G. V. Davydov, A synthesis of the resolution method and the inverse method, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 24–35

Г.В.Давыдов

СИНТЕЗ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ С ОБРАТНЫМ МЕТОДОМ [ж)]

I. Для поиска вывода в исчислении предикатов были предложены метод резолюций (см. напр. [I]) и обратный метод (см. напр. [2]). Мы предполагаем, что читатель знаком хотя бы в самых общих чертах с обоими методами. Напомним, что в методе резолюций на каждом шаге поиска вывода преобразуется некоторое множество дизъюнктов [хх)], в обратном методе – множество благоприятных наборов.

Заметим, что из множества членов различных дизъюнктов, входящих в полную систему дизъюнктов выводимой формулы [ххх)], полученную к данному шагу поиска вывода этой формулы, можно образовать некоторую полную систему благоприятных наборов (это утверждение остается верным после замены дизъюнктов на благоприятные наборы, а благоприятных наборов на дизъюнкты). Это обстоятельство в ряде случаев целесообразно учитывать при поиске вывода.

В связи с этим предлагается при поиске вывода преобразовывать не множество дизъюнктов или множество благоприятных наборов, а некоторый объект более сложной структуры, составленный из членов дизъюнктов и благоприятных наборов, и в котором учтено, что

[ж)] Основные результаты этой заметки докладывались на ленинградском семинаре по математической логике 5 марта 1970 г.

[хх)] Словом "дизъюнкт" в [I] переведено английское слово "clause".

[ххх)] Совокупность $\mathcal{M}$ дизъюнктов (благоприятных наборов) формулы F считается полной системой, если $\mathcal{M}$ эквивалентна формуле F, в том же смысле, в котором совокупность всех исходных дизъюнктов (замкнутых наборов) формулы F эквивалентна F.

каждый элемент является одновременно как членом каких-то благоприятных наборов так и членом каких-то дизъюнктов.

Целью этой заметки является некоторое развитие этого подхода и иллюстрация его на примере исчисления высказываний.

2. Опишем предварительно некоторую (более общую чем в [I]) схему метода резолюций для исчисления высказываний.

Пусть F формула исчисления высказываний, и пусть $\mathcal{M}$ - множество списков формул исчисления высказываний; $\mathcal{M}=\{(\mathcal{A}_1^i,\ldots,\mathcal{A}_{k_i}^i)\}_{i=1}^n$. Будем говорить, что $\mathcal{M}$ образует систему дизъюнктов формулы F, если F эквивалентна формуле $\bigvee_{i=1}^{n}\mathop{\&}_{j=1}^{k_i}\mathcal{A}_j^i$. При этом замкнутым набором для системы дизъюнктов $\mathcal{M}$ будем называть любой такой список формул $(\mathcal{A}_{j_1}^{i_1},\ldots,\mathcal{A}_{j_\ell}^{i_\ell})(1\leqslant i_1,\ldots,i_\ell\leqslant n;\ 1\leqslant j_1\leqslant k_{i_1},\ldots,1\leqslant j_\ell\leqslant k_\ell)$, что формула $\bigvee_{m=1}^{\ell}\mathcal{A}_{j_m}^{i_m}$ тавтологична, но никакая дизъюнкция $\ell-1$ формул из этого списка не тавтологична. Например, для F системой дизъюнктов является множество $\{(F)\}$, и если F тавтологична, то у этой системы дизъюнктов имеется единственный замкнутый набор - набор (F).

Правило резолюций для системы дизъюнктов $\mathcal{M}$ формулы F таково: если $(\mathcal{A}_{j_1}^{i_1},\ldots,\mathcal{A}_{j_\ell}^{i_\ell})$ - замкнутый набор системы дизъюнктов $\mathcal{M}$, и список C получается объединением списков $(\mathcal{A}_1^{i_1},\ldots,\mathcal{A}_{k_1}^{i_1}),\ldots,(\mathcal{A}_1^{i_\ell},\ldots,\mathcal{A}_{k_\ell}^{i_\ell})$, из которых предварительно выброшены члены $\mathcal{A}_{j_1}^{i_1},\ldots,\mathcal{A}_{j_\ell}^{i_\ell}$ соответственно, то $\mathcal{M}\cup\{C\}$ также является системой дизъюнктов формулы F.

3. Введем в рассмотрение объекты, которые мы будем называть *диаграммами*.

Каждая диаграмма состоит из :

I) некоторого конечного множества объектов, называемых *вершинами* диаграммы,

2) двух конечных множеств, элементами которых являются не-

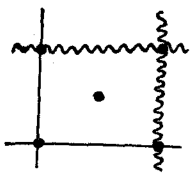
пустые подмножества множества вершин диаграммы; одно из этих двух множеств называется множеством α-*линий* диаграммы, другое – множеством β-*линий* диаграммы.

На плоскости диаграмму будем изображать следующим образом:

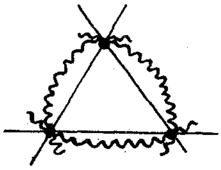
I) каждой вершине соответствует жирная точка (для разных вершин разные точки).

2) α-линии соответствует линия вида , проведенная через точки, соответствующие элементам этой α-линии; аналогично β-линии соответствует линия вида .

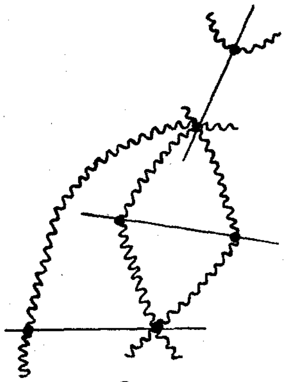
Примеры диаграмм.



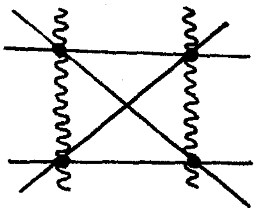
1.



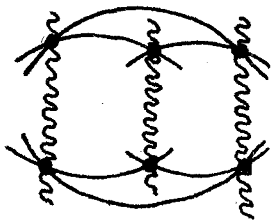
2.



3.



4.



5.

Множество вершин диаграммы, взятых по одной из каждой α-линии (соответственно β-линии), назовем α-*множеством* (соответственно β-*множеством*).

Назовем α - множество (соответственно β-множество) *закрытым*, если оно содержит все вершины диаграммы, лежащие на какой-нибудь β-линии (соответственно α-линии).

Лемма I. Все α-множества закрыты тогда и только тогда, когда закрыты все β-множества.

Доказательство. Пусть в диаграмме Γ существует незакрытое

α -множество $\mathfrak{N}$. На каждой β -линии находится в этом случае вершина диаграммы, не принадлежащая $\mathfrak{N}$; объединим все такие вершины в множество $\mathfrak{N}_1$. $\mathfrak{N}_1$ является β -множеством и непересекается с $\mathfrak{N}$, а так как в $\mathfrak{N}$ входят вершины из каждой α -линии, то $\mathfrak{N}_1$ - незакрнтое множество. Лемма доказана.

Назовем диаграмму **закрытой**, если в ней имеются лишь закрытые α- и β-множества. Диаграммы 2.,3.,4. и 5. закрыты.

4. Свяжем теперь с каждой диаграммой некоторое множество формул исчисления высказываний.

Пусть $\mathfrak{D}$ диаграмма, и пусть мы некоторым способом приписали каждой вершине $\mathfrak{D}$ какую-нибудь формулу. Обозначим этот способ приписывания посредством φ . Определим для φ два множества списков формул - $\mathfrak{M}_\varphi^\alpha$ и $\mathfrak{M}_\varphi^\beta$. В $\mathfrak{M}_\varphi^\alpha$ (соответственно в $\mathfrak{M}_\varphi^\beta$)входит каждый список, состоящий из всех формул, приписанных вершинам, лежащим на какой-нибудь α -линии (соответственно β -линии).

Будем говорить, что диаграмма $\mathfrak{D}$ является **диаграммой формулы** F , если существует такой способ приписнвания φ, что одно из множеств $\mathfrak{M}_\varphi^\alpha$ и $\mathfrak{M}_\varphi^\beta$ является системой дизъюнктов формулы F , а другое множество является множеством всех замкнутых наборов этой системы дизъюнктов.

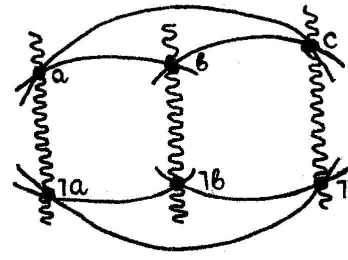
Пример.

Диаграмма 5. является диаграммой формул

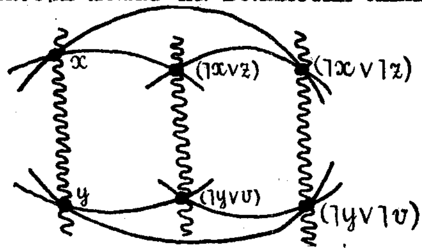
$$\frac{\neg a}{\neg b}\bigg|\frac{\neg a}{\neg c}\bigg|\frac{\neg b}{\neg c}\bigg|\frac{a}{b}\bigg|\frac{a}{c}\bigg|\frac{b}{c} \qquad \text{и} \qquad \frac{x}{y}\bigg|\frac{\neg x|z}{\neg y|v}\bigg|\frac{\neg x|\neg z}{\neg y|\neg v}$$

(здесь мы применили клеточную запись формул, введенную в [3]; знаки конъюнкции обозначаются горизонтальными чертами, а знаки дизъюнкции - вертикальными).

Для первой формулы мы сопоставили вершинам диаграммы формулы таким образом:



при этом замкнутые наборы лежат на волнистых линиях; для второй – таким образом:

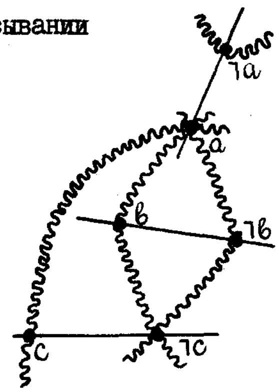


при этом замкнутые наборы лежат на неволнистых линиях.

Диаграмма 3 является диаграммой формулы

$$\neg a \;\Big|\; \frac{a}{\neg c} \;\Big|\; \dfrac{a}{\dfrac{b}{c}} \;\Big|\; \dfrac{a}{\dfrac{\neg b}{c}}$$

при следующем приписывании



и формулы

$$\frac{b \,|\, \frac{v}{d} \,|\, w}{a \,|\, \neg a} \;\Bigg|\; \dfrac{\neg v}{\dfrac{\neg w}{c}} \;\Bigg|\; \frac{\neg b}{\neg c \,|\, \neg d}$$

при следующем приписывании:

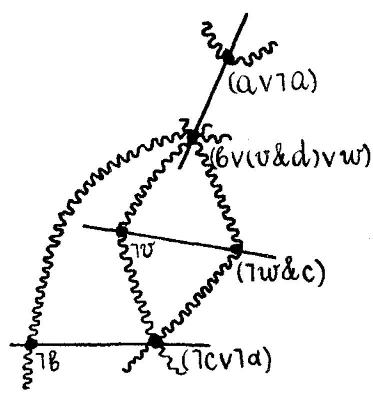


Диаграмма 4 является диаграммой для формул

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{a}{\neg b} \Big| \frac{\neg a}{b} \Big| \frac{\neg a}{\neg b} \quad \text{и} \quad \frac{x \mid z}{y \mid v} \Big| \frac{\neg x \mid \neg y}{\neg z \mid \neg v}.$$

Следующая теорема проясняет смысл понятия закрытая диаграмма.

Теорема I. Любая закрытая диаграмма является диаграммой только выводимых формул. Если формула выводима, то любая ее диаграмма закрыта.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$ – какая-нибудь закрытая диаграмма и пусть F – формула, диаграммой которой является $\mathfrak{D}$. Это означает, что можно так сопоставить формулы вершинам $\mathfrak{D}$, что

$F \equiv \bigvee\limits_{i=1}^{n} \mathop{\&}\limits_{j=1}^{k_i} \mathcal{A}_j^i$, где n число α-линий (либо β-линий) в $\mathfrak{D}$, причем вершинам i-той $(1 \leq i \leq n)$ из этих линий сопоставлены формулы $\mathcal{A}_1^i, \ldots, \mathcal{A}_{k_i}^i$. Так как $\mathfrak{D}$ закрыта, то каждый набор формул по одной из каждой конъюнкции должен содержать список формул, сопоставленных всем вершинам, лежащим на β-линии (либо соответственно α-линии), т.е. должна содержать замкнутый набор, а значит F тождественно истинна.

Пусть F выводима, тогда для любой формулы вида $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \mathop{\&}\limits_{j=1}^{k_i} \mathcal{A}_j^i$, эквивалентной F, каждый список $\mathcal{A}_{j_1}^1, \ldots, \mathcal{A}_{j_n}^n$ $(1 \leq j_i \leq k_i$; $i = 1, \ldots, n)$ должен содержать замкнутый набор, т.е. любая диаграмма формулы F будет закрыта. Теорема доказана.

5. По теореме I любой метод, проверяющий закрыта диаграмма $\mathfrak{D}$ или нет, будет также методом проверки выводимости формул, диаграммой которых $\mathfrak{D}$ является. В связи с этим сформулируем некоторые методы, позволяющие распознавать закрытость диаграмм. При этом мы будем стремиться не к описанию принципиально нового метода, а лишь к иллюстрации метода резолюций и обратного метода, выявлению изоморфизма этих методов и построению некоторого метода, являющегося их синтезом.

Пусть $\mathfrak{D}$ диаграмма и $\mathfrak{T}$ – некоторая линия в ней (либо α – линия, либо β -линия). Будем говорить, что мы **у к о р о т и л и** линию $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{D}$, если мы выбросили $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{D}$ и через (непустую собственную) часть вершин, лежавших на $\mathfrak{N}$, провели новую линию того же типа. Про ту часть вершин, лежавших на $\mathfrak{N}$, через которую не проходит новая линия, будем говорить, что с них снята линия $\mathfrak{N}$,

Будем говорить, что диаграмма $\mathfrak{D}'$ является **о с л а б л е н и е м** диаграммы $\mathfrak{D}$, если в $\mathfrak{D}$ можно укоротить некоторое количество линий таким образом, что получится $\mathfrak{D}'$.

<u>Лемма 2</u>. Любое ослабление закрытой диаграммы закрыто.

Действительно, если мы в диаграмме укоротим α-линию, то каждое α -множество полученной диаграммы является α -множеством исходной диаграммы. Следовательно, закрытая диаграмма перейдет в закрытую.

Будем говорить, что диаграмма $\mathfrak{D}$ является **у т о н ч е н и е м** диаграммы $\mathfrak{D}'$, если из $\mathfrak{D}'$ можно выбросить некоторое количество линий таким образом, что получится $\mathfrak{D}$.

<u>Лемма 3</u>. Если у диаграммы есть закрытое утончение, то она сама закрыта.

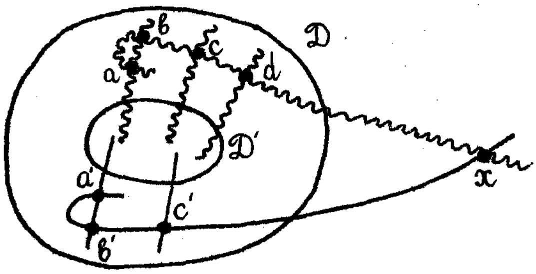
Действительно, каждое α -множество (соответственно β -множество) какой-либо диаграммы содержит в себе какое-нибудь α -множество (соответственно β -множество) любого своего утончения, это следует из того, что все α -линии (соответственно β-линии) утончения являются α-линиями (соответственно β -линиями) самой диаграммы. Таким образом, если какое-нибудь утончение диаграммы закрыто, то и диаграмма закрыта.

Опишем теперь правило ReБ - правило, позволяющее проводить в диаграмме новые линии и вводить новые вершины таким образом, что незакрытые диаграммы переходят в незакрытые, а закрытые - в закрытые. Правило названо ReБ потому, что оно объединяет идею правила резолюции с идеей правила Б.

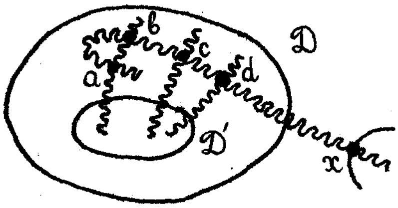
<u>Правило ReБ .</u> Пусть $\mathfrak{D}$ диаграмма и $\mathfrak{D}'$ некоторое ее закрытое ослабление, тогда диаграмма $\mathrm{ReБ}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ получается следующим образом: к диаграмме $\mathfrak{D}$ присоединяется вершина, не лежащая ни на одной из линий из $\mathfrak{D}$, затем через новую вершину и все

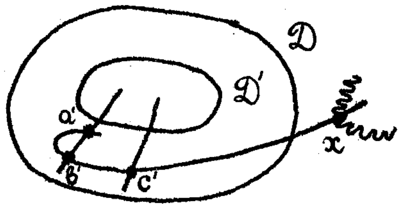
вершины диаграммы $\mathfrak{D}$, с которых при переходе к $\mathfrak{D}'$ снимаются α-линии, проводится α-линия, и через новую вершину и все вершины $\mathfrak{D}$, с которых при переходе к $\mathfrak{D}'$ снимаются β-линии, проводится β-линия. В частности, если при переходе от $\mathfrak{D}$ к $\mathfrak{D}'$ не снимались α-линии (или же β-линии), то α-линия (соответственно β-линия) проводится лишь через новую вершину.

Графически правило ReB можно изобразить так



здесь точка x - новая вершина, вершины a, b, c, d (соответственно a', b', c') - все вершины $\mathfrak{D}$, с которых при переходе к $\mathfrak{D}'$ снимаются β-линии (соответственно α-линии). Частные случаи правила ReB выглядят так:





<u>Теорема 2.</u> Если диаграмма $\mathfrak{D}'$ является закрытым ослаблением $\mathfrak{D}$, то $\mathrm{ReB}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ закрыта тогда и только тогда, когда закрыта $\mathfrak{D}$.

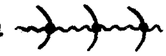
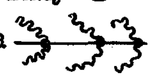
<u>Доказательство.</u> Пусть M_α и M_β обозначают множества вершин диаграммы $\mathfrak{D}$, с которых при переходе к $\mathfrak{D}'$ снимаются соответственно α-линии и β-линии. Пусть x обозначает вершину, добавленную в $\mathrm{ReB}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$. Пусть γ и δ переменные, областью изменения которых является множество $\{\alpha, \beta\}$. Совокупность γ-множеств диаграмм $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ и $\mathrm{ReB}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ обозначим посредством $\Omega^\gamma_{\mathfrak{D}}$, $\Omega^\gamma_{\mathfrak{D}'}$ и $\Omega^\gamma_{\mathrm{ReB}}$ соответственно.

$\Omega^{\gamma}_{ReB} = \Omega^{\gamma}_{1} \cup \Omega^{\gamma}_{2}$, где Ω^{γ}_{1} состоит из всех тех и только тех элементов Ω^{γ}_{ReB}, которые содержат вершину x.

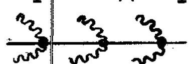
$\Omega^{\gamma}_{2} \subset \Omega^{\gamma}_{\mathcal{D}}$, и, если $\mathcal{M} \in \Omega^{\gamma}_{1}$, то в $\Omega^{\gamma}_{\mathcal{D}}$ найдется $\mathcal{M}'$ такой, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup \{x\}$, значит, если $\mathcal{D}$ закрыта, то закрыта и $ReB(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

Пусть $\mathcal{D}$ незакрыта, т.е. в $\Omega^{\gamma}_{\mathcal{D}}$ есть незакрытый элемент L. Если $L \in \Omega^{\gamma}_{2}$, то и $ReB(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ незакрыта. Пусть теперь $L \in \Omega^{\gamma}_{\mathcal{D}} \setminus \Omega^{\gamma}_{2}$. Рассмотрим множество $L \cup \{x\}$, принадлежащее Ω^{γ}_{ReB}. Если $L \cup \{x\}$ незакрытое γ -множество, то $ReB(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ незакрыта. Пусть $L \cup \{x\}$ закрыто, тогда для $\delta \neq \gamma$ $\mathcal{M}_{\delta} \subset L$. Покажем, что в этом случае в L обязательно входит элемент из $\mathcal{M}_{\gamma}$, и следовательно $L \in \Omega^{\gamma}_{ReB}$, т.е. $ReB(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ незакрыто. Действительно, если ни один из элементов множества $\mathcal{M}_{\gamma}$ не принадлежит L, то существует такое $L' \in \Omega^{\gamma}_{\mathcal{D}'}$, что $L' \subset L$. Таким образом $\mathcal{M}_{\delta} \cup L' \subset L$, в то же время $\mathcal{M}_{\delta} \cup L'$ содержит все вершины диаграммы $\mathcal{D}$, лежащие на δ - линии, следовательно множество L закрыто. А так как по предположению L незакрыто, то хотя бы одна точка из $\mathcal{M}_{\gamma}$ входит в L, что и требовалось показать. Теорема доказана.

Будем говорить, что диаграмма $\mathcal{D}$ является ч а с т ь ю диаграммы $\mathcal{D}'$, если $\mathcal{D}$ получается утончением из какого-нибудь ослабления диаграммы $\mathcal{D}'$.

Опишем теперь метод распознавания закрытости диаграмм, основанный на правиле ReB. Допустим, что мы имеем некоторое множество $\mathcal{M}$ закрытых диаграмм. В этом случае распознавать закрытость произвольной диаграммы $\mathcal{D}$ можно следующим образом. Найти в $\mathcal{D}$ часть, являющуюся элементом $\mathcal{M}$. Используя эту часть, по правилу ReB расширить диаграмму $\mathcal{D}$ до $\mathcal{D}_1$. Аналогичным образом расширить $\mathcal{D}_1$ до $\mathcal{D}_2$ и т.д., до тех пор пока не получится диаграмма $\mathcal{D}_n$ такая, что некоторое ее утончение является элементом $\mathcal{M}$. Оказывается, что при некотором выборе $\mathcal{M}$ для любой закрытой диаграммы $\mathcal{D}$ такое $\mathcal{D}_n$ в конце концов построится. Например, это верно, если в $\mathcal{M}$ входит каждая такая диаграмма, что в ней α-линия только одна и проходит через все вершины, а β-линии содержат лишь по одной вершине, и каждая вершина лежит на β-линии (это же верно с заменой α на β и β на α). Т.е. в $\mathcal{M}$ входят диаграммы вида  (или же вида ). Этот факт вытекает из полноты метода резолюций и обратного метода. Действительно, если к диаграмме $\mathfrak{D}$ применять этот частный случай правила ReB и одновременно укорачивать линии, снимая их с тех вершин, через которые проходят линии другого типа, содержащие всего одну вершину, то для формул с диаграммой $\mathfrak{D}$ каждое применение правила ReB (в этом случае в диаграмму можно не вводить новых вершин) будет совпадать с применением правила резолюции или правила Б. Здесь мы имеем в виду ту формулировку правила резолюции, которая приведена в п.2. Правило же Б формулируется так: если $(B_1^1, \ldots, B_{k_1}^1), \ldots, (B_1^s, \ldots, B_{k_s}^s)$ благоприятные наборы формулы F, и список $B_{j_1}^1, \ldots, B_{j_s}^s$ входит в систему дизъюнктов формулы F $(1 \leq j_1 \leq k_1, \ldots, 1 \leq j_s \leq k_s)$, то список всех формул из множества $\{\{B_1^1, \ldots, B_{k_1}^1, \ldots, B_1^s, \ldots, B_{k_s}^s\} \setminus \{B_{j_1}^1, \ldots, B_{j_s}^s\}\}$ также является благоприятным набором. Причем соотношение между правилом Б и правилом резолюции с одной стороны и описанными выше частными случаями правила ReB следующее. Пусть диаграмма $\mathfrak{D}$ является диаграммой формулы F. Возможны два случая: I) исходные дизъюнкты формулы F лежат на α-линиях, 2) исходные дизъюнкты лежат на β-линиях. В первом случае правилу резолюций будет соответствовать правило ReB с исходными закрытыми диаграммами вида , а правилу Б правило ReB с исходными закрытыми диаграммами вида ; во втором случае наоборот.

