А. В. Бурделёв, В. Г. Никонов, О построении аналитического задания k-значной пороговой функции,
Comp. nanotechnol., 2015, выпуск 2, 5–13

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ НАНОТЕХНОЛОГИЙ

1.1. О ПОСТРОЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ k-ЗНАЧНОЙ ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ

Бурделёв Александр Владимирович, ст. преподаватель кафедры Математического моделирования и анализа данных факультета Прикладной математики и информатики. Белорусский государственный университет. E-mail: aburd2011@mail.ru

Никонов Владимир Глебович, доктор технических наук, доцент, член президиума РАЕН

Аннотация: Задача: В работе [2] предложен ряд подходов к решению задачи нахождения коэффициентов линейной формы пороговой булевой функции. Эти подходы предполагают использование характеристического вектора булевой функции в качестве первого приближения коэффициентов линейной формы и окончательное их уточнение с помощью нескольких итеративных алгоритмов. В данной работе рассмотрен вопрос построения порогового представления k-значной пороговой функции.

Модель: Для решения вопроса построения порогового представления k-значной пороговой функции предлагается несколько трактовок близости двух k-значных функций: мультипликативные, разностные и квадратичные коэффициенты, коэффициенты роста и коэффициенты возрастания. Рассматривается возможность аппроксимации коэффициентов линейной формы данными коэффициентами и возможность дальнейшей коррекции.

Выводы: На основании примеров сделано заключение о том, что для первого приближения коэффициентов линейной формы предпочтение стоит отдать использованию коэффициентов возрастания. При этом аналогично булевому случаю подтверждается предположение о необходимости введения итеративной процедуры. Предложен итеративный алгоритм нахождения коэффициентов линейной формы k-значной пороговой функции на основе коэффициентов возрастания

Ключевые слова: пороговая k-значная функция, нахождение линейной формы пороговой функции, пороговая логика

ABOUT CONSTRUCTION OF ANALYTICAL DEFINITION OF k-VALUE THRESHOLD FUNCTION

Burdeliov Alexander V., Senior Lecturer at the Department of Mathematical Modeling and Data Analysis at the Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University. E-mail: aburd2011@mail.ru

Nikonov Vladimir G., Doctor of Sciences, Docent, member of presidium of Russian Academy of Natural Sciences.

Abstract: Task: In [2] proposed a few methods for finding coefficients of linear form of Boolean threshold function. These methods are founding on using coefficients of characteristic vector, as first approximation of coefficients of linear form, and then a few algorithms for correction of this approximation. In this paper submitted for consideration the question of finding coefficients of linear form of k-value threshold function.

Model: In this paper submitted a few interpretations of closeness of two k-value functions by definition of multiplication, differential and quadratic coefficients, also expansion coefficients and increase coefficients. Considered potential of these coefficients to approximate the coefficients of linear form and possibility of further correction.

Findings: In this paper made the conclusion that expansion coefficients and increase coefficients are better for approximation the coefficients of linear form. Submitted algorithm for finding coefficients of linear form of k-value threshold function funding on increase coefficients.

Index terms: k-value threshold function, finding coefficients of linear form of threshold function, threshold logic.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из актуальных направлений развития современных вычислительных технологий связано с использованием бионических принципов моделирования нейронных сетей живых организмов, что привело к построению так называемых нейрокомпьютеров. Базовыми элементами нейрокомпьютера являются формальные нейроны, функционирование которых описывается пороговыми функциями, – булевыми, или как показали последующие исследования k-значными [6]. В представленной статье рассматриваются некоторые подходы к решению задачи построения порогового задания k-значной функции.

Переход от операций в булевой области к преобразованиям в k-значной логике соответствует современным тенденциям развития систем связи, а именно увеличению быстродействия и возрастанию объёмов перерабатываемой информации. Поэтому изучение свойств и характеристик различных классов k-значных функций представляется актуальным направлением прикладной дискретной математики. Особый интерес приобретает изучение пороговых k-значных функций, обладающих простотой технической реализации как в существующей, так и в перспективной элементной базе, в частности, в оптической вычислительной среде. В области синтеза пороговые соотношения дают возможность компактно реализовать в арифметической вычислительной среде достаточно сложные в традиционном понимании k-значные функции большого числа переменных.

