к гибкому аппарату субгармонических функций, к тому же в классах $\mathrm{sbh}(D; M]$, отличных от $\mathrm{sbh}(D; N]$. Также в важном следующем разделе 2 тот же вопрос отдельно комментируется для весовых пространств функций на всей плоскости $\mathbb{C}$, определяемых положительно однородными при показателе $\rho > 0$ весовыми функциями.

Авторы глубоко признательны рецензенту за ряд полезных замечаний.

1. Последовательности неединственности

Пусть S — подмножество расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Для подмножества $S \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\operatorname{clos} S$ и $\operatorname{bd} S$ обозначаем соответственно замыкание и границу S в $\mathbb{C}_\infty$; на евклидовом пространстве $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ — евклидово расстояние между двумя объектами (точками, подмножествами) в евклидовом пространстве (в нашем случае $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Пусть $d\colon D \to (0,1]$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$0 < d(z) < \operatorname{dist}(z, \operatorname{bd} D), \quad z \in D. \tag{1}$$

Каждой функции N сопоставляем ее усреднение по кругам с центром z радиуса $0 < r < \operatorname{dist}(z, \operatorname{bd} D)$, обозначаемое как

$$B(z,r;N) := \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r N(z + te^{i\theta}) t \, dt \, d\theta.$$

Весовой функции $N\colon D \to [-\infty, +\infty]$ будем сопоставлять некоторое ее «*поднятие*» $N^\uparrow\colon D \to [-\infty, +\infty]$, а именно: *для каждого* $z \in D$ *полагаем*:

1) Если $\mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{clos} D \neq \varnothing$ (непустое множество), то полагаем

$$N^\uparrow(z) := B(z, d(z); N) + \ln \frac{1}{d(z)}. \tag{2}$$

2) Если $D = \mathbb{C}$ — комплексная плоскость, то для любого сколь угодно большого числа $P > 0$ можем положить

$$N^\uparrow(z) := B\Big(z, \frac{1}{(1+|z|)^P}; N\Big). \tag{3}$$

Замечание 7. Обратим внимание, что предложенные функции-поднятия $N^\uparrow$, в отличие от предложенных ранее четырех таких функций (2a)–(2d) в [7, перед теоремой 1], которые здесь не приводятся ввиду громоздкости, значительно тоньше, компактнее и существенно более медленного роста. Таким образом, предлагаемая ниже теорема 1 намного более точная, чем предшествующий ей результат 2015 года [7, теорема 1].

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, функции $N, M \in \operatorname{sbh}(D)$, $M - N \in \operatorname{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_{M-N}, $N, M \neq -\infty$, Λ — последовательность точек в D.*

Если Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D; \exp N]$, то $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D; M]$.

Обратно, если $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D; M]$, N — непрерывная функция на D, то последовательность точек Λ — последовательность неединственности для пространства $\operatorname{Hol}(D; \exp N^\uparrow]$ с подходящей весовой функцией-поднятием $N^\uparrow$ из (2) при $\mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{clos} D \neq \varnothing$ и с функцией-поднятием $N^\uparrow$ при произвольном фиксированным числе $P > 0$ из (3) при $D = \mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D; \exp N]$. Это означает, что для функции f_Λ с $\operatorname{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ найдется ненулевая функция $h \in \operatorname{Hol}(D)$, для которой произведение $f_\Lambda h \in \operatorname{Hol}(D; N]$, или $\log|f_\Lambda| + \log|h| \le N$. Введем обозначение

$$s_{\nu_{M-N}} := M - N \in \operatorname{sbh}(D). \tag{4}$$

Тогда $\log|f_\Lambda| + \log|h| + s_{\nu_{M-N}} \leq N + (M-N) = M$ на D, то есть для меры Рисса $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ субгармонической функции $\log|f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}}$ нашлась субгармоническая функция $v = \log|h| \neq -\infty$, для которой сумма $\bigl(\log|f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}}\bigr) + v$ принадлежит классу $\mathrm{sbh}(D; M)$. Таким образом, установлено, что $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\mathrm{sbh}(D; M)$. Обратно, пусть $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\mathrm{sbh}(D; M)$. Это значит, что найдется функция $w \in \mathrm{sbh}(D)$, с которой в обозначении (4)

$$\log|f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}} + w \leq M + \mathrm{const} \quad \textit{на } D.$$

