А. Д. Яшин, О новой константе в интуиционистской логике высказываний, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1999, том 5, выпуск 3, 903–926

О новой константе в интуиционистской логике высказываний

А. Д. ЯШИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.12

Ключевые слова: интуиционистская логика, новая константа, полнота по Новикову.

Аннотация

Дана классификация полных по Новикову расширений интуиционистской логики высказываний в языке с одной дополнительной константой. Доказана разрешимость массовой проблемы консервативности исчислений в этом языке над обычным интуиционистским пропозициональным исчислением.

Abstract

A. D. Yashin, On a new constant in intuitionistic propositional logic, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 3, p. 903–926.

The classification theorem for the family of all Novikov complete extensions of the intuitionistic propositional logic in the language containing a single additional constant is proved. The algorithmic problem of the conservativeness of calculi in this enriched language over intuitionistic propositional logic is established to be decidable.

Введение

Задача о новой интуиционистской логической константе была поставлена академиком П. С. Новиковым в конце 50-х годов следующим образом.

Обозначим через $\mathcal{L}$ язык интуиционистской логики высказываний: $\mathcal{L}$ содержит множество пропозициональных переменных $\mathrm{VAR} = \{p_i, q_j, \dots\}$, логические связки $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$, $\leftrightarrow$, стандартные константы 0 (ложь) и 1 (истина). Формулы языка $\mathcal{L}$ строятся обычным образом из переменных и констант с помощью логических связок. Через Int обозначаем интуиционистскую логику высказываний.

Добавив к $\mathcal{L}$ пропозициональную константу φ, получим расширенный φ-язык. Класс формул естественным образом расширяется. Формулы расширенного языка, не содержащие φ, называются *чистыми*. *Явным соотношением* называем формулу вида $\varphi \leftrightarrow B$, где B чистая.

φ-логикой называем произвольное множество формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens. φ-логика L называется *консервативной* (над Int), если для любой чистой формулы B выполнено $B \in L \Rightarrow B \in \mathrm{Int}$. Через $L + \Gamma$ обозначается, как обычно, наименьшая φ-логика, включающая φ-логику L и множество формул Γ.

Определение 1 (П. С. Новиков, см. [1, 2]). φ-логика L *определяет новую интуиционистскую логическую константу*, если L консервативна над Int и для любой чистой формулы B φ-логика $L + \varphi \leftrightarrow B$ неконсервативна над Int (иначе говоря, L *не допускает присоединения* явных соотношений).

Определение 2 (П. С. Новиков, см. [1, 2]). Консервативная φ-логика L называется *полной* по Новикову, если для любой формулы $A \notin L$ φ-логика $L + A$ неконсервативна (другими словами, L не допускает присоединения никакой новой формулы).

Первый пример φ-логики, удовлетворяющей определению 1, найден Я. С. Сметаничем [1, 2]: $\mathrm{Sm} = \mathrm{Int} + \neg\neg\varphi + \varphi \to (p \vee \neg p)$. Свойства Sm исследованы в [13].

Проблема Новикова формулируется следующим образом: привести пример полной φ-логики с новой константой (проблема-минимум); дать описание всего семейства полных по Новикову φ-логик и выяснить, какие из них удовлетворяют определению 1 (проблема-максимум).

Решение проблемы-минимум анонсировано в [14]: φ-логика Сметанича Sm имеет единственное полное по Новикову расширение.

В настоящей работе получены следующие результаты:

• дано явное описание семейства полных по Новикову φ-логик:

$$L^1, L^2, L^3, L^5, \ldots, L^{2n+1}, \ldots, L^\infty;$$

• L^1 и L^2 содержат явные соотношения, остальные φ-логики удовлетворяют определению 1;

• все φ-логики указанного семейства разрешимы;

• алгоритмическая проблема консервативности φ-логик вида $\mathrm{Int} + A$ над Int разрешима.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе излагаются необходимые для дальнейшего понятия и результаты из метаматематики интуиционистской логики высказываний. Все они либо являются известными, либо получаются легкой адаптацией соответствующих понятий и результатов из метаматематики модальных логик [3] и алгебраической семантики интуиционистской логики [4, 6].

Шкалой называется непустое частично упорядоченное множество. Наименьший элемент шкалы W (если существует) называется *корнем* и обозначается посредством $\operatorname{root} W$, а сама шкала в этом случае называется *порождённой*.

Подмножество шкалы, замкнутое относительно увеличения, называется *конусом*. Семейство всех конусов шкалы W обозначаем через $\operatorname{Con} W$. Посредством W^x обозначаем множество $\{y \in W \mid y \geqslant x\}$ — конус, *порождённый* точкой $x \in W$. Конус, являющийся объединением конечного числа острых конусов, называем *конечно порождённым* (пустой конус также считаем конечно порождённым).

На $\operatorname{Con} W$ определяются операции $\supset$ и $-$:

$$\begin{aligned} X \supset Y &\rightleftharpoons \{x \in W \mid X \cap W^x \subseteq Y \cap W^x\}, \\ -X &\rightleftharpoons \{x \in W \mid X \cap W^x = \varnothing\}. \end{aligned}$$

Структура $(\operatorname{Con} W, \cap, \cup, \supset, -)$ является примером *псевдобулевой алгебры* (п.б.а. [4]). П.б.а. являются моделями интуиционистской логики высказываний так же, как булевы алгебры — классической двузначной логики.

Известны следующие теоремы о представлении п.б.а. [5, 6].

Всякая п.б.а. изоморфна подалгебре алгебры конусов некоторой шкалы.

Всякая конечная п.б.а. изоморфна алгебре конусов некоторой конечной шкалы.

В связи с этими теоремами широко используется понятие *обобщённой шкалы* — пары $\mu = (W, S)$, где W — шкала, S — семейство конусов, содержащее $\varnothing$ и замкнутое относительно операций $\cap$, $\cup$, $\supset$ (см., например, [7]).

Пусть $(W, S), (W', S')$ — обобщённые шкалы, $W' \in \operatorname{Con} W$ и $S' = \{X \cap W' \mid X \in S\}$. Говорят, что (W', S') *порождена из* (W, S) *конусом* W' и применяют обозначение $(W', S') \subseteq (W, S)$.

Пусть (W, S) и (W', S') — обобщённые шкалы и $h\colon W \to W'$. Функция h называется *p-морфизмом* обобщённых шкал, если выполнены условия

$$\begin{array}{ll} \operatorname{val} h = W' & \text{(сюръективность)}, \\ x \leqslant y \Rightarrow h(x) \leqslant' h(y) & \text{(монотонность)}, \\ h(x) \leqslant' z \Rightarrow \exists y \geqslant x\colon\ h(y) = z & \text{(конусность)}, \\ \forall X \in S'\colon\ h^{-1}(X) \in S & \text{(непрерывность}^*\text{)}. \end{array}$$

Обозначение $h\colon (W, S) \twoheadrightarrow (W', S')$.

$$\begin{aligned} \mu \twoheadrightarrow \mu' &\rightleftharpoons \exists h\colon \mu \twoheadrightarrow \mu', \\ \mu \preceq \eta &\rightleftharpoons \exists \eta' \subseteq \eta\colon\ \eta' \twoheadrightarrow \mu. \end{aligned}$$

Отношение *мажорирования* классов обобщённых шкал определяется следующим образом:

$$\mathbf{M} \preceq \mathbf{N} \rightleftharpoons \forall \mu \in \mathbf{M}\, \exists \eta \in \mathbf{N}\colon\ \mu \preceq \eta.$$

---

*«Прообраз открытого множества открыт».

Оценка на шкале $\mu = (W, S)$ определяется как функция $v\colon \mathrm{VAR} \to S$. *Модель* — пара (μ, v). При этом $v(p)$ называется *значением* переменной p в данной модели.

Значение произвольной формулы в модели определяется по индукции:

$$v(A \wedge B) \rightleftharpoons v(A) \cap v(B), \quad v(A \vee B) \rightleftharpoons v(A) \cup v(B),$$
$$v(A \to B) \rightleftharpoons v(A) \supset v(B), \qquad v(\neg A) \rightleftharpoons -v(A).$$

Вынуждение: $x \models A \rightleftharpoons x \in v(A)$ (при использовании обозначения $x \models A$ из контекста всегда будет ясно, о какой модели идет речