Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

**Ю. К. Демьянович**

# ЛОКАЛЬНЫЙ БАЗИС ВСПЛЕСКОВ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

## 1. Введение

Известны ортогональные (в пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$) и биортогональные всплески (вейвлеты) (в том числе, сплайн-вейвлеты) с компактным носителем на равномерной сетке (см., например, работы [1–3]); их построение существенно опирается на кратномасштабый анализ и требует решения кратно-масшабного уравнения, причем основным аппаратом служит преобразование Фурье. В работе [4] введено калибровочное соотношение (частным его случаем является упомянутое кратно-масштабное уравнение) и использованы аппроксимационные соотношения для построения пространств всплесков, что заранее гарантирует нужные свойства приближения. Благодаря разработанному в [4] аппарату псевдосвертки, все множество пространств минимальных сплайнов на измельчающихся сетках удается разбить на бесконечные цепочки вложенных пространств и каждую из упомянутых цепочек представить в виде прямой суммы всплесковых пространств, а также построить соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции. При аппроксимации функций с особенностями весьма важно использовать неравномерную сетку, поскольку это дает возможность улучшить приближение функций без усложнения вычислений. Однако, в этом случае возникают трудности при построении всплескового разложения и соответствующих формул декомпозиции и реконструкции, ибо ни преобразование Фурье, ни аппарат псевдосвертки в этих условиях, по-видимому, не дают нужного результата.

В предлагаемой работе эти трудности преодолеваются благодаря использованию введенных в статье [5] непрерывно дифференцируемых (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов ($B_\varphi$-сплайнов), которые определяются трехкомпоненной векторфункцией $\varphi(t)$. В данной работе устанавливается вложенность

Работа частично поддержана грантами РФФИ 04-01-00692 и 04-01-00026.

пространств упомянутых сплайнов при произвольном измельчении неравномерной сетки, рассматривается прямое (всплесковое) разложение цепочек вложенных пространств $B_\varphi$-сплайнов на последовательности измельчающихся неравномерных сеток, строится всплесковый базис из функций с компактным носителем, даются соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции, а также предлагаются простые решения некоторых интерполяционных задач в пространствах $B_\varphi$-сплайнов. Для построения всплесковых разложений цепочек вложенных пространств можно использовать предлагаемые здесь пространства степенных и экспоненциально-тригонометрических сплайнов, частными случаями которых являются известные полиномиальные $B$-сплайны второй степени и тригонометрические сплайны (всплесковые разложения для последних получены автором ранее, см. [6]).

## 2. Первоначальные обозначения

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел, $\mathbb{R}^1$ – множество всех вещественных чисел, а $\mathbb{R}^3$ – линейное пространство всех трехмерных векторов с вещественными компонетами; в дальнейшем все векторы представляются в виде вектор-столбцов. Точкой $\cdot$ обозначается скалярное произведение векторов (например, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$), знак $\times$ между векторами означает их векторное произведение (например, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ – векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$). Квадратную матрицу третьего порядка со столбцами $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ будем обозначать $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$, а ее определитель – символом $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$. На вещественной оси $\mathbb{R}^1$ введем сетку

$$\mathbb{X}: \quad \ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \tag{2.1}$$

и положим

$$\lim_{j\to-\infty} x_j = a, \lim_{j\to+\infty} x_j = b. \tag{2.2}$$

Пусть $M \stackrel{\rm def}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j, x_{j+1})$, $S_j \stackrel{\rm def}{=} [x_{j-1}, x_{j+2}]$, $J_k \stackrel{\rm def}{=} \{k-1, k, k+1\}$, $k, j \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим трехкомпонентную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\varphi(t)$, $t\in(a,b)$; пусть $\mathbf{N}(t) \stackrel{\rm def}{=} \varphi(t)\times\varphi'(t)$,

$$\varphi_j \stackrel{\rm def}{=} \varphi(x_j),\ \varphi'_j \stackrel{\rm def}{=} \varphi'(x_j),\ \mathbf{N}_j \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_j(x_j),\ \mathbf{b}_j \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_j\times\mathbf{N}_{j+1}. \tag{2.3}$$

Предположим, что $\{\mathbf{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – полная цепочка векторов, т.е.

$$\det(\mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}) \neq 0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим функции $\Omega_j(t)$, заданные на $M$, равные нулю на множестве $M\backslash S_j$ и удовлетворяющие аппроксимационным соотношениям $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{b}_j \Omega_j(t) \equiv \varphi(t)$ $\forall t \in M$. Отсюда по формулам Крамера получаем

$$\Omega_j(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in M\backslash S_j, \ \ \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

$$\Omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{b}_{j-2}, \mathbf{b}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{b}_{j-2}, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j)} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j-1}, x_j), \tag{2.6}$$

$$\Omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{b}_{j-1}, \varphi(t), \mathbf{b}_{j+1})}{\det(\mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{2.7}$$

$$\Omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2})}{\det(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}). \tag{2.8}$$

Функции $\Omega_j(t)$ называем *координатными* $B_\varphi$*-сплайнами* на сетке $\mathbb{X}$. Линейную оболочку этих функций обозначим $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X})$ и будем ее называть *пространством* $B_\varphi$*-сплайнов второго порядка на сетке* $\mathbb{X}$.

## 3. Некоторые алгебраические тождества

Дальше будет удобно использовать следующие два варианта известной формулы для двойного векторного произведения:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{y} - \det(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{x}, \tag{3.1}$$

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})\mathbf{z} - \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{w} \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

**Лемма 1.** *Для* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$ *справедливо тождество*

$$\det(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{e} \times \mathbf{f}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\det(\mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) - \det(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\det(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}). \tag{3.3}$$

**Доказательство.** Рассматривая определитель $\det(\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{c}\times\mathbf{d}, \mathbf{e}\times\mathbf{f})$ как смешанное произведение векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$, $\mathbf{e} \times \mathbf{f}$, запишем его в виде скалярного умножения векторного произведения первых двух из них на третий вектор: $\det(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{e} \times \mathbf{f}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{f})$. Используя формулу (3.1) при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{z} = \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{d}$, находим соотношение $\det(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{e} \times \mathbf{f}) = [\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - \det(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{e}\times\mathbf{f})$; отсюда с помощью представления смешанного произведения в виде определителя, приходим к эквивалентной записи (3.3). Лемма доказана. $\square$

**Лемма 2.** *Для векторов* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ *справедливо соотношение* $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \det(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$.

**Доказательство.** Положим в (3.3) $\mathbf{a}=\mathbf{A}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{B}$, $\mathbf{d}=\mathbf{e}=\mathbf{C}$, $\mathbf{f}=\mathbf{D}$. Тогда $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \det(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}) - \det(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{C})\det(\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{D}) = \det(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$. Лемма доказана. □

**Лемма 3.** *Для векторов* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *справедливо соотношение* $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{c})$.

**Доказательство.** Рассматривая определитель $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{c}\times\mathbf{c}', \mathbf{c})$ как смешанное произведение векторов $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, $\mathbf{c}$, получаем $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c}) = [(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\cdot\mathbf{c}$; и в квадратных скобках последнего выражения воспользуемся формулой (3.1) при $\mathbf{x}=\mathbf{A}$, $\mathbf{y}=\mathbf{z}=\mathbf{B}$, $\mathbf{w}=\mathbf{C}$; в результате получаем $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c}) = [\det(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\,\mathbf{B} - \det(\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{C})\,\mathbf{A}]\cdot\mathbf{c} = \det(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{c}$, что и требовалось. Лемма доказана. □

**Лемма 4.** *Для векторов* $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, *таких что* $\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}=0$, *справедливо соотношение* $\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c}, \mathbf{D}\times\mathbf{E}) = \det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{c})$.

**Доказательство.** Заметим сначала, что $\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c}, \mathbf{D}\times\mathbf{E}) = \det(\mathbf{D}\times\mathbf{E}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c})$. Рассматривая последний определитель как смешанное произведение векторов $\mathbf{D}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, $\mathbf{c}$, имеем $\det(\mathbf{D}\times\mathbf{E}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c}) = [(\mathbf{D}\times\mathbf{E})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\cdot\mathbf{c}$; воспользуемся формулой (3.2) при $\mathbf{x}=\mathbf{D}$, $\mathbf{y}=\mathbf{E}$, $\mathbf{z}=\mathbf{B}$, $\mathbf{w}=\mathbf{C}$; в результате с учетом условия $\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}=0$ получаем $\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{c}, \mathbf{D}\times\mathbf{E}) = [\det(\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{C})\,\mathbf{B} - \det(\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{B})\,\mathbf{C}]\cdot\mathbf{c} = \det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{c})$. Лемма доказана. □

**Лемма 5.** *Для векторов* $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ *справедлива формула* $\det\begin{pmatrix}\mathbf{B}\cdot\mathbf{c}' & \mathbf{B}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{D}\cdot\mathbf{c}' & \mathbf{D}\cdot\mathbf{c}\end{pmatrix} = \det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$, *где* $\mathbf{C} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{c}\times\mathbf{c}'$.

**Доказательство.** В тождестве Лагранжа, $\det\begin{pmatrix}\mathbf{x}\cdot\mathbf{z} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{w}\\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} & \mathbf{y}\cdot\mathbf{w}\end{pmatrix} = (\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot(\mathbf{z}\times\mathbf{w})$, положим $\mathbf{x}=\mathbf{B}$, $\mathbf{y}=\mathbf{D}$, $\mathbf{z}=\mathbf{c}'$, $\mathbf{w}=\mathbf{c}$ и учтем равенства $\mathbf{C}=\mathbf{c}\times\mathbf{c}'$, $(\mathbf{B}\times\mathbf{D})\cdot(\mathbf{c}'\times\mathbf{c}) = \det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$. □

**Лемма 6.** *Для произвольных векторов* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ *из* $\mathbb{R}^3$ *справедлива формула* $\det(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R})\det(\mathbf{R},\mathbf{S},\mathbf{T}) + \det(\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{S})\det(\mathbf{P},\mathbf{R},\mathbf{T}) = \det(\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{T})\det(\mathbf{P},\mathbf{R},\mathbf{S})$.

**Доказательство** элементарно; его приводить не будем. □

## 4. Достаточные условия полноты цепочки векторов

Для краткости будем считать, что интервал $(a, b)$ конечен.

**Лемма 7.** *Пусть вектор-функция $\varphi(t)$ трижды непрерывно дифференцируема. Если вронскиан $\det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t))$ отличен от нуля, то вронскиан $\det(\mathbf{N}(t), \mathbf{N}'(t), \mathbf{N}''(t))$ тоже отличен от нуля.*

**Доказательство.** Будем доказывать от противного: предположим, что $\det(\mathbf{N}(t), \mathbf{N}'(t), \mathbf{N}''(t)) = 0$. Ввиду соотношений $\mathbf{N}' = \varphi' \times \varphi' + \varphi \times \varphi'' = \varphi \times \varphi''$, $\mathbf{N}'' = \varphi' \times \varphi'' + \varphi \times \varphi'''$, наше предположение означает, что $\det(\varphi \times \varphi', \varphi \times \varphi'', \varphi' \times \varphi'' + \varphi \times \varphi''') = 0$, так что при некоторых числах $\alpha$ и $\beta$ справедливо соотношение $\varphi' \times \varphi'' + \varphi \times \varphi''' = \alpha\, \varphi \times \varphi' + \beta\, \varphi \times \varphi''$. Умножая скалярно на $\varphi$ последнее соотношение, получаем $\det(\varphi, \varphi', \varphi'') = 0$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана. □

**Лемма 8.** *Пусть $K_0$ – фиксированное число, $K_0 \geq 1$, а величины $\tau$ и $\eta$ удовлетворяют условию*

$$K_0^{-1} \leq \tau\eta^{-1} \leq K_0. \tag{4.1}$$

*Предположим, что трехкомпонентная вектор-функция $\mathbf{N}(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и для некоторого числа $\alpha > 0$ выполнено неравенство*

$$|\det(\mathbf{N}(t), \mathbf{N}'(t), \mathbf{N}''(t))| \geq \alpha \quad \forall t \in [a, b]; \tag{4.2}$$

*тогда существует положительное число $\delta = \delta(\alpha, K_0, \mathbf{N})$ такое, что из условия $\tau \in (0, \delta)$ следует соотношение*

$$|\det(\mathbf{N}(t), \mathbf{N}(t + \tau), \mathbf{N}(t + \tau + \eta))| \geq \alpha/2 \quad \forall t \in [a, b]. \tag{4.3}$$

**Доказательство** базируется на формуле Тейлора и на равномерной непрерывности вторых производных компонент вектор-функции $\mathbf{N}(t)$ на отрезке $[a, b]$. Детали доказательства опускаем. □

Сетка (2.1) называется локально квазиравномерной, если существует такое число $K_0 \geq 1$, для которого

$$K_0^{-1} \leq (x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})^{-1} \leq K_0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Класс сеток (2.1) со свойством (4.4) обозначим $\mathcal{K}(a, b, K_0)$. Положим $h_{\mathbb{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \in \mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j)$.

**Теорема 1.** *Если вектор-функция $\varphi(t)$ трижды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и*

$$\det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in [a,b], \tag{4.5}$$

*то при фиксированном $K_0 \geq 1$ существует $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(a,b,K_0,\varphi)$, такое, что для $\mathbb{X} \in \mathcal{K}(a,b,K_0)$ при $h_{\mathbb{X}} < \varepsilon$ множество $\{\mathbf{N}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ является полной цепочкой векторов.*

**Доказательство.** Из условия (4.5) теоремы согласно лемме 7 ясно, что для вектор-функции $\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \times \varphi'$ вронскиан $\det(\mathbf{N}, \mathbf{N}', \mathbf{N}'')$ отличен от нуля на отрезке $[a,b]$ и, ввиду его непрерывности, существует число $\alpha > 0$, $\alpha = \alpha(a,b,\mathbf{N})$, такое, что условие (4.2) выполнено. Возьмем $\delta = \delta(\alpha, K_0, \mathbf{N})$, упомянутое в лемме 8, и положим $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\alpha(a,b,\mathbf{N}), K_0, \mathbf{N})$. Очевидно, что число $\varepsilon$ – искомое, ибо если $h_{\mathbb{X}} < \varepsilon$ и $\mathbb{X} \in \mathcal{K}(a,b,K_0)$, то, обозначая $t = x_{j-1}$, $\tau = x_j - x_{j-1}$, $\eta = x_{j+1} - x_j$, находим, что $\tau \leq h_{\mathbb{X}} < \varepsilon$, а кроме того, выполнено условие (4.1). Таким образом, в соответствии с леммой 8 справедливо неравенство (4.3); с учетом введенных обозначений это дает $|\det(\mathbf{N}(x_{j-1}), \mathbf{N}(x_j), \mathbf{N}(x_{j+1}))| \geq \alpha/2 \ \forall j \in \mathbb{Z}$. Поскольку по определению $\mathbf{N}_j = \mathbf{N}(x_j)$, то из последнего соотношения следует полнота цепочки $\{\mathbf{N}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Теорема доказана. □

**Следствие 1.** *Если выполнены условия теоремы 1, то цепочка векторов $\mathbf{b}_j$ является полной.*

**Доказательство.** Для доказательства достаточно заметить, что, по определению, $\mathbf{b}_j = \mathbf{N}_j \times \mathbf{N}_{j+1}$, и воспользоваться леммой 2 при $\mathbf{A} = \mathbf{N}_{j-1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{N}_j$, $\mathbf{C} = \mathbf{N}_{j+1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{N}_{j+2}$. □

**Замечание 1.** Если вектор-функция $\varphi(t)$ задана на интервале $(a', b')$, содержащем отрезок $[a,b]$, и на $(a', b')$ компоненты этой вектор-функции образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения вида $y''' + a_1(t)y'' + a_2(t)y' + a_3(t)y = 0$ с непрерывными коэффициентами, то условие (4.5) выполнено.

## 5. Некоторые свойства $B_\varphi$-сплайнов

При фиксированном $j$ удобны обозначения, в которых не отмечается зависимость от $j$; поэтому положим

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j-2},\ \mathbf{a}' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'_{j-2},\ \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{j-1},\ \mathbf{b}' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'_{j-1},\ \mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_j,\ \mathbf{c}' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'_j, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{d} \stackrel{\rm def}{=} \varphi_{j+1},\ \mathbf{d}' \stackrel{\rm def}{=} \varphi'_{j+1},\ \mathbf{e} \stackrel{\rm def}{=} \varphi_{j+2},\ \mathbf{e}' \stackrel{\rm def}{=} \varphi'_{j+2}, \mathbf{f} \stackrel{\rm def}{=} \varphi_{j+3},\ \mathbf{f}' \stackrel{\rm def}{=} \varphi'_{j+3}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{A} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_{j-2}\ \mathbf{B} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_{j-1}\ \mathbf{C} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_{j},\ \mathbf{D} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_{j+1},\ \mathbf{E} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_{j+2}, \mathbf{F} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{N}_{j+3}. \tag{5.3}$$

Благодаря соотношениям (2.3) и обозначениям (5.3) находим $\mathbf{b}_{j-2} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{b}_{j-1} = \mathbf{B}\times\mathbf{C}$, $\mathbf{b}_j = \mathbf{C}\times\mathbf{D}$, $\mathbf{b}_{j+1} = \mathbf{D}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{b}_{j+2} = \mathbf{E}\times\mathbf{F}$. Теперь согласно формулам (2.6)–(2.8) получаем

$$\Omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{C}\times\mathbf{D})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j-1}, x_j), \tag{5.4}$$

$$\Omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \varphi(t), \mathbf{D}\times\mathbf{E})}{\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{C}\times\mathbf{D}, \mathbf{D}\times\mathbf{E})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{5.5}$$

$$\Omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{D}\times\mathbf{E}, \mathbf{E}\times\mathbf{F})}{\det(\mathbf{C}\times\mathbf{D}, \mathbf{D}\times\mathbf{E}, \mathbf{E}\times\mathbf{F})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}). \tag{5.6}$$

**Теорема 2.** *Справедливы формулы*

$$\Omega_j(t) = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})]^{-1} \ \textit{при}\ t \in (x_{j-1}, x_j), \tag{5.7}$$

$$\Omega_j(t) = \frac{\mathbf{B}\cdot\varphi(t)}{\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})} - \frac{\det(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E})(\mathbf{C}\cdot\varphi(t))}{\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})} \ \textit{при}\ t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{5.8}$$

*а также*

$$\Omega_j(t) = \frac{\mathbf{E}\cdot\varphi(t)}{\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})} - \frac{\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})(\mathbf{D}\cdot\varphi(t))}{\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})} \ \textit{при}\ t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{5.9}$$

$$\Omega_j(t) = \mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})]^{-1} \ \textit{при}\ t \in (x_{j+1}, x_{j+2}); \tag{5.10}$$

*здесь использованы обозначения* (2.3), (5.1)–(5.3).

**Доказательство.** В соотношениях (5.4) и (5.6) преобразуем числители согласно лемме 3: $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \varphi(t)) = \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\varphi(t))$, $\det(\varphi(t), \mathbf{D}\times\mathbf{E}, \mathbf{E}\times\mathbf{F}) = \det(\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F})(\mathbf{E}\cdot\varphi(t))$, а в формуле (5.5) числитель преобразуем по формулам (3.1)–(3.2): получается два варианта такого преобразования $\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \varphi(t), \mathbf{D}\times\mathbf{E}) = \det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})(\mathbf{B}\cdot\varphi(t)) - \det(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E})(\mathbf{C}\cdot\varphi(t))$, $\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \varphi(t), \mathbf{D}\times\mathbf{E}) = \det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})(\mathbf{E}\cdot\varphi(t)) - \det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})(\mathbf{D}\cdot\varphi(t))$. Знаменатели соотношений (5.4)–(5.6) преобразуем согласно лемме 2: $\det(\mathbf{A}\times\mathbf{B}, \mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \det(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, $\det(\mathbf{B}\times\mathbf{C}, \mathbf{C}\times\mathbf{D}, \mathbf{D}\times\mathbf{E}) = \det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})$, $\det(\mathbf{C}\times\mathbf{D}, \mathbf{D}\times\mathbf{E}, \mathbf{E}\times\mathbf{F}) =$

$\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{F})$. Заменяя числители и знаменатели в формулах (5.4)–(5.6) в соответствии с этими преобразованиями, получаем доказываемое утверждение. □

Пусть $u, v, w, y, t$ – вещественные переменные. Предполагая, что $\det(\mathbf{N}(u),\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w)) \neq 0$ при $a < u < v < w < b$, введем функцию $\omega(u, v, w, y, t)$, заданную в области $\mathcal{D}$ вида $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v, w, y, t) \mid a < u < v < w < y < b, t \in (a, v) \cup (v, w) \cup (w, x) \cup (x, y) \cup (y, b)\}$ формулами

$$\omega(u, v, w, y, t) \equiv 0 \qquad \forall t \in (a, u) \cup (y, b), \tag{5.11}$$

$$\omega(u, v, w, y, t) \equiv \frac{\mathbf{N}(u) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{N}(u),\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w))} \qquad \forall t \in (u, v), \tag{5.12}$$

$$\omega(u, v, w, y, t) \equiv \frac{\mathbf{N}(u) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{N}(u),\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w))}$$

$$-\frac{\det(\mathbf{N}(u),\mathbf{N}(w),\mathbf{N}(y)))\mathbf{N}(v) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{N}(u),\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w))\det(\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w),\mathbf{N}(y))} \qquad \forall t \in (v, w), \tag{5.13}$$

$$\omega(u, v, w, y, t) \equiv \frac{\mathbf{N}(y) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w),\mathbf{N}(y))} \qquad \forall t \in (w, y). \tag{5.14}$$

В соответствии с обозначениями (5.1)–(5.3), (5.11)–(5.14) из (5.7)–(5.10) имеем

$$\Omega_j(t) \equiv \omega(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, t). \tag{5.15}$$

**Замечание 2.** Следуя доказательству формулы (5.9) в теореме 2, нетрудно установить, что

$$\omega(u, v, w, y, t) \equiv \frac{\mathbf{N}(y) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w),\mathbf{N}(y))}$$

$$-\frac{\det(\mathbf{N}(u),\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(y)))\mathbf{N}(w) \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{N}(u),\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w))\det(\mathbf{N}(v),\mathbf{N}(w),\mathbf{N}(y))} \qquad \forall t \in (v, w). \tag{5.16}$$

**Теорема 3.** *Функция $\Omega_j(t)$ может быть доопределена в узлах сетки $\mathbb{X}$ так, что в результате получится непрерывно дифференцируемая функция, заданная на интервале $(a, b)$.*

**Доказательство** этой теоремы легко получить непосредственно из формул (5.7)–(5.10); другой вариант доказательства дан в работе [5]. □

В дальнейшем будем считать, что функция $\Omega_j(t)$ и ее производная продолжены в узлы сетки $\mathbb{X}$ по непрерывности.

**Лемма 9.** *Справедливы формулы*

$$\Omega_j(x_{j-1}) = \frac{d}{dt}\Omega_j(x_{j-1}) = 0, \quad \Omega_j(x_{j+2}) = \frac{d}{dt}\Omega_j(x_{j+2}) = 0, \tag{5.17}$$

$$\Omega_j(x_j) = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{c}}{\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})}, \qquad \frac{d}{dt}\Omega_j(x_j) = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{c}'}{\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})}, \tag{5.18}$$

$$\Omega_j(x_{j+1}) = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}}{\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})}, \qquad \frac{d}{dt}\Omega_j(x_{j+1}) = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{d}'}{\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})}, \tag{5.19}$$

$$\Omega_{j-1}(x_j) = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{c}}{\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})}, \qquad \frac{d}{dt}\Omega_{j-1}(x_j) = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{c}'}{\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})}, \tag{5.20}$$

*где используются обозначения* (5.1)–(5.3).

**Доказательство.** Справедливость формул (5.17)–(5.19) вытекает из соотношений (5.7)–(5.10); формулы (5.20) получаются из (5.15) заменой $j$ на $j-1$ и использованием формул (5.1)–(5.3) и (5.14). □

## 6. Биортогональная система и интерполяционная задача

В этом пункте будет построено продолжение на $C^1(a,b)$ системы функционалов, биортогональной к системе $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

**Теорема 4.** *Система линейных функционалов* $\{F_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, *заданных на пространстве* $C^1(a,b)$ *формулами*

$$F_j(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det(\varphi_j, \varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1})u'(x_j) - \det(\varphi'_j, \varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1})u(x_j), \tag{6.1}$$

*биортогональна к системе функций* $\{\Omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$,

$$F_j(\Omega_{j'}) = \delta_{j,j'}, \qquad \forall j, j' \in \mathbb{Z}. \tag{6.2}$$

**Доказательство.** Поскольку при $j \le j'-1$ и при $j'+2 \le j$ точка $x_j$ не является внутренней точкой носителя непрерывно дифференцируемой функции $\Omega_{j'}$, то сама функция и ее производная в этой точке равны нулю, и потому функционал (6.1) на такой функции обращается в нуль. Следовательно, для доказательства (6.2) достаточно рассмотреть случаи $j' = j$ и $j' = j-1$. Функционал $F_j$ в обозначениях (2.3), (5.1)–(5.3) может быть записан в виде $F_j(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{D}\cdot\big(\mathbf{c}u'(x_j) - \mathbf{c}'u(x_j)\big)$. Отсюда при $u = \Omega_j$ с учетом формул (5.18) получаем $F_j(\Omega_j) = \mathbf{D}\cdot(\mathbf{c}\,\Omega_j'(x_j) - \mathbf{c}'\,\Omega_j(x_j)) =$

$[(\mathbf{D}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{c}')-(\mathbf{D}\cdot\mathbf{c}')(\mathbf{B}\cdot\mathbf{c})][\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}$. В силу леммы 5 числитель и знаменатель последнего выражения совпадают, и значит $F_j(\Omega_j)=1$. Если же $u=\Omega_{j-1}$, то, используя формулы (5.20), легко находим $F_j(\Omega_{j-1})=0$. Итак, справедливы соотношения (6.2). Теорема доказана. □

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$F_j(\widetilde{u})=v_j \qquad \forall j\in\mathbb{Z}, \quad \widetilde{u}\in\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}), \tag{6.3}$$

где $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – заданная последовательность чисел (бесконечная в обе стороны).

**Теорема 5.** *В пространстве $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X})$ существует единственное решение задачи* (6.3), *и это решение дается формулой*

$$\widetilde{u}(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\Omega_j(t). \tag{6.4}$$

**Доказательство** вытекает из теоремы 4. □

**Замечание 3.** При каждом фиксированном $t\in(a,b)$ в сумме (6.4) имеется не более трех ненулевых слагаемых.

## 7. Калибровочные соотношения

В этом пункте исходную сетку $\mathbb{X}$ дополняем новым узлом $x$, на полученной таким образом сетке $\mathbb{X}_1$ вводим $B_\varphi$-сплайны $\omega_{j'}(t)$ и даем представление сплайнов $\Omega_j(t)$ через $\omega_{j'}(t)$.

Итак, пусть $x$ – упомянутый новый узел, $x\in(x_k,x_{k+1})$; свяжем с этим узлом вектор $\mathbf{X}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{N}(x)$. Пусть $\xi_j$ – узлы вновь полученной сетки:

$$\xi_j\stackrel{\text{def}}{=}x_j \text{ при } j\le k,\ \ \xi_{k+1}\stackrel{\text{def}}{=}x,\ \ \xi_j\stackrel{\text{def}}{=}x_{j-1} \text{ при } j\ge k+2,$$
$$\mathbb{X}_1\stackrel{\text{def}}{=}\{\xi_j\mid j\in\mathbb{Z}\}. \tag{7.1}$$

Рассмотрим функции $\omega_i$, определяемые равенствами

$$\omega_i(t)\stackrel{\text{def}}{=}\omega(\xi_{i-1},\xi_i,\xi_{i+1},\xi_{i+2},t) \qquad \forall i\in\mathbb{Z}. \tag{7.2}$$

Очевидно, что для $t\in(a,b)$ верны тождества

$$\Omega_i(t)\equiv\omega_i(t) \text{ при } i\le k-2, \qquad \Omega_i(t)\equiv\omega_{i+1}(t) \text{ при } i\ge k+2. \tag{7.3}$$

Формулы (7.3) дополним представлениями функций $\Omega_{k-1}$, $\Omega_k$ и $\Omega_{k+1}$ через функции $\omega_j$.

**Теорема 6.** *Справедливо тождество*

$$\Omega_{k-1}(t) \equiv \omega_{k-1}(t) + \det(\mathbf{N}_k, \mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})]^{-1}\omega_k(t). \tag{7.4}$$

**Доказательство.** Положим $j = k - 1$ и рассмотрим последовательно четыре случая расположения аргумента $t$: 1) $t \in (x_{j-1}, x_j)$, 2) $t \in (x_j, x_{j+1})$, 3) $t \in (x_{j+1}, x)$, 4) $t \in (x, x_{j+2})$. Будем использовать обозначения (5.3).

1). Пусть $t \in (x_{j-1}, x_j)$. На рассматриваемом промежутке функция $\omega_k(t)$ тождественно равна нулю, а функция $\omega_{k-1}(t)$ (в силу соотношений (5.12), (7.2)) имеет вид $\omega_{k-1}(t) = \mathbf{B} \cdot \varphi(t)[\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})]^{-1}$; последняя дробь на рассматриваемом промежутке в соответствии с формулой (5.7) представляет собой функцию $\Omega_{k-1}(t)$. Первый случай рассмотрен.

2) Пусть теперь $t \in (x_j, x_{j+1})$. Используя формулы (5.13) и (7.1)–(7.2), находим, $\omega_{k-1}(t) = \mathbf{B} \cdot \varphi(t)[\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})]^{-1} - \mathbf{C} \cdot \varphi(t)\det(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{X})\ [\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X})]^{-1}$. Для функции $\omega_k(t)$ с помощью равенств (5.12), (7.1)–(7.2) выводим $\omega_k(t) = \mathbf{C} \cdot \varphi(t)[\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X})]^{-1}$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\omega_{k-1}(t) + \det(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{X})&[\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})]^{-1}\omega_k(t)\\ &= \mathbf{B} \cdot \varphi(t)[\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})]^{-1}\\ &- \mathbf{C} \cdot \varphi(t)\det(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{X})[\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X})]^{-1}\\ &+ \mathbf{C} \cdot \varphi(t)\det(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{X})[\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X})]^{-1}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\omega_{k-1}(t) + \frac{\det(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{X})}{\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})}\omega_k(t) &= \frac{\mathbf{B} \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})} + \frac{\mathbf{C} \cdot \varphi(t)}{\det(\mathbf{C}, \mathbf{X}, \mathbf{D})}\\ \times \frac{\det(\mathbf{X}, \mathbf{D}, \mathbf{E})\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) - \det(\mathbf{B}, \mathbf{X}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})}{\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})}&.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Числитель последней дроби преобразуем по лемме 6, полагая в ней $\mathbf{P} = \mathbf{B}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{X}$, $\mathbf{R} = \mathbf{D}$, $\mathbf{S} = \mathbf{E}$, $\mathbf{T} = \mathbf{C}$. В результате получается соотношение $\det(\mathbf{B}, \mathbf{X}, \mathbf{D})\det(\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{C}) + \det(\mathbf{X}, \mathbf{D}, \mathbf{E})\det(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{C}) = \det(\mathbf{X}, \mathbf{D}, \mathbf{C})\times \det(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E})$, откуда перестановкой столбцов приходим к равенству

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}, \mathbf{X}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}) - \det(\mathbf{X}, \mathbf{D}, \mathbf{E})\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})&\\ = -\det(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \times \det(\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E})&.\end{aligned}$$

Таким образом из (7.5) получаем

$$\begin{aligned}
&\omega_{k-1}(t) + \det(\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{X})[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\omega_k(t)\\
&\quad = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1} + \mathbf{C}\cdot\varphi(t)\,\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E})\\
&\qquad\qquad \times[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\
&\qquad\qquad\qquad = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\qquad\qquad - \mathbf{C}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1};
\end{aligned}$$

согласно формуле (5.8) последнее выражение при рассматриваемых $t$ представляет собой функцию $\Omega_{k-1}(t)$. Тождество (7.4) установлено для $t\in(x_j,x_{j+1})$.

3). Перейдем к случаю $t\in(x_{j+1},x)$. Используя формулы (5.14), (7.1)–(7.3), находим $\omega_{k-1}(t)=\mathbf{X}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{X})]^{-1}$. Применяя формулы (5.16), (7.1)–(7.2), приходим к равенству

$$\begin{aligned}
\omega_k(t) = \mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{D},\mathbf{X},\mathbf{E})]^{-1} - \mathbf{X}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})&\\
\times[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{X})\det(\mathbf{D},\mathbf{X},\mathbf{E})]^{-1}&.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
&\omega_{k-1}(t) + \det(\mathbf{N}_k,\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1})\times[\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1})]^{-1}\omega_k(t)\\
&\qquad\qquad = \mathbf{X}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{X})]^{-1}\\
&\qquad + \det(\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{X})[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\{\mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{D},\mathbf{X},\mathbf{E})]^{-1}\\
&\qquad - \mathbf{X}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{X})\det(\mathbf{D},\mathbf{X},\mathbf{E})]^{-1}\}\\
&\qquad\qquad\qquad = \mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1};
\end{aligned}$$

таким образом, при $t\in(x_{j+1},x)$ тождество (7.4) верно.

4). Рассмотрим, наконец, случай $t\in(x,x_{j+2})$. Легко видеть, что в этом случае $\omega_{k-1}(t)=0$, $\omega_k(t)=\mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{D},\mathbf{X},\mathbf{E})]^{-1}$, и потому тождество (7.4) очевидно. Теорема полностью доказана. □

**Теорема 7.** *Справедливо тождество*

$$\Omega_k(t)\equiv\frac{\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{X})}{\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1})}\omega_k(t)+\frac{\det(\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})}{\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})}\omega_{k+1}(t). \tag{7.6}$$

**Доказательство.** Положим $j=k$ и рассмотрим четыре случая расположения аргумента $t$: 1) $t\in(x_{j-1},x_j)$, 2) $t\in(x_j,x)$, 3) $t\in$

$(x, x_{j+1})$, 4) $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$. Дальше используются обозначения (5.3).

1). Пусть $t \in (x_{j-1}, x_j)$. На этом промежутке функция $\omega_{k+1}(t)$ тождественно равна нулю, а функция $\omega_k(t)$ (в силу соотношений (5.12), (7.1)–(7.2)) имеет вид $\omega_k(t) = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})]^{-1}$. Таким образом, при $t \in (x_{j-1}, x_j)$ тождество (7.6) очевидно.

2). Пусть теперь $t \in (x_j, x)$. Используя формулу (5.13) и равенства (7.1), (7.2), находим $\omega_k(t) = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})]^{-1} - \mathbf{C}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{D})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}$. Для функции $\omega_{k+1}(t)$ с помощью равенств (5.12), (7.1) и (7.2) выводим $\omega_{k+1}(t) = \mathbf{C}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}$. Из полученных формул имеем

$$
\begin{aligned}
&\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{X})[\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1})]^{-1}\omega_k(t)\\
&\qquad + \det(\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})[\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\omega_{k+1}(t)\\
&\quad = \det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\bigl\{\mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})]^{-1}\\
&\qquad - \mathbf{C}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{D})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}\bigr\}\\
&\qquad + \det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})\mathbf{C}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\quad = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\qquad - \mathbf{C}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{D})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\qquad + \mathbf{C}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\quad = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\qquad + \mathbf{C}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}\bigl\{\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\
&\qquad\qquad - \det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{D})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\bigr\}.
\end{aligned}
$$

Итак,

$$
\begin{aligned}
&\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{X})[\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1})]^{-1}\times\omega_k(t)\\
&\qquad + \det(\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})[\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\omega_{k+1}(t)\\
&\quad = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\qquad + \mathbf{C}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}[\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\\
&\qquad - \det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})][\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}.
\end{aligned}
$$

Числитель последней дроби преобразуем по лемме 6, полагая в ней $\mathbf{P} = \mathbf{B}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{X}$, $\mathbf{R} = \mathbf{D}$, $\mathbf{S} = \mathbf{E}$, $\mathbf{T} = \mathbf{C}$. В результате получается соотношение $\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{C}) +$

$\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{C}) = \det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{C})\det(\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E})$, откуда приходим к равенству

$$\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E}) - \det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}) = -\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E}).$$

Возвращаясь к рассматриваемой дроби, получаем

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{X})&[\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1})]^{-1}\omega_k(t)\\ &+\det(\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})[\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\omega_{k+1}(t)\\ &=\mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\ &+\mathbf{C}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E})\\ &\times[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\ &=\mathbf{B}\cdot\varphi(t)\times[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\ &-\mathbf{C}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{D},\mathbf{E})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1};\end{aligned}$$

согласно формуле (5.8) последнее выражение при рассматриваемых $t$ представляет собой функцию $\Omega_k(t)$. Таким образом, тождество (7.6) установлено для $t\in(x_j,x)$.