Нетрудно описать операцию, которая по любой формуле F исчисления высказываний строит формулу F' такую, что, если $\mathfrak{D}$ - диаграмма формулы F, то диаграммой формулы F' является диаграмма, получающаяся из $\mathfrak{D}$ после перемены типа каждой линии. При этом исходные дизъюнкты формулы F переходят в замкнутые наборы формулы F, а замкнутые наборы F в исходные дизъюнкты формулы F'. Любой вывод из исходных дизъюнктов (замкнутых наборов) формулы F по правилу резолюции (правилу Б) переходит в вывод из замкнутых наборов (исходных дизъюнктов) формулы F' по правилу Б (правилу резолюции), причем применение правила резолюции (правила Б) переходит в применение правила Б (правила резолюции). То же верно с заменой F на F' и F' на F, т.е. имеется изоморфизм между обратным методом и методом резолюций.

Таким образом, если мы включаем в $\mathcal{M}$ (исходное множество закрытых диаграмм) диаграммы лишь одного из видов  или , то получаем метод поиска вывода, который будет совпадать с методом резолюций или с обратным методом. Если же в включить диаграммы обоих этих типов, то получается метод поиска вывода, который соответствует такому обобщению метода резолюций, при котором из дизъюнктов при применении правила резолюции разрешается выбрасывать любой благоприятный набор (а не только замкнутый), и соответствует такому обобщению обратного метода, при котором из благоприятных наборов при применении правила Б разрешается выбрасывать любой дизъюнкт (а не только исходный дизъюнкт). Если же в $\mathcal{M}$ включать закрытые диаграммы других типов, то будут получаться методы поиска вывода непохожие на обратный метод и метод резолюции, в которых ранее доказанные формулы используются при поиске вывода в виде правил вывода.

В заключение выражаю признательность Н.К.Замову и В.В.Шаронову за полезные обсуждения результатов заметки, а также С.Ю. Маслову и Ю.В.Матиясевичу за внимательное чтение заметки и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Робинсон Дж. А., Машинно-ориентированная логика, основанная на принципе резолюции. "Кибернетический сборник", новая серия, 1970, 7, 194- 218.

2. Маслов С.Ю. Обратный метод установления выводимости для логических исчислений. "Труды Матем.ин-та АН СССР", 1968,

98,26-87.

3. Давыдов Г.В. О корректировании недоказуемых формул. "Зап.научн. семинаров Ленингр.отд.Матем.ин-та АН СССР", 1967, 4, 18-29.