Иначе

$$\log|f_\Lambda| + M - N + w - \mathrm{const} \leq M \quad \textit{на } D,$$

то есть

$$\log|f_\Lambda| + v \leq N \quad \text{на } D \tag{5}$$

для функции $v = w - \mathrm{const} \in \mathrm{sbh}(D)$, $v \neq -\infty$. Будет использовано следующее предложение.

Предложение 1 ([5, следствие 3]). *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $\mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{clos} D \neq \varnothing$ с непрерывной функцией $d\colon D \to (0,1]$, для которой выполнено условие* (1). *Для субгармонической в D функции $v \neq -\infty$ найдется ненулевая функция $h \in \mathrm{Hol}(D)$, удовлетворяющая условию*

$$\log|h(z)| \leq B(z, d(z); v) + \ln\frac{1}{d(z)} \quad \textit{для всех } z \in D. \tag{6}$$

Применим усреднения по шарам к обеим частям

$$B\bigl(z, d(z); \log|f_\Lambda|\bigr) + B\bigl(z, d(z); v\bigr) \leq B\bigl(z, d(z); N\bigr),$$

или, в силу субгармоничности $\log|f|$,

$$\log|f_\Lambda| + B\bigl(z, d(z); v\bigr) \leq B\bigl(z, d(z); N\bigr).$$

Применяя к последнему неравенству соотношение (6) предложения 1, получаем требуемый случай с поднятием $N^{\uparrow}$ из (2), поскольку ненулевая голоморфная функция $f_\Lambda h$ с подпоследовательностью нулей Λ принадлежит уже классу $\mathrm{Hol}(D; \exp N^{\uparrow})$.

Доказательство для случая $D = \mathbb{C}$ проводится совершенно аналогично через следующее предложение.

Предложение 2 ([5, следствие 2 с комментарием]). *Для любой субгармонической в $\mathbb{C}$ функции $v \neq -\infty$ для любого сколь угодно большого числа $P > 0$ найдется ненулевая целая функция $h \in \mathrm{Hol}(D)$, удовлетворяющая условию*

$$\ln|h(z)| \leq B\Bigl(z, \frac{1}{(1+|z|)^P}; v\Bigr) \quad \textit{для всех } z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

2. Положительно ρ-однородные субгармонические функции

Мы вынуждены повторить и напомнить некоторые сведения, собранные в [7, п. 3.1]. Пусть $\rho \in (0,+\infty)$. Обозначим через $\rho\text{-shg}(\mathbb{C}) \subset \text{sbh}(\mathbb{C})$ *множество субгармонических положительно однородных при показателе* ρ *функций* $H \neq -\infty$, то есть $H(tz) = t^\rho H(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$. Через $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ обозначаем множество 2π*-периодических* ρ*-тригонометрически выпуклых*[2] *функций* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, [2–4; 8], полностью определяемых условиями-неравенствами

$$h(\theta)\sin\rho(\theta_2-\theta_1) \leq h(\theta_1)\sin\rho(\theta_2-\theta) + h(\theta_2)\sin\rho(\theta-\theta_1), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \theta_1 + \frac{\pi}{\rho}.$$

Известно, что

(i) отображение-расширение ext: $h \longmapsto \bigl(H\colon re^{i\theta} \mapsto h(\theta)r^\rho,\ r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}\bigr)$, функций $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задает аддитивную положительно однородную сохраняющую точную верхнюю грань биекцию выпуклых конуса $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ на конус $\rho\text{-shg}(\mathbb{C})$, и функции из $\rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ и $\rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ непрерывны [3; 5; 7–9], [2, § 2.3, I–VI], [4, свойство 9.5, теоремы 9.12];