Определение 1. Булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$, для которой существует линейная форма

$$L(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$$

с вещественными коэффициентами и вещественный порог T такая, что

$$f(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}1,\text{если } \sum_{i=1}^{n}a_ix_i\ge T\\ 0,\text{если } \sum_{i=1}^{n}a_ix_i< T\end{cases},$$

называется пороговой булевой функцией. Вектор $(a_1,\dots,a_n)$ называется вектором структуры.

При инвертировании переменных $x_1,\dots,x_n$ или их перестановке свойство принадлежности функции классу пороговых сохранится. Такое преобразование для булевых функций называется преобразованием однотипности.

Определение 2. Функция k-значной логики $f^k(x_1,\dots,x_n)$, для которой существует линейная форма

$$L(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$$

с вещественными коэффициентами и набор вещественных порогов $b_0,b_1,\dots,b_k$ такие, что для всех $i\in\overline{0,k-1}$ выполняется импликация

$$f^k(x_1,\dots,x_n)=i\Leftrightarrow b_i\le L(x_1,\dots,x_n)<b_{i+1},$$

называется пороговой k-значной функцией.

При переходе в k-значную область понятие однотипности сохраняется с заменой булевой операции инвертирования на k-значное преобразование с помощью стрелки Лукашевича: при преобразовании переменных $x_1,\dots,x_n$ с помощью стрелки Лукашевича или их перестановке свойство принадлежности функции классу пороговых сохранится.

2. ПРОБЛЕМА ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ В БУЛЕВОМ СЛУЧАЕ

К числу важных задач пороговой логики является распознавание принадлежности функции классу пороговых функций и, в случае положительного решения, – нахождение коэффициентов линейной формы и порога. Известно, что, несмотря на простоту формулировки, обе эти задачи оказалась достаточно сложными.

В работе [2] предложен ряд подходов к решению задачи нахождения коэффициентов линейной формы и порога в булевом случае. Данные подходы предполагают нахождение характеристического вектора булевой функции $f(x)$, представленной в базисе {-1,1}.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$, представлена в базисе $\{-1,1\}$. Упорядоченный набор весов $c_0, c_1, \dots, c_n$, где

$$c_i = \sum_{x \in V_2^n} x_i f(x)\,, \quad i = \overline{1,n}$$

$$c_0 = \sum_{x \in V_2^n} f(x),$$

называется характеристическим вектором с функции $f(x)$.

Определение 4. Будем говорить, что линейная форма

$L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + +a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

дает чистое разделение областей значений функции $f^k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, если для любого $i = \overline{0, k-2}$ выполняется строгое неравенство

$$\max_{f^k(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=i} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} < \min_{f^k(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=i+1} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\}.$$

В случае если построенная с помощью коэффициентов линейная форма дает чистое разделение областей значений функции $f^k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, границы $b_0, b_1, \dots, b_k$ можно определить, например, следующим способом:

$$b_i = \min_{f^k(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=i} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\},\ i = \overline{0, k-1};$$

$$b_k = \max_{f^k(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=k} \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} + 1.$$

В работе [2] коэффициенты характеристического вектора используются в качестве модели первого приближения для коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ искомого порогового задания

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$$

булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ как $a_i \approx c_i$. Но коэффициенты характеристического вектора не всегда точно аппроксимируют коэффициенты искомого порогового задания. Покажем это на двух примерах.

Для удобства изложения рассмотрим коэффициенты, характеризующие число знакоперемен по направлению соответствующей переменной x_i, которые эквивалентны коэффициентам характеристического вектора, но в отличие от них не требуют перехода в базис {-1,1}. Число знакоперемен для пороговой функции в точности равно числу ребер, на концах которых функция принимает разные значения.

Определение 5. Числом знакоперемен по переменной x_i, $(i = \overline{1,n})$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется

$$\sigma_i = \sum_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1} \dots x_n) - $$
$$- f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Легко показать, что коэффициенты $c_1, \dots, c_n$ характеристического вектора функции в базисе {-1,1} и коэффициенты $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, характеризующие число знакоперемен в базисе {0,1} эквивалентны и имеют соотношение

$$c_i = \frac{\sigma_i}{2}, i = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим несколько примеров использования числа знакоперемен для нахождения коэффициентов разделяющей плоскости.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ 0, & \text{если } x_1 + x_2 + 2x_3 < 3' \end{cases}$$

заданную геометрически на Рис. 1.

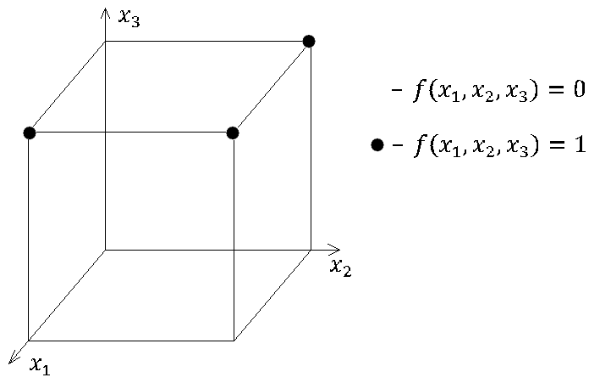

Рисунок 1. Функция $f(x_1, x_2, x_3)$.

Для данной функции $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 1,\ \sigma_3 = 3.$

Подставив $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в качестве коэффициентов разделяющей плоскости, получаем линейную форму $L(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 3x_3$, для которой выполняется неравенство

$$3 = \max_{f(x_1,x_2,x_3)=0} \{x_1 + x_2 + 3x_3\} < \min_{f(x_1,x_2,x_3)=1} \{x_1 + x_2 + 3x_3\} = 4.$$

Таким образом, функция $f(x_1, x_2, x_3)$ реализуется пороговой функцией и в качестве коэффициентов a_1, a_2, a_3 искомого порогового задания можно использовать числа знакоперемен $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Следующий пример показывает, что число знакоперемен не всегда точно аппроксимирует коэффициенты искомого порогового задания.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1, & \text{если } 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 \geq 2 \\ 0, & \text{если } 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 < 2 \end{cases},$$

заданную геометрически на Рис. 2.

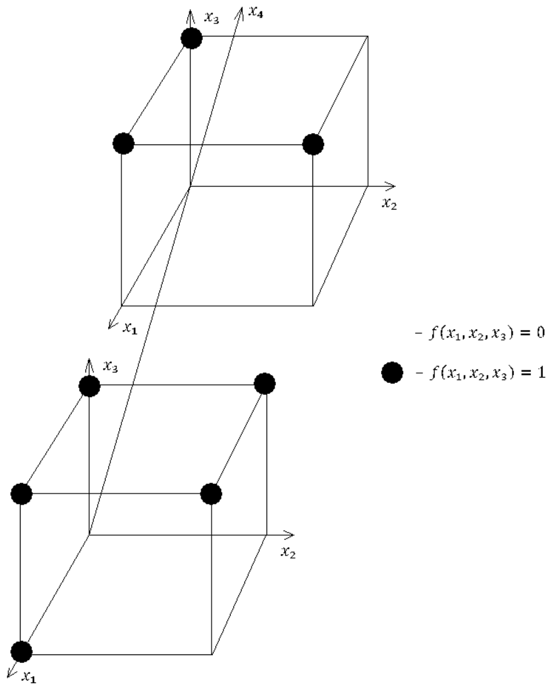

Рисунок 2. Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Для данной функции

$\sigma_1 = 2,\ \sigma_2 = -2,\ \sigma_3 = 6,\ \sigma_4 = -2.$

Подставив числа знакоперемен в качестве коэффициентов разделяющей плоскости, получаем линейную форму

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2x_4,$$

которая не разделяет точки (1,0,0,0) и (0,1,1,1):

$$L(1{,}0{,}0{,}0) = L(0{,}1{,}1{,}1) = 2.$$

Из Примера 2 видно, что число знакоперемен можно использовать в качестве модели первого приближения для коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$, но для получения разделяющей плоскости необходимо провести некоторую процедуру корректирования.

Кроме характеристического вектора и числа знакоперемен для характеризации пороговой булевой функции используются коэффициенты Чоу. Коэффициенты Чоу вычисляются по тем же формулам, что и коэффициенты характеристического вектора (Определение 3), только для функции, представленной в базисе $\{0{,}1\}$ и имеют с ними следующие соотношения:

$$c_0 = 2d_i - 2^n$$

$$c_i = 4\left(d_i - \frac{m_i}{2}\right), i = \overline{1, n},$$

где d_i, $i = \overline{0, n}$ – коэффициенты Чоу.

Коэффициенты характеристического вектора и коэффициенты Чоу в одинаковой степени содержат информацию о принадлежности булевой функции классу пороговых функций. Чоу принадлежат две соответствующие теоремы.

Первая теорема Чоу. Если коэффициенты Чоу у двух функций равны, то либо они обе принадлежат классу пороговых функций, либо обе ему не принадлежат.

Вторая теорема Чоу. Если коэффициенты Чоу у двух функций равны и одна из них принадлежит классу пороговых функций, то эти функции равны.

Коэффициенты Чоу, как и коэффициенты характеристического вектора и число знакоперемен, могут быть использованы для первого приближения в поиске коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ искомого порогового задания

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$$

булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$. В работе [2] изложено несколько итеративных алгоритмов вычисления коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ с помощью коэффициентов $b_1, \dots, b_n$ характеристического вектора функции: метод минимизации функционала [2, глава 3] и итеративный метод синтеза порогового элемента [2, глава 4]. Таким образом, задача нахождения параметров пороговой булевой функции является объективно более сложной математической задачей, чем задача определение принадлежности функции классу пороговых функций, и сводится к итеративной процедуре.

3. НАХОЖДЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ k-ЗНАЧНЫХ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вопрос построения порогового представления k-значной пороговой функции. Число знакоперемен в булевом случае можно трактовать как меру близости функций $f^k(x_1, \dots, x_n)$ и $x_i, i \in \overline{1,n}$. Переход в k-значную область ставит первый важный вопрос о возможных вариантах трактовки близости или отличия двух k-значных функций, а в случае нахождения аналитического представления k-значных функций – её близости к функциям x_i. Можно предложить несколько таких трактовок.

Определение 6. Мультипликативным коэффициентом переменной x_i функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$ называется

$$\xi_{x_i} = \sum_{(x_1,\dots,x_n)} x_i \cdot f^k(x_1, \dots, x_n).$$

Определение 7. Разностным коэффициентом переменной x_i функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$ называется

$$\eta_{x_i} = \sum_{(x_1,\dots,x_n)} |x_i - f^k(x_1, \dots, x_n)|.$$

Определение 8. Квадратичным коэффициентом переменной x_i функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$ называется

$$\delta_{x_i} = \sum_{(x_1,\dots,x_n)} \left(x_i - f^k(x_1, \dots, x_n)\right)^2.$$

Определение 9. Коэффициентом роста по переменной x_i функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$ называется

$$\Delta_{x_i} = \sum_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)} \sum_{\varepsilon=0}^{k-2} \Big(f^k(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon + 1, x_{i+1}, \dots, x_n) -$$
$$- f^k(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n)\Big).$$

Определение 10. Коэффициентом возрастания по переменной x_i функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$ называется

$$\lambda_{x_i} = \sum_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)} \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1} \Big(f^k(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon + 1, x_{i+1}, \dots, x_n) -$$
$$- f^k(x_1, \dots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \dots, x_n)\Big).$$

Изучение этих коэффициентов позволяют заключить, что все они характеризуют меру близости функции f^k к x_i и поэтому они введены и будут рассматриваться далее.

Для некоторых пороговых k-значных функций коэффициенты роста и возрастания приводят к прямому нахождению коэффициентов $a_1, \dots, a_n$. Рассмотрим пример.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f^3(x_1, x_2, x_3)\colon \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$, задающуюся линейной формой $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$ и системой порогов следующим образом:

$$f^3(x_1, x_2, x_3) = 0 \iff 0 \le L(x_1, x_2, x_3) < 5$$

$$f^3(x_1, x_2, x_3) = 1 \iff 5 \le L(x_1, x_2, x_3) < 8$$

$$f^3(x_1, x_2, x_3) = 2 \iff 8 \le L(x_1, x_2, x_3) < 13$$

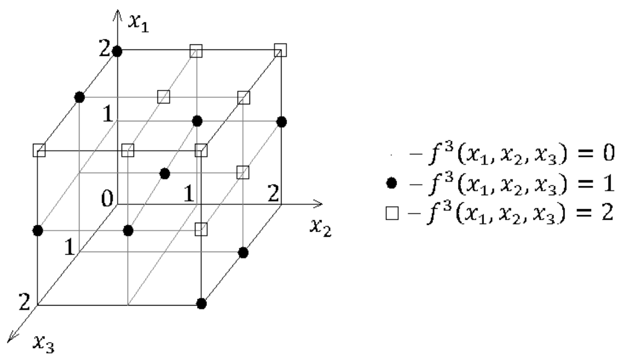

Рисунок 3. Функция $f^3(x_1, x_2, x_3)$.

Вычислим для данной функции введённые выше коэффициенты:

1. Мультипликативные коэффициенты равны: $\xi_{x_1} = 41$, $\xi_{x_2} = 35$, $\xi_{x_3} = 31$.

2. Разностные коэффициенты равны: $\eta_{x_1} = 8$, $\eta_{x_1} = 16$, $\eta_{x_3} = 20$.

3. Квадратичные коэффициенты равны: $\delta_{x_1} = 8$, $\delta_{x_2} = 20$, $\delta_{x_3} = 28$.

4. Коэффициенты роста равны: $\Delta_{x_1} = 14, \Delta_{x_2} = 8, \Delta_{x_3} = 4$.

5. Коэффициенты возрастания равны: $\lambda_{x_1} = 28, \lambda_{x_2} = 16, \lambda_{x_3} = 8$.

Из представленных 5 наборов коэффициентов лишь два набора дают разделяющую плоскость – это коэффициенты роста и коэффициенты возрастания.

Действительно, подставив коэффициенты роста $\Delta_{x_1} = 14, \Delta_{x_2} = 8, \Delta_{x_3} = 4$ в линейную форму $L`(x_1, x_2) = 14x_1 + 8x_2 + 4x_3$ получаем чистое разделение областей значений функции $f^3(x_1, x_2, x_3)$. Вычислив границы $b_0 = 0$, $b_1 = 20$, $b_2 = 34$, $b_3 = 53$, приведенным выше способом, получим реализацию функции $f^3(x_1, x_2, x_3)$:

$$f^3(x_1,x_2,x_3) = 0 \Leftrightarrow 0 \le L`(x_1,x_2,x_3) < 20$$

$$f^3(x_1,x_2,x_3) = 1 \Leftrightarrow 20 \le L`(x_1,x_2,x_3) < 34$$

$$f^3(x_1,x_2,x_3) = 2 \Leftrightarrow 34 \le L`(x_1,x_2,x_3) < 53.$$

Подставив коэффициенты возрастания $\lambda_{x_1} = 28$, $\lambda_{x_2} = 16$, $\lambda_{x_3} = 8$, в линейную форму $L``(x_1, x_2) = 28x_1 + 16x_2 + 8x_3$ получаем чистое разделение областей значений функции $f^3(x_1, x_2, x_3)$. Вычислив границы $b_0 = 0$, $b_1 = 40$, $b_2 = 68$, $b_3 = 103$, приведенным выше способом, получаем реализацию функции $f^3(x_1, x_2, x_3)$:

$$f^3(x_1,x_2,x_3) = 0 \Leftrightarrow 0 \le L``(x_1,x_2,x_3) < 40$$

$$f^3(x_1,x_2,x_3) = 1 \Leftrightarrow 40 \le L``(x_1,x_2,x_3) < 68$$

$$f^3(x_1,x_2,x_3) = 2 \Leftrightarrow 68 \le L``(x_1,x_2,x_3) < 103.$$

В то же время мультипликативные, разностные и квадратичные коэффициенты не дают построение разделяющей плоскости. В дальнейшем будем рассматривать только коэффициенты роста и возрастания.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РОСТА И ВОЗРАСТАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОРОГОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ K-ЗНАЧНОЙ ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ

Использование коэффициентов роста не всегда приводит к непосредственному нахождению коэффициентов $a_1, \dots, a_n$.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f^4(x_1, x_2)\colon \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$, задающуюся линейной формой $L(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$ и системой порогов следующим образом:

$$f^4(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow 0 \le L(x_1,x_2) < 6$$

$$f^4(x_1,x_2) = 1 \Leftrightarrow 6 \le L(x_1,x_2) < 11$$

$$f^4(x_1,x_2) = 2 \Leftrightarrow 11 \le L(x_1,x_2) < 17$$

$$f^4(x_1,x_2) = 3 \Leftrightarrow 17 \le L(x_1,x_2).$$

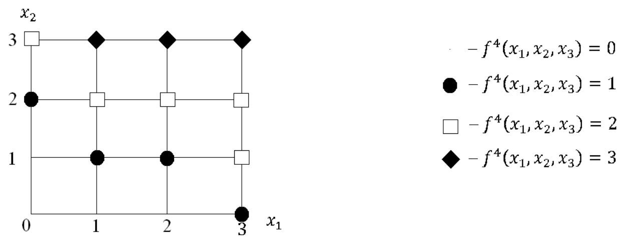

Рисунок 4. Функция $f^4(x_1, x_2)$.

Вычислим для данной функции коэффициенты роста и возрастания:

1. Коэффициенты роста равны:

$\Delta_{x_1} = 5, \Delta_{x_2} = 10$.

2. Коэффициенты возрастания равны:

$\lambda_{x_1} = 15, \lambda_{x_2} = 33$.

Полученная с помощью коэффициентов роста $\Delta_{x_1} = 5$, $\Delta_{x_2} = 10$ линейная форма $L`(x_1, x_2) = 5x_1 + 10x_2$ не дает чистое разделение областей значений функции $f^4(x_1, x_2)$:

$$\max_{f^4(x_1,x_2)=2}\{5x_1 + 10x_2\} = L`(3,2) = 35 =$$

$$= L`(1,3) = \min_{f^4(x_1,x_2)=3}\{5x_1 + 10x_2\}.$$

Подставив коэффициенты возрастания $\lambda_{x_1} = 15$ и $\lambda_{x_1} = 33$ в линейную форму $L``(x_1, x_2) = 15x_1 + 33x_2$ получаем чистое разделение областей значений функции $f^3(x_1, x_2)$. Вычислив границы

$b_0 = 0$, $b_1 = 45$, $b_2 = 78$, $b_3 = 114, b_4 = 145$, приведенным выше способом, получаем реализацию функции $f^3(x_1, x_2)$:

$$f^4(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow 0 \le L``(x_1,x_2) < 45$$

$$f^4(x_1,x_2) = 1 \Leftrightarrow 45 \le L``(x_1,x_2) < 78$$

$$f^4(x_1,x_2) = 2 \Leftrightarrow 78 \le L``(x_1,x_2) < 114$$

$$f^4(x_1,x_2) = 3 \Leftrightarrow 114 \le L``(x_1,x_2) < 145.$$

Таким образом, линейная форма, построенная с помощью коэффициентов роста, не всегда дает чистое разделение областей значений функции. На основании примера можно заключить, что при нахождении линейной формы предпочтение стоит отдать использованию коэффициентов возрастания, которые дают более точное приближение коэффициентов линейной формы.

Следующий пример показывает, что и коэффициенты возрастания не всегда дают чистое разделение областей значений функции. Такое замечание следует признать ожидаемым т.к. в более простом – булевом – случае подобная задача решается итеративно.

Пример 5. Рассмотрим функцию $f^4(x_1,x_2)\colon \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$, задающуюся линейной формой $L(x_1,x_2) = 5x_1 + x_2$ и системой порогов следующим образом:

$$f^4(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow 0 \le L(x_1,x_2) < 15{,}5$$

$$f^4(x_1,x_2) = 1 \Leftrightarrow 15{,}5 \le L(x_1,x_2) < 16{,}5$$

$$f^4(x_1,x_2) = 2 \Leftrightarrow 16{,}5 \le L(x_1,x_2) < 17{,}5$$

$$f^4(x_1,x_2) = 3 \Leftrightarrow 17{,}5 \le L(x_1,x_2).$$

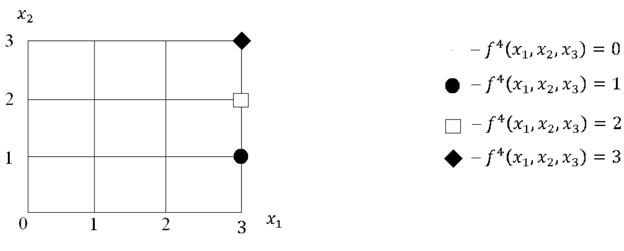

Рисунок 5. Функция $f^4(x_1,x_2)$.