3). Перейдем к случаю $t\in(x,x_{j+1})$. Используя формулы (5.14), (7.1) и (7.2), находим $\omega_k(t)=\mathbf{D}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}$. Аналогично, применяя формулы (5.16), (7.1)–(7.2), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\omega_{k+1}(t)=\mathbf{E}\cdot\varphi(t)&[\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\ &-\mathbf{D}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{E})[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})]\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{X})&[\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1})]^{-1}\omega_k(t)\\ &+\det(\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})[\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\\ \times\,\omega_{k+1}(t)&=\mathbf{D}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}\\ &+\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\{\mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\ &-\mathbf{D}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{E})[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\}\\ &=\mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\ &+\mathbf{D}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})]^{-1}[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\\ &-\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})][\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}.\end{aligned}$$

В лемме 6 полагаем $\mathbf{P} = \mathbf{B}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{X}$, $\mathbf{R} = \mathbf{C}$, $\mathbf{S} = \mathbf{D}$, $\mathbf{T} = \mathbf{E}$; в результате выводим тождество $\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})+\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{E}) = \det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$. После элементарных преобразований отсюда получаем

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E}) - \det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{E})&\\ = -\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{E}).&\end{aligned}$$

Используя левую часть только что полученного тождества для наших преобразований, находим

$$\begin{aligned}&\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{X})[\det(\mathbf{N}_{k-1},\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1})]^{-1}\omega_k(t)\\ &\quad+\det(\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})[\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\omega_{k+1}(t)\\ &\quad= \mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\ &\quad+\mathbf{D}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\\ &-\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})][\det(\mathbf{C},\mathbf{X},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\ &\quad= \mathbf{E}\cdot\varphi(t)\times[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\ &\quad-\mathbf{D}\cdot\varphi(t)\,\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{E})[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}.\end{aligned}$$

Поскольку правая часть последнего равенства совпадает с правой частью формулы (5.9), приходим к выводу, что тождество (7.6) при $t\in(x,x_{j+1})$ установлено.

4). Рассмотрим случай $t\in(x_{j+1},x_{j+2})$. Легко видеть, что в этом случае $\omega_k(t)=0$, $\omega_{k+1}(t)=\mathbf{E}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{X},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}$, и потому согласно формуле (5.10) при $t\in(x_{j+1},x_{j+2})$ соотношение (7.6) верно. Теорема полностью доказана. □

**Теорема 8.** *Справедливо тождество*

$$\Omega_{k+1}(t)\equiv\frac{\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})}\omega_{k+1}(t)+\omega_{k+2}(t)\qquad\forall t\in(a,b).\quad(7.7)$$

**Доказательство.** Обозначим $j=k+1$ и рассмотрим последовательно четыре случая: 1) $t\in(x_{j-1},x)$, 2) $t\in(x,x_j)$, 3) $t\in(x_j,x_{j+1})$, 4) $t\in(x_{j+1},x_{j+2})$.

1). Пусть $t\in(x_{j-1},x)$. Согласно формулам (5.11)–(5.14) и (7.2) на рассматриваемом промежутке функция $\omega_{k+2}(t)$ тождественно равна нулю, а функция $\omega_{k+1}(t)$ с учетом формул (7.1)–(7.2) может быть записана в виде $\omega_{k+1}(t) = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})]^{-1}$, откуда вытекает справедливость доказываемой формулы при $t \in (x_{j-1}, x)$. Первый случай рассмотрен.

2). Пусть теперь $t \in (x, x_j)$. С помощью формул (5.13) и (7.1)–(7.2) находим $\omega_{k+1}(t) = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})]^{-1} - \mathbf{X} \times \varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})[\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}$. Для функции $\omega_{k+2}(t)$ ввиду соотношений (5.12), (7.1), (7.2) имеем $\omega_{k+2}(t) = \mathbf{X} \times \varphi(t)[\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\omega_{k+1}(t)\\
&+\omega_{k+2}(t) = \det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\big\{\mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})]^{-1}\\
&\qquad -\mathbf{X}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})[\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\big\}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{X}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1} = \mathbf{B}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1};
\end{aligned}$$

согласно формуле (5.7) последнее выражение при рассматриваемых $t$ представляет собой функцию $\Omega_j(t)$. Таким образом, тождество (7.7) установлено для $t \in (x, x_j)$.

3). Перейдем к случаю $t \in (x_j, x_{j+1})$. Используя формулы (5.14) и (7.1)–(7.2), находим $\omega_{k+1}(t) = \mathbf{D}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}$. Применение формул (5.16), (7.1)–(7.2) приводит к равенству

$$\begin{aligned}
\omega_{k+2}(t) &= \mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\
&\qquad -\mathbf{D}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{E})[\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{X},\mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_k,\mathbf{N}_{k+1},\mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\omega_{k+1}(t)\\
&\quad+\omega_{k+2}(t) = \mathbf{D}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})[\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}\\
&\qquad\qquad+\mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\
&\qquad -\mathbf{D}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{E})[\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\
&\qquad\qquad=\mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})]^{-1}\\
&\qquad\quad+\mathbf{D}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\\
&-\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})][\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E})\det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})]^{-1}.
\end{aligned}$$

Ввиду леммы 6 имеем

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{B},\mathbf{X},\mathbf{C})\det(\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E}) + \det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{D})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{E})\\
&\qquad\qquad\qquad = \det(\mathbf{X},\mathbf{C},\mathbf{E})\det(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}),
\end{aligned}$$

и значит

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})]^{-1}\omega_{k+1}(t) + \omega_{k+2}(t) \\ = \mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})]^{-1} \\ - \mathbf{D}\cdot\varphi(t)\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E})[\det(\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})]^{-1},\end{aligned}$$

что совпадает с правой частью формулы (5.9). Таким образом, тождество (7.7) справедливо для $t \in (x_j, x_{j+1})$.

4). Рассмотрим, наконец, случай $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$. Легко видеть, что при этом $\omega_{k+1}(t) = 0$, $\omega_{k+2}(t) = \mathbf{E}\cdot\varphi(t)[\det(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E})]^{-1}$, и потому тождество (7.7) на рассматриваемом здесь промежутке также справедливо.

Теорема полностью доказана. □

Дальше рассматриваются бесконечные ряды вида $\sum_j c_j\omega_j(t)$, $c_j \in \mathbb{R}^1$, где суммирование по $j$ распространено на все целые числа, $j \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при каждом фиксированном $t \in (a, b)$ такой ряд содержит не более трех ненулевых слагаемых; поэтому при любой последовательности $\{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ коэффициентов $c_j \in \mathbb{R}^1$ упомянутый ряд сходится (в смысле поточечной сходимости).

**Теорема 9.** *Справедливы соотношения*

$$\Omega_i(t) = \sum_j d_{i,j}\omega_j(t) \quad \forall t \in (a, b), \tag{7.8}$$

*где для $i, j \in \mathbb{Z}$ числа $d_{i,j}$ определяются по формулам:*

$$d_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ при } j \le k-1, \quad d_{i,j} = \delta_{i+1,j} \text{ при } j \ge k+2, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{7.9}$$

$$d_{k-1,k} = \frac{\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})}, \quad d_{k,k} = \frac{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})}{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})}, \tag{7.10}$$

$$d_{i,k} = 0 \text{ при } \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{k-1, k\}, \quad d_{i,k+1} = 0 \text{ при } \forall i \in \mathbb{Z}\backslash\{k, k+1\}, \tag{7.11}$$

$$d_{k,k+1} = \frac{\det(\mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})}{\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})}, \quad d_{k+1,k+1} = \frac{\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})}. \tag{7.12}$$

**Доказательство** непосредственно вытекает из формул (7.3)–(7.4), (7.6)–(7.7). □

Соотношения вида (7.8) называются *калибровочными соотношениями*, функции $\omega_j$ называются *калибрующими*, а функции $\Omega_i$ – *калибруемыми функциями* (см. [4]).

Полагая $\widetilde{\varphi}_i \overset{\text{def}}{=} \varphi(\xi_i)$, $\widetilde{\varphi}'_i \overset{\text{def}}{=} \varphi'(\xi_i)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, на пространстве $C^1(a,b)$ зададим функционалы $f_j(u) \overset{\text{def}}{=} \det(\widetilde{\varphi}_j, \widetilde{\varphi}_{j+1}, \widetilde{\varphi}'_{j+1})u'(\xi_j) - \det(\widetilde{\varphi}'_j, \widetilde{\varphi}_{j+1}, \widetilde{\varphi}'_{j+1})u(\xi_j)$ $\forall j \in \mathbb{Z}$. В соответствии с теоремой 5, примененной в условиях использования сетки $\mathbb{X}_1$, видно, что система функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ биортогональна системе $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, т.е. $f_j(\omega_{j'}) = \delta_{j,j'}$ $\forall j, j' \in \mathbb{Z}$.

Из формул (6.1) следует, что

$$f_j = F_j \text{ при } j \le k-1, \qquad f_j = F_{j-1} \text{ при } j \ge k+2. \tag{7.13}$$

## 8. Вейвлетное разложение. Формулы декомпозиции

В соответствии с определением, $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$ является пространством $B_\varphi$-сплайнов второго порядка на сетке $\mathbb{X}_1$ (см. соотношения (7.1)), $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1) = \{\, \widetilde{u} \mid \widetilde{u} \overset{\text{def}}{=} \sum_j \overline{c}_j \omega_j \forall \overline{c}_j \in \mathbb{R}^1 \,\}$. Согласно теореме 9 справедливо включение $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}) \subset \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$. Рассмотрим оператор $P$ проектирования пространства $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$ на подпространство $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X})$, задаваемый формулой $P\widetilde{u} \overset{\text{def}}{=} \sum_j F_j(\widetilde{u})\ \Omega_j$ $\forall \widetilde{u} \in \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$, и введем оператор $Q = I - P$, где $I$ – тождественный оператор.

Пространство $W \overset{\text{def}}{=} Q\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$ называется *пространством всплесков (вейвлетов)*, а прямое разложение

$$\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1) = \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}) \dot{+} W, \tag{8.1}$$

– *сплайн-вейвлетным разложением* пространства $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$.

В соответствии с формулами (7.8) и (8.1) имеем $\widetilde{u} = \sum_i a_i \Omega_i + \sum_{i'} b_{i'} \omega_{i'} = \sum_{i'} (\sum_i a_i d_{i,i'} + b_{i'}) \omega_{i'}$, так что для чисел $c_j = f_j(\widetilde{u})$ получаем

$$c_j = \sum_i a_i d_{i,j} + b_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{8.2}$$

Пусть известны коэффициенты $c_k$ в разложении элемента $\widetilde{u} \in \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$ по элементам базиса $\omega_{i'}$, а именно, $\widetilde{u} = \sum_k c_k \omega_k$. Используя равенство $a_i = F_i(\widetilde{u})$, из формул (8.2) имеем

$$b_j = c_j - \sum_i d_{i,j} a_i = c_j - \sum_i d_{i,j} F_i(\sum_k c_k \omega_k) = c_j - \sum_i d_{i,j} \sum_k c_k F_i(\omega_k).$$

Формулы $a_i = \sum_k c_k F_i(\omega_k)$, $\quad b_j = c_j - \sum_i d_{i,j} \sum_k c_k F_i(\omega_k)$ называются *формулами декомпозиции*.

**Лемма 10.** *Верны соотношения:* $F_j(\omega_i) = 0$ *при* $(i,j) \notin \{(i',i')|i' \leq k-1\} \bigcup \{(i',i'+1)|i' \geq k+1\} \bigcup \{(k,k-1),(k,k)\}$,

$$F_j(\omega_j) = 1 \quad \textit{при} \quad j \leq k-1, \qquad F_j(\omega_{j+1}) = 1 \quad \textit{при} \quad j \geq k+1, \quad (8.3)$$

$$F_k(\omega_{k-1}) = \frac{\det(\mathbf{X}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})}, \quad F_k(\omega_k) = \frac{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})}. \quad (8.4)$$

**Доказательство.** Используем соотношения (7.13). При $j \leq k-1$ имеем $F_j(\omega_i) = f_j(\omega_i) = \delta_{j,i}$, $i \in \mathbb{Z}$, а при $j \geq k+1$ получаем $F_j(\omega_i) = f_{j+1}(\omega_i) = \delta_{j+1,i}$, $i \in \mathbb{Z}$. Остается рассмотреть лишь величины $F_k(\omega_i)$, $i \in \mathbb{Z}$. Ввиду непрерывной дифференцируемости функций $\omega_i$ на $(a,b)$ и с учетом того, что $\operatorname{supp}\omega_i = [\xi_{i-1}, \xi_{i+2}]$, видим, что $F_k(\omega_i) = 0$ при $i \notin \{k-1, k\}$. Снова используя непрерывную дифференцируемость функции $\omega_{k-1}(t)$ на $(a,b)$ и применяя формулы (5.14), (7.2) на промежутке $[x_k, x]$, имеем $\omega_{k-1}(t) = \omega(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x, t) = \mathbf{X} \cdot \varphi(t)[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})]^{-1}$ при $t \in [x_k, x]$. Согласно формуле (6.1) $F_k(u) = \mathbf{N}_{k+1} \cdot (\varphi_k u'(x_k) - \varphi'_k u(x_k))$, так что из (7.2) получаем $F_k(\omega_{k-1}) = [(\mathbf{N}_{k+1} \cdot \varphi_k)(\mathbf{X} \cdot \varphi'_k) - (\mathbf{N}_{k+1} \cdot \varphi'_k)(\mathbf{X} \cdot \varphi_k)][\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})]^{-1}$; применяя здесь лемму 5, выводим первую из формул (8.4). Аналогичным образом с помощью формул (5.12), (7.2) при $t \in [x_{k-1}, x_k]$ находим $\omega_k(t) = \mathbf{N}_{k-1} \cdot \varphi(t)[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})]^{-1}$; применяя функционал $F_k$ к $\omega_k$ и используя лемму 5 приходим ко второй из формул (8.4). Лемма доказана. □

**Теорема 10.** *Для сплайн-вейвлетного разложения* (8.1) *пространства* $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$ *формулы декомпозиции имеют вид*

$$a_i = c_i \quad \textit{при} \quad i \leq k-1, \quad a_i = c_{i+1} \quad \textit{при} \quad i \geq k+1, \quad (8.5)$$

$$a_k = \frac{\det(\mathbf{X}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})} c_{k-1} + \frac{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})} c_k, \quad (8.6)$$

$$b_{k+1} = -\frac{\det(\mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})}{\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})} \Big[\det(\mathbf{X}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1}) c_{k-1}$$

$$+ \det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1}) c_k\Big] + c_{k+1} - \frac{\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1})}{\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1}, \mathbf{N}_{k+2})} c_{k+2}, \quad (8.7)$$

$$b_j = 0 \quad \textit{при} \quad j \neq k+1. \quad (8.8)$$

**Доказательство.** Равенства (8.5) легко следуют из леммы 10 (см. (8.3)). При $i = k$ в первой из формул декомпозиции остается лишь два слагаемых: $a_k = c_{k-1}F_k(\omega_{k-1}) + c_kF_k(\omega_k)$; использование равенств (8.4) приводит к соотношению (8.6).

Для отыскания $b_j$ воспользуемся соотношениями (8.2) – (8.4):

$$b_j = c_j - a_j \quad \text{при } j \le k-1, \quad b_j = c_j - a_{j-1} \quad \text{при } j \ge k+2, \tag{8.9}$$

$$b_k = c_k - a_{k-1}d_{k-1,k} - a_kd_{k,k}, \quad b_{k+1} = c_{k+1} - a_kd_{k,k+1} - a_{k+1}d_{k+1,k+1}. \tag{8.10}$$

Из (8.5) и (8.9) находим $b_j = 0$ при $j \le k-1$ и $b_j = 0$ при $j \ge k+2$. Подставляя в первую из формул (8.10) найденные выше величины $a_{k-1}$ и $a_k$ и числа $d_{k-1,k}$ и $d_{k,k}$ из соотношений (7.10), выводим

$$\begin{aligned}
b_k = c_k &- a_{k-1}\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})]^{-1} \\
&- a_k\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})]^{-1} \\
&= c_k - c_{k-1}\det(\mathbf{N}_k, \mathbf{X}, \mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})]^{-1} \\
&\quad - \det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})]^{-1} \\
&\quad \times \left\{c_{k-1} \times \det(\mathbf{X}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})]^{-1}\right. \\
&\quad\quad \left. + c_k\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{N}_{k+1})[\det(\mathbf{N}_{k-1}, \mathbf{N}_k, \mathbf{X})]^{-1}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Итак, соотношения (8.8) установлены. Из второй формулы (8.10) получаем $b_{k+1} = c_{k+1} - d_{k,k+1}[c_{k-1}F_k(\omega_{k-1}) + c_kF_k(\omega_k)] - c_{k+2}d_{k+1,k+1}$. После подстановки сюда значений $d_{k,k+1}$, $d_{k+1,k+1}$, $F_k(\omega_{k-1})$ и $F_k(\omega_k)$ из (7.12) и (8.4) выводим соотношение (8.7). Теорема полностью доказана. □

**Следствие 2.** *Согласно формулам* (8.7)–(8.8), *вейвлетным базисом пространства* $W$ *служит* $B_\varphi$*-сплайн* $\omega_{k+1}$, *т.е.* $W = \{b\,\omega_{k+1} \mid b \in \mathbb{R}^1\}$.

## 9. Формулы реконструкции

Пусть теперь известны коэффициенты $a_i$ и $b$ в разложениях проекций элемента $\widetilde{u} \in \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}_1)$ на пространства $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X})$ и $W$: $P\widetilde{u} = \sum_i a_i\Omega_i$, $Q\widetilde{u} = b\,\omega_{k+1}$.

В соответствии с формулами (8.2) находим коэффициенты $c_j$; формулы (8.2) называются *формулами реконструкции*.

**Теорема 11.** *Для рассматриваемого сплайн-вейвлетного разложения* (8.1) *формулы реконструкции имеют вид*

$$c_j = a_j \quad \textit{при} \quad j \le k-1, \quad c_j = a_{j-1} \quad \textit{при} \quad j \ge k+2, \tag{9.1}$$

$$c_{k+1} = a_k d_{k,k+1} + a_{k+1} d_{k+1,k+1} + b, \quad c_k = a_{k-1} d_{k-1,k} + a_k d_{k,k}. \tag{9.2}$$

**Доказательство.** Ввиду равенств (7.9) при $j \notin \{k, k+1\}$ получаем соотношения (9.1). При $j = k$ и при $j = k+1$ из формул (7.9)–(7.12) находим (9.2). □

## 10. О вариантах телескопических систем и об их вейвлетных разложениях

Рассмотрим бесконечную последовательность $\{\mathbb{X}^S\}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, вложенных сеток вида (2.1) со свойством (2.2): $\mathbb{X}^0 \subset \mathbb{X}^1 \subset \mathbb{X}^2 \subset \dots$, причем каждая следующая сетка отличается от предыдущей добавлением одного узла, не совпадающего с узлами расширяемой сетки. Предположим, что $\mathbb{X}^S \in \mathcal{K}(a, b, K_0)$, где $K_0$ – фиксированное число; пусть еще выполнены условия теоремы 1 и пусть для указанного там $\varepsilon$ справедливы неравенства $h_{\mathbb{X}^S} < \varepsilon$, $s = 0, 1, 2, \dots$.

По теореме 9 $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^S) \subset \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^{S+1})$, $s = 0, 1, 2, \dots$ (см. (8.1) при $\mathbb{X} = \mathbb{X}^S$, $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}^{S+1}$), так что получается система последовательно вложенных пространств (телескопическая система): $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^0) \subset \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^1) \subset \dots$. Обозначая координатные сплайны пространства $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^S)$ через $\omega_{i,S}$, $i \in \mathbb{Z}$, видим, что справедливы калибровочные соотношения

$$\omega_{i,S}(t) = \sum_j d_{i,j}^{(S)} \omega_{j,S+1}(t) \qquad \forall t \in (a, b), \tag{10.1}$$

где коэффициенты $d_{i,j}^{(S)}$ определяются согласно теореме 9, в которой следует взять $\mathbb{X} = \mathbb{X}^S$, $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}^{S+1}$ и произвести подходящую перенумерацию узлов. Заметим, что ввиду упомянутой теоремы в каждом из соотношений (10.1) имеется не более двух ненулевых слагаемых. Применяя к телескопической системе пространств предыдущие построения (см. (8.1)), получаем сплайн-вейвлетное разложение вида $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^{S+1}) = \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^S) \dot{+} W^S$, последовательное использование которого приводит к разложению пространства $\mathcal{B}_\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_S \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^S)$ в прямую сумму $\mathcal{B}_\varphi^* = \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^0) \dot{+}$

$W^0 \dot{+} W^1 \dot{+} W^2 \ldots$ и к формулам реконструкции и декомпозиции (см. теоремы 10 и 11).

Из последовательности чисел $0, 1, 2, 3, \ldots$ выделим подпоследовательность $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_p < \ldots < s_q < \ldots$ и рассмотрим соответствующую последовательность сеток $\mathbb{X}^{S_0} \subset \mathbb{X}^{S_1} \subset \mathbb{X}^{S_2} \subset \ldots$. Сетка $\mathbb{X}^{S_q}$ получается из сетки $\mathbb{X}^{S_p}$ добавлением $s_q - s_p$ узлов, так что можно рассмотреть телескопическую систему пространств $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^{S_p}) \subset \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^{S_p+1}) \subset \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^{S_p+2}) \subset \ldots \subset \mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^{S_q})$. Рекуррентно применяя соотношение (10.1) при $s = s_p, s_p + 1, \ldots, s_q - 1$, находим калибровочные соотношения

$$\omega_{i,S_p} = \sum_j d\,_{i,j}^{(S_p,S_q)} \omega_{j,S_q}, \tag{10.2}$$

где функции $\omega_{i,S_p}$ и $\omega_{i,S_q}$ строятся по формулам (5.15) при $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{S_p}$ и при $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{S_q}$ соответственно. Нетрудно видеть, что число ненулевых слагаемых в соотношении (10.2) не превосходит числа $2^{S_q - S_p}$. При вычислении коэффициентов $d\,_{i,j}^{(S_p,S_q)}$ нет необходимости в упомянутом рекуррентном процессе: можно лишь применить систему функционалов, биортогональную к системе $\{\omega_{j,S_q}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Упомянутая система функционалов $\{F_i^{S_q}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ определяется формулами (6.1) при $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{S_q}$, $F_i = F_i^{S_q}$; в результате имеем

$$d_{i,j}^{(S_p,S_q)} = F_i^{S_q}(\omega_{j,S_p}); \tag{10.3}$$

с помощью биортогональных систем в этом случае легко получаются формулы реконструкции и декомпозиции.

Предположим теперь, что объединение $\widetilde{\mathbb{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{S=0}^{+\infty} \mathbb{X}^S$ представляет собой сетку вида (2.1) со свойством (2.2), причем между любыми двумя соседними узлами сетки $\mathbb{X}^0$ имеется лишь конечное число узлов сетки $\widetilde{\mathbb{X}}$; тогда верны включения $\mathbb{X}^0 \subset \widetilde{\mathbb{X}}$, $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^0) \subset \mathcal{B}_\varphi(\widetilde{\mathbb{X}})$ и справедливы калибровочные соотношения $\omega_i = \sum_j \widetilde{d}\,_{i,j} \widetilde{\omega}_j$ между координатными сплайнами $\omega_i$ и $\widetilde{\omega}_j$ пространств $\mathcal{B}_\varphi(\mathbb{X}^0)$ и $\mathcal{B}_\varphi(\widetilde{\mathbb{X}})$ соответственно (число ненулевых слагаемых в каждом соотношении конечно). Как и прежде, биортогональные системы к упомянутым координатным сплайнам определяются теми же формулами (6.1) при $\mathbb{X} = \mathbb{X}^0$ и при $\mathbb{X} = \widetilde{\mathbb{X}}$ соответственно. В частности, если $\{\widetilde{F}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ – биортогональная система функционалов к системе сплайнов $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, то аналогично (10.3) имеем $\widetilde{d}_{i,j} = \widetilde{F}_i(\omega_j)$. Указанные биортогональные системы обычным образом приводят к формулам реконструкции и декомпозиции.

Отметим также, что проведенные здесь построения позволяют получить сплайн-вейвлетное разложение на отрезке, содержащем конечное число узлов, или на полуоткрытом интервале. Действительно, пусть $[c,d]$ – отрезок, содержащийся в интервале $(a,b)$. Ввиду свойства (2.2), которое выполнено для любой из рассматривавшихся сеток $\mathbb{X}^S$, множества $\widehat{\mathbb{X}}^S \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{X}^S \bigcap (c,d)$ являются конечными сетками на $[c,d]$; существует $k,n \in \mathbb{Z}$ такие, что $\widehat{\mathbb{X}}^S: \ x_{k,S} < x_{k+1,S} < \ldots < x_{n,S}$. Очевидно, что $\widehat{\mathbb{X}}^S \in \widehat{\mathcal{K}}(c,d,K_0)$, где $\widehat{\mathcal{K}}(c,d,K_0)$ – класс локально-квазиравномерных сеток со свойством (4.4) (рассматриваемом для тех $j$, для которых соответствующие узлы принадлежат сетке $\widehat{\mathbb{X}}^S$; более точные формулировки здесь давать не будем). Рассмотрим те функции $\omega_{i,S}$, пересечение носителей которых с интервалом $(c,d)$ непусто (т.е. функции с индексами $i = k-2, k-1, \ldots, n$); очевидно, что для их построения могут потребоваться разве лишь узлы множества $\widehat{\mathbb{X}}^S \bigcup \{x_{k-2,S}, x_{k-1,S}, \ldots, x_{n+1,S}, x_{n+2,S}\}$. Сужения функций $\omega_{i,S}$ на отрезок $[a,b]$, очевидно, удовлетворяют калибровочным соотношениям (10.1) при $t \in [c,d]$, и, следовательно, соответствующие линейные пространства $B_\varphi$-сплайнов на рассматриваемом отрезке образуют телескопическую систему. Вейвлетное разложение последней образуется с помощью применения конечной биортогональной системы функционалов (к системе функций $\{\omega_{i,S}\}_{i=k-2,k-1,\ldots,n}$), получаемой из системы вида (6.1) удалением функционалов с номерами $i < k-2$ и $i > n$. Для полуоткрытого интервала рассуждения аналогичны.

## 11. Степенны́е $B$-сплайны

В этом пункте рассмотрим случай, когда $\varphi(t) = (1, t^\alpha, t^\beta)^T$, где вещественные числа $\alpha$ и $\beta$ различны и не равны нулю, а $0 \notin [a,b]$. В этом случае $\det(\varphi, \varphi', \varphi'')\alpha\beta(\beta-\alpha)t^{\alpha+\beta-3} \neq 0$, и значит в рассматриваемых условиях для достаточно мелкой сетки (из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток) $B_\varphi$-сплайны существуют. Сооветствующие координатные $B_\varphi$-сплайны $\Omega_j^{\alpha,\,\beta}(t)$ непрерывно дифференцируемы, и $\operatorname{supp}\Omega_j^{\alpha,\,\beta} = [x_{j-1}, x_{j+2}]$.

Согласно формулам (5.7)–(5.10),

1) при $t \in (x_{j-1}, x_j)$ получаем

$$\Omega_j^{\alpha,\,\beta}(t) = \Big(\beta x_{j-1}^{\beta-1}(x_{j-1}^{\alpha} - t^{\alpha}) + \alpha x_{j-1}^{\alpha-1}(t^{\beta} - x_{j-1}^{\beta})\Big)$$

$$\times\Big\{\alpha\beta(\beta-\alpha)(x_{j-1}x_jx_{j+1})^{\alpha+\beta-1}[(x_j^{-\beta} - x_{j-1}^{-\beta})(x_{j+1}^{-\alpha} - x_{j-1}^{-\alpha})$$

$$-(x_j^{-\alpha} - x_{j-1}^{-\alpha})(x_{j+1}^{-\beta} - x_{j-1}^{-\beta})]\Big\}^{-1}, \qquad (11.1)$$

2) при $t \in (x_j, x_{j+1})$ выводим

$$\Omega_j^{\alpha,\,\beta}(t) = \Big\{\beta x_{j-1}^{\beta-1}(x_{j-1}^{\alpha} - t^{\alpha}) + \alpha x_{j-1}^{\alpha-1}(t^{\beta} - x_{j-1}^{\beta}) - x_{j-1}^{\alpha+\beta-1}$$

$$\times\Big[(x_{j+1}^{-\beta} - x_{j-1}^{-\beta})(x_{j+2}^{-\alpha} - x_{j-1}^{-\alpha}) - (x_{j+1}^{-\alpha} - x_{j-1}^{-\alpha})(x_{j+2}^{-\beta} - x_{j-1}^{-\beta})\Big]$$

$$\times\Big[\beta x_j^{\beta-1}(x_j^{\alpha} - t^{\alpha}) + \alpha x_j^{\alpha-1}(t^{\beta} - x_j^{\beta})\Big]\Big[x_j^{\alpha+\beta-1}[(x_{j+1}^{-\beta} - x_j^{-\beta})(x_{j+2}^{-\alpha} - x_j^{-\alpha})$$

$$-(x_{j+1}^{-\alpha} - x_j^{-\alpha})(x_{j+2}^{-\beta} - x_j^{-\beta})]\Big]^{-1}\Big\}\Big\{\alpha\beta(\beta-\alpha)(x_{j-1}x_jx_{j+1})^{\alpha+\beta-1}$$

$$\times[(x_j^{-\beta} - x_{j-1}^{-\beta})(x_{j+1}^{-\alpha} - x_{j-1}^{-\alpha}) - (x_j^{-\alpha} - x_{j-1}^{-\alpha})(x_{j+1}^{-\beta} - x_{j-1}^{-\beta})]\Big\}^{-1}, \quad (11.2)$$

3) при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ находим

$$\Omega_j^{\alpha,\,\beta}(t) = \Big(\beta x_{j+2}^{\beta-1}(x_{j+2}^{\alpha} - t^{\alpha}) + \alpha x_{j+2}^{\alpha-1}(t^{\beta} - x_{j+2}^{\beta})\Big)$$

$$\times\Big\{\alpha\beta(\beta-\alpha)(x_jx_{j+1}x_{j+2})^{\alpha+\beta-1}[(x_{j+1}^{-\beta} - x_j^{-\beta})(x_{j+2}^{-\alpha} - x_j^{-\alpha})$$

$$-(x_{j+1}^{-\alpha} - x_j^{-\alpha})(x_{j+2}^{-\beta} - x_j^{-\beta})]\Big\}^{-1}. \qquad (11.3)$$

Сплайны $\Omega_j^{\alpha,\,\beta}$ называются *степенны́ми $B$-сплайнами порядка* $(\alpha, \beta)$; формулы декомпозиции и реконструкции для соответствующего им сплайн-вейвлетного разложения получаются согласно теоремам 10 и 11.

**Замечание 4.** Подстановка $\alpha = 1$, $\beta = 2$ в соотношения (11.1)–(11.3) приводит к известным формулам для полиномиальных $B$-сплайнов второй степени.

## 12. Экспоненциально-тригонометрические $B$-сплайны

Пусть $\alpha, \beta$ – различные (вещественные или комплексные) числа, отличные от нуля. Положим $\varphi(t) = (1, e^{\alpha t}, e^{\beta t})^T$. Очевидно, что в рассматриваемом случае вронскиан $\det(\varphi, \varphi', \varphi'')$ отличен от нуля на отрезке $[a, b]$, ибо система $1$, $e^{\alpha t}$, $e^{\beta t}$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения $y''' - (\alpha+\beta)y'' + \alpha\beta y' = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. Поэтому в нашем случае для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные $B_\varphi$-сплайны существуют. Обозначим эти сплайны $\widetilde{\Omega}_j^{\alpha,\,\beta}$. Из формул (5.7)–(5.10)

1) при $t \in (x_{j-1}, x_j)$ вытекает представление

$$\widetilde{\Omega}_j^{\alpha,\,\beta}(t) = \Big(\beta e^{\beta x_{j-1}}(e^{\alpha x_{j-1}} - e^{\alpha t}) + \alpha e^{\alpha x_{j-1}}(e^{\beta t} - e^{\beta x_{j-1}})\Big)$$

$$\times\Big\{\alpha\beta(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)(x_{j-1}+x_j+x_{j+1})}\Big[e^{-\beta x_j}(e^{-\alpha x_{j+1}} - e^{-\alpha x_{j-1}})$$

$$+e^{-\beta x_{j+1}}(e^{-\alpha x_{j-1}} - e^{-\alpha x_j}) + e^{-\beta x_{j-1}}(e^{-\alpha x_j} - e^{-\alpha x_{j+1}})\Big]\Big\}^{-1}, \quad (12.1)$$

2) при $t \in (x_j, x_{j+1})$ получаем

$$\widetilde{\Omega}_j^{\alpha,\,\beta}(t) = \Big\{\beta e^{\beta x_{j-1}}(e^{\alpha x_{j-1}} - e^{\alpha t}) + \alpha e^{\alpha x_{j-1}}(e^{\beta t} - e^{\beta x_{j-1}})$$

$$-\alpha\beta(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)(x_{j-1}+x_{j+1}+x_{j+2})}\Big[e^{-\beta x_{j+1}}(e^{-\alpha x_{j+2}} - e^{-\alpha x_{j-1}})$$

$$+e^{-\beta x_{j+2}}(e^{-\alpha x_{j-1}} - e^{-\alpha x_{j+1}}) + e^{-\beta x_{j-1}}(e^{-\alpha x_{j+1}} - e^{-\alpha x_{j+2}})\Big]$$

$$\times\Big[\beta e^{\beta x_j}(e^{\alpha x_j} - e^{\alpha t}) + \alpha e^{\alpha x_j}(e^{\beta t} - e^{\beta x_j})\Big]$$

$$\times\Big[\alpha\beta(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)(x_j+x_{j+1}+x_{j+2})}\Big(e^{-\beta x_{j+1}}(e^{-\alpha x_{j+2}} - e^{-\alpha x_j})$$

$$+e^{-\beta x_{j+2}}(e^{-\alpha x_j} - e^{-\alpha x_{j+1}}) + e^{-\beta x_j}(e^{-\alpha x_{j+1}} - e^{-\alpha x_{j+2}})\Big)\Big]^{-1}\Big\}$$

$$\times\Big\{\alpha\beta(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)(x_{j-1}+x_j+x_{j+1})}\Big[(e^{-\beta x_j}(e^{-\alpha x_{j+1}} - e^{-\alpha x_{j-1}})$$

$$+e^{-\beta x_{j+1}}(e^{-\alpha x_{j-1}} - e^{-\alpha x_j}) + e^{-\beta x_{j-1}}(e^{-\alpha x_j} - e^{-\alpha x_{j+1}})\Big]\Big\}^{-1}, \quad (12.2)$$

3) при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ находим

$$\widetilde{\Omega}_j^{\alpha,\,\beta}(t) = \Big[\beta e^{\beta x_{j+2}}(e^{\alpha x_{j+2}} - e^{\alpha t}) + \alpha e^{\alpha x_{j+2}}(e^{\beta t} - e^{\beta x_{j+2}})\Big]$$

$$\times\Big[\alpha\beta(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)(x_j+x_{j+1}+x_{j+2})}\Big(e^{-\beta x_{j+1}}(e^{-\alpha x_{j+2}} - -e^{-\alpha x_j})$$

$$+e^{-\beta x_{j+2}}(e^{-\alpha x_j} - e^{-\alpha x_{j+1}}) + e^{-\beta x_j}(e^{-\alpha x_{j+1}} - e^{-\alpha x_{j+2}})\Big)\Big]^{-1}. \quad (12.3)$$

Сплайны, полученные по формулам (12.1)–(12.3), называются *экспоненциально-тригонометрическими $B$-сплайнами порядка* $(\alpha, \beta)$; сплайн-вейвлетное разложение, соответствующее этим сплайнам, строится согласно формулам (7.8)–(7.12), (8.2)–(8.3), (9.3)–(9.6).

**Замечание 5.** Обозначим мнимую единицу через $i$. Подстановка $\alpha = i$, $\beta = -i$ в соотношения (12.1)–(12.3) приводит к формулам для тригонометрических $B$-сплайнов второго порядка; получающиеся при этом сплайны $\widetilde{\Omega}_j^{\,i,-i}$ после умножения на масштабирующий множитель $-4i\ \sin\frac{x_{j+1}-x_j}{2}$ совпадают со сплайнами, полученными ранее в работах [5,6].

## Литература


1. M. D. Buhmann, *Multiquadratic prewavelets on nonequally spaced knots in one dimension.* — Math. Comput. **64** (1995), 1611–1625.
2. И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин, *Основы теории всплесков.* — Успехи мат. наук **53** (1998), 53–128.
3. С. Малла, *Вэйвлеты в обработке сигналов.* Мир, М., 2005.
4. Ю. К. Демьянович, *О вложенности пространств минимальных сплайнов.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **40** (2000), 1012–1029.
5. И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович, *О сплайнах максимальной гладкости.* — Вестник Санкт-Петерб. унив. Сер. 1, вып. 4 (2004), 3–11.
6. Ю. К. Демьянович, *Вложенные пространства тригонометрических сплайнов и их всплесковое разложение.* – Матем. заметки **78**, вып. 5 (2005), 658–675.



Demjanovich Yu. K. A local wavelet basis for an irregular grid.

The spaces of $\mathcal{B}_\varphi$-splines are proved to be embedded for an arbitrary grid refinement; the direct (wavelet) decomposition for chains of embedded spaces of $\mathcal{B}_\varphi$-splines on a sequence of refined irregular grids is discussed; a wavelet basis of functions with compact supports is constructed; formulas of decomposition and reconstruction are provided. Simple

solutions of certain interpolation problems in the spaces considered are suggested. Examples of the spline spaces are presented.

С.-Петербургский
государственный университет
*E-mail*: ydemj@paloma.spbu.ru

Поступило 5 сентября 2006 г.