(ii) *функция* $H \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ *удовлетворяет локальному условию Липшица в форме* (см. [2, § 2.3, IV] и детальнее [4, свойство 9.25 и следствие 9.26 с доказательством])

$$\bigl|H(z)-H(w)\bigr| \leq \rho \max_{\varphi\in\mathbb{R}} H(e^{i\varphi}) \cdot \bigl(\max\bigl\{|z|,|w|\bigr\}\bigr)^{\rho-1}|z-w|, \quad z,w \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

и, как следствие из п. (i), *функция* $h \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\bigl|h(\theta)-h(\vartheta)\bigr| \leq \rho \max_{\varphi\in\mathbb{R}} h(\varphi) \cdot |\theta-\vartheta|, \quad \theta,\vartheta \in \mathbb{R}; \tag{9}$$

(iii) в обозначениях из (i)–(ii) *плотность меры Рисса* $d\nu_H$ *функции* $H \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ *в полярных координатах определяется как произведение плотностей мер*

$$d\nu_H(re^{i\theta}) = r^{\rho-1}\,dr \otimes \frac{1}{2\pi}\bigl(h''(\theta)+\rho^2h(\theta)\bigr)\,d\theta, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C},\ r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где производные понимаются в смысле теории распределений, или обобщенных функций, а $h''+\rho^2h \geq 0$ — *положительная* 2π*-периодическая мера на* $\mathbb{R}$.

Пусть $h_1, h_2 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$. Воспользуемся терминологией диссертации А.В. Абанина [1, § 2.5], широко используемой при исследовании абсолютно представляющих систем. Функцию h_1 называем ρ*-выпукло дополняемой* до h_2, если $h_2 - h_1 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$. В этом случае естественно называть и (см. (i)) функцию $H_1 := \operatorname{ext} h_1 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ также ρ-выпукло дополняемой до $H_2 := \operatorname{ext} h_2 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$. Из (iii) сразу следует, что функция h_1 будет ρ*-выпукло дополняемой* до h_2, если и только если $(h_2-h_1)''+\rho^2(h_2-h_1) \geq 0$ в смысле теории распределений, или обобщенных функций, то есть в левой части последнего неравенства выписана положительная 2π-периодическая мера на $\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть* $\rho > 0$ *и* $h_1 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$ — *функция,* ρ*-выпукло дополняемая до* $h_2 \in \rho\text{-trc}(\mathbb{R})$*, то есть* $H_1 \overset{\text{(i)}}{:=} \operatorname{ext} h_1 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$ — *функция,* ρ*-выпукло дополняемая до функции* $H_2 \overset{\text{(i)}}{:=} \operatorname{ext} h_2 \in \rho\text{-shg}(\mathbb{C})$*, а мера* ν *определена через произведение* *плотностей мер в полярных координатах по правилу* (см. и ср. с (10))

$$d\nu(re^{i\theta}) = r^{\rho-1}\,dr \otimes \frac{1}{2\pi}\big((h_2-h_1)'' + \rho^2(h_2-h_1)\big)(\theta)\,d\theta, \quad re^{i\theta}\in\mathbb{C},\ r\geq 0,\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Последовательность точек $\Lambda\subset\mathbb{C}$ *— последовательность неединственности для* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C};\exp H_1]$*, если и только если* $n_\Lambda+\nu$ *— подмера для класса* $\mathrm{sbh}(\mathbb{C};H_2]$.

Доказательство, основанное на теореме 1 с $M := H_2$ и $N := H_1$ и свойствах (8)–(9), опускаем. Оно почти дословно повторяет доказательство [7, теорема 2], где различаются случаи $\rho\leq 1$ и $\rho>1$. Так, в части достаточности в [7, теорема 2] возникала существенная добавка-мультипликатор в виде $\mathrm{Hol}(\mathbb{C};p\exp H_1]$ с некоторым быстро растущим многочленом p. Такой результат со степенной добавкой значительно ослабляет теорему 2. Ликвидация такого многочлена p в данной здесь теореме 2 достигается за счет очень мало отличающейся от N функции-поднятия $N^{\uparrow}$ из (3) этой функции N.

Замечание 8. Возможны обобщения результатов статьи для функций нескольких комплексных переменных, что предполагается проделать в ином месте.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Поддержано грантом РФФИ № 16-01-00024.

[2] Используют также термины *тригонометрически ρ-выпуклая,* или *тригонометрически выпуклая при показателе (порядке)* ρ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абанин, А. В. Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы : дисс. докт. физ.-мат. наук / А. В. Абанин. — Ростов-на-Дону, 1995. — С. 268.

2. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. — М. : Физматлит, 1979. — 198 с.

3. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : Физматгиз, 1956. — 536 с.

4. Маергойз, Л. С. Асимптотические характеристики целых функций и их приложения / Л. С. Маергойз. — Новосибирск : Наука, 1996. — 398 с.

5. Хабибуллин, Б. Н. Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции / Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров // Мат. заметки. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 588–602.

6. Хабибуллин, Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б. Н. Хабибуллин. — Уфа : РИЦ БашГУ, 2012. — 198 с.

7. Хабибуллин, Б. Н. Последовательности неединственности для весовых пространств голоморфных функций / Б. Н. Хабибуллин // Изв. вузов. Математика. — 2015. — Т. 59, № 4. — С. 63–70.

8. Levin, B. Ya. Lectures on entire functions / B. Ya. Levin. — Providence RI : Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monographs, 1996. — Vol. 150. — 180 p.

9. Ransford, Th. Potential Theory in the Complex Plane / Th. Ransford. — Cambridge : Cambridge University Press, 1995. — 232 c.

REFERENCES

1. Abanin A.V. Slabo dostatochnye mnozhestva i absolyutno predstavlyayushchie sistemy : diss. dokt. fiz.-mat. nauk [Weakly Sufficient Sets and Absolutely Representing Systems. Dr. Phys. and Math. Sci. Diss.]. Rostov-on-Don, 1995. pp. 268.

2. Evgrafov M.A. *Asimptoticheskie otsenki i tselye funktsii* [Asymptotic Estimates and Entire Functions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1979. 198 p.

3. Levin B.Ya. *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1956. 536 p.

4. Maergoyz L.S. *Asimptoticheskie kharakteristiki tselykh funktsiy i ikh prilozheniya* [Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Application]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1996. 398 p.

5. Khabibullin B.N., Bayguskarov T.Yu. Logarifm modulya golomorfnoy funktsii kak minoranta dlya subgarmonicheskoy funktsii [The Logarithm of the Modulus of a Holomorphic Function as a Minorant for a Subharmonic Function]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2016, vol. 99, no. 4, pp. 588-602.

6. Khabibullin B.N. *Polnota sistem eksponent i mnozhestva edinstvennosti* [Completeness of Exponential System and Uniqueness Sets]. Ufa, RITs BashGU Publ., 2012. 198 p.

7. Khabibullin B.N. Posledovatelnosti needinstvennosti dlya vesovykh prostranstv golomorfnykh funktsiy [Sequences of Non-Uniqueness for Weight Spaces of Holomorphic Functions]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2015, vol. 59, no. 4, pp. 63-70.

8. Levin B.Ya. *Lectures on entire functions*, vol. 150. Providence RI, Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monographs, 1996. 180 p.

9. Ransford Th. *Potential Theory in the Complex Plane* [Generalized Analytic Functions]. Cambridge, Cambridge University Press Publ., 1995. 232 p.

ON NON-UNIQUENESS SETS FOR SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Bulat Nurmievich Khabibullin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Higher Algebra and Geometry,
Bashkir State University
khabib-bulat@mail.ru
Z. Validi St., 32, 450076 Ufa, Russian Federation

Farkhat Bulatovich Khabibullin

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Algebra and Geometry,
Bashkir State University
khabibullinfb@list.ru
Z. Validi St., 32, 450076 Ufa, Russian Federation

Abstract. Problems of description of zero subsequences for weight spaces of holomorphic functions are reduced, according to a general scheme, to solving certain problems in weight classes of subharmonic functions.

Let D be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$. We associate with every at most countable sequence $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$, without accumulation points in D, the counting measure $n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1$. We denote by $\mathrm{Hol}(D)$ the vector space of all holomorphic functions in D. For $0 \neq f \in \mathrm{Hol}(D)$, denote by Zero_f zero sequence of f with account of multiplicities. A sequence $\Lambda \subset D$ is called the non-uniqueness sequence for a subspace $H \subset \mathrm{Hol}(D)$, if there exists a

nonzero function $f \in H$ such that $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_f$, i.e. $n_\Lambda(\lambda) \leq n_{\mathrm{Zero}_f}(\lambda)$ for all $\lambda \in D$. We denote by $\mathrm{sbh}(D)$ the convex cone of all subharmonic functions in $D \subset \mathbb{C}$. For $-\infty \not\equiv s \in \mathrm{sbh}(D)$ we denote by ν_s the Riesz measure of s. A Borel positive measure ν is called the submeasure for a subset $S \subset \mathrm{sbh}(D)$, if there exists a function $s \in S$, $s \not\equiv -\infty$, with the Riesz measure $\nu_s \geq \nu$ on D. For a (weight) function $M \colon D \to [-\infty, +\infty]$ we define the weight classes $\mathrm{sbh}(D; M] := \{s \in \mathrm{sbh}(D) \colon s \leq M + \mathrm{const}$ *на* $D\}$ and $\mathrm{Hol}(D; \exp M] := \{f \in \in \mathrm{Hol}(D) \colon |f| \leq \mathrm{const} \cdot \exp M$ *на* $D\}$, where const is a constant. Let S be a subset of the extended complex plane $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Denote by $\operatorname{clos} S$ and $\operatorname{bd} S$ the closure and the boundary of S in $\mathbb{C}_\infty$ resp. Let $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ be the Euclidean distance between two objects (points or subsets) in $\mathbb{C}$. Let $d \colon D \to (0,1]$ be a continuous function such that $0 < d(z) < \mathrm{dist}(z, \operatorname{bd} D)$, $z \in D$. We will juxtapose to a weight function $N \colon D \to [-\infty, +\infty]$ its average value of N over the disk $\{z' \in \mathbb{C} \colon |z' - z| < r\}$:

$$B(z, r; N) := \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r N(z + te^{i\theta}) t \, dt \, d\theta,$$

and some its “lifting” $N^\uparrow \colon D \to [-\infty, +\infty]$ so that

$$N^\uparrow(z) := B(z, d(z); N) + \ln \frac{1}{d(z)}, \quad \text{if} \quad \mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{clos} D \neq \varnothing;$$
$$N^\uparrow(z) := B\Big(z, \frac{1}{(1+|z|)^P}; N\Big), \quad \text{if} \quad D = \mathbb{C},$$

where $P \geq 0$ is an arbitrary fixed number.

Theorem 1. *Let $N, M, M - N \in \mathrm{sbh}(D)$, $N, M \neq -\infty$, and Λ be a sequence in D. If Λ is the non-uniqueness sequence for* $\mathrm{Hol}(D; \exp N]$, *then $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ is submeasure for* $\mathrm{sbh}(D; M]$. *Conversely, if $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ is a submeasure for* $\mathrm{sbh}(D; M]$ *and N is a continuous function on D, then Λ is a non-uniqueness sequence for* $\mathrm{Hol}(D; \exp N^\uparrow]$ *with a suitable lifting* $N^\uparrow$ (see above cases $D = \mathbb{C}$ with an arbitrary fixed $P \geq 0$ and $\mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{clos} D \neq \varnothing$).

We also consider an important special case of subharmonic positively homogeneous of degree $\rho > 0$ weight functions N, M on $\mathbb{C}$ (see Section 2, Theorem 2).

Key words: holomorphic function, zero sequence, subharmonic function, Riesz measure, non-uniqueness sequence.