Вычислим для данной функции коэффициенты роста и возрастания:

1. Коэффициенты роста равны:
$\Delta_{x_1} = 6, \Delta_{x_2} = 3.$

2. Коэффициенты возрастания равны:
$\lambda_{x_1} = 18, \lambda_{x_2} = 10.$

Полученная с помощью коэффициентов роста $\Delta_{x_1} = 6$, $\Delta_{x_2} = 3$ линейная форма $L`(x_1,x_2) = 6x_1 + 3x_2$ не дает чистое разделение областей значений функции $f^4(x_1,x_2)$:

$$\min_{f^4(x_1,x_2)=1}\{6x_1 + 3x_2\} = L`(3,1) = 21 =$$
$$= L`(2,3) = \max_{f^4(x_1,x_2)=0}\{6x_1 + 3x_2\}.$$

Полученная с помощью коэффициентов возрастания $\lambda_{x_1} = 18$ и $\lambda_{x_1} = 10$ линейная форма $L``(x_1,x_2) = 18x_1 + 10x_2$ также не дает чистое разделение областей значений функции $f^4(x_1,x_2)$:

$$\min_{f^4(x_1,x_2)=1}\{18x_1 + 10x_2\} = L`(3,1) = 64 < 66 = L`(2,3) =$$
$$= \max_{f^4(x_1,x_2)=0}\{18x_1 + 10x_2\}.$$

Таким образом, среди предложенных вариантов трактовки близости или отличия двух k-значных функций для характеризации пороговых функций можно выделить коэффициенты возрастания. При этом аналогично булевому случаю подтверждается предположение о необходимости введения итеративной процедуры для нахождения коэффициентов линейной формы.

5. ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

В Примере 5 можно увидеть необходимость введения итеративной процедуры для нахождения коэффициентов линейной формы. На идейном уровне такая процедура может быть изложена следующим образом.

Предположим, что некоторая линейная форма $L(x_1, \dots, x_n)$, построенная с помощью коэффициентов роста, не даёт чистое разделение областей значений функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$, то есть существует $i \in \overline{0, k-2}$ такое, что выполняется неравенство

$$\max_{f^k(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=i}\{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\} \ge$$
$$\ge \min_{f^k(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=i+1}\{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n\}.$$

Рассмотрим точки

$$A = (u_1, \dots, u_n) \in M_i = \{x: f(x) = i\} \text{ и}$$

$$B = (v_1, \dots, v_n) \in M_{i+1} = \{x: f(x) = i+1\},$$

такие, что линейная форма $L(x_1, \dots, x_n)$ принимает на них максимальное значение из множества M_i и минимальное значение из множества M_{i+1} соответственно. Заметим, что таких точек может быть несколько. Для них выполняется неравенство

$$L(A) \geq L(B).$$

Уравнение $L(x_1, \dots, x_n) = b, \quad b \in \mathbb{R}$ задает гиперплоскость, рассекающую n-мерный куб.

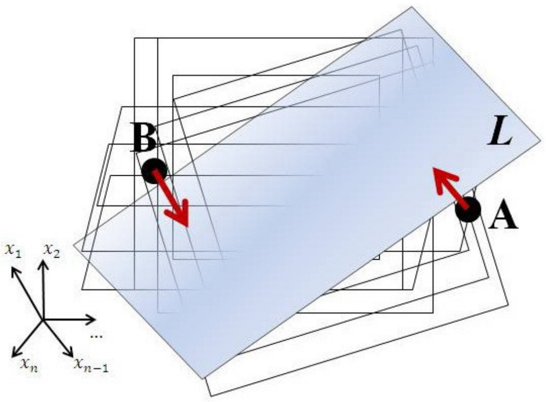

Рисунок. 6.

Алгоритм корректировки должен наклонить множество гиперплоскоскостей, задающихся линейной формой $L(x_1, \dots, x_n)$ так, чтобы при смещении гиперплоскость отсекала точки A и B в другом порядке, чем до корректировки.

Отклонение «в нужную сторону» можно обеспечить прибавлением к линейной форме $L(x_1, \dots, x_n)$ двух линейных форм, соответствующих двум рассматриваемым точкам A и B. Линейные формы образованы координатами точек и берутся с разными знаками: в первую линейную форму подставляются координаты точки B, во вторую – координаты точки A с отрицательными знаками.

$$L'(x_1, \dots, x_n) = L(x_1, \dots, x_n) + v_1 x_1 + \cdots$$

$$\cdots + v_n x_n - u_1 x_1 - \cdots - u_n x_n$$

Для новой линейной формы $L'(x_1, \dots, x_n)$ подсчитываются её значения на множествах

$$M_i = \{x: f(x) = i\}, \quad i \in \overline{0, k-1},$$

и определяется, даёт ли она чистое разделение областей значений функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$. В случае, если нет, то процедура повторяется. Если же после корректировки линейная форма даёт чистое разделение областей значений функции $f^k(x_1, \dots, x_n)$, то алгоритм заканчивает работу: коэффициенты линейной формы найдены.

Возможно, что в случае зацикливания алгоритма необходимо будет прибавлять корректирующие линейные формы с коэффициентами меньшими единицы:

$$L'(x_1, \dots, x_n) = L(x_1, \dots, x_n) + c_1(v_1 x_1 + \cdots$$

$$\cdots + v_n x_n) - c_2(u_1 x_1 - \cdots - u_n x_n)$$

Пример 6. Рассмотрим коррекцию линейной формы

$$L(x_1, x_2) = 18x_1 + 10x_2,$$

полученной с помощью коэффициентов возрастания в Примере 5. Чистому разделению мешают точки (3,1) и (2,3). Прибавим соответствующие линейные формы:

$$L(x_1, x_2) = 18x_1 + 10x_2 + 3x_1 + 1x_2 - 2x_1 - 3x_2 = 19x_1 + 8x_2.$$

Полученная линейная форма дает чистое разделение областей значений функции $f^4(x_1, x_2)$ и исправляет нарушение разделения в корректируемых точках:

$$\min_{f^4(x_1, x_2)=1} \{19x_1 + 8x_2\} = L`(3,1) = 65 > 62 = L`(2,3) =$$

$$= \max_{f^4(x_1, x_2)=0} \{19x_1 + 8x_2\}.$$

В заключение необходимо отметить, что с теоретической точки зрения задача нахождения порогового представления k-значной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ сводится к решению системы неравенств, вообще говоря, двухсторонних для каждого значения i вида:

$$b_i \leq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n < b_{i+1},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – известные координаты векторов, на которых функция принимает соответствующие значения, а параметры $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_k$ – неизвестные. Для решения системы такого вида применим полиномиальный алгоритм Хачияна [7], что обеспечивает принципиальное решение рассматриваемой задачи. Однако высокая вычислительная сложность и большое число необходимых операций алгоритма Хачияна оставляет актуальным поиск прямых конструктивных путей решения данной задачи, в частности тех, которые изложены в данной статье.

Список литературы:

1. Бутаков Е.А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. Москва, Энергия. 1970.
2. Дертоузос М. Пороговая логика. Москва, Мир. 1967.
3. Зуев А.Ю. Пороговые функции и пороговые представления булевых функций. // «Математические вопросы кибернетики», выпуск 5, 1994 г.
4. Никонов В.Г. Пороговые представления булевых функций // «Обозрение прикладной и промышленной математики», 1994, Т. 1, вып. 3.
5. Никонов В.Г., Никонов Н.В. Особенности пороговых представлений k-значных функций // «Труды по дискретной математике», 2008, Т. 11.
6. Вальцев В.Б., Григорьев В.Р., Никонов В.Г. Некоторые структурные принципы организации высших функций мозга // «Нейрокомпьютер как основа мыслящих ЭВМ. - М.: Наука, 1993.
7. Хачиян Л.Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1980, Т 20.
8. Золотых Н.Ю. Расшифровка пороговой функции, заданной расширенным оракулом// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2012, №3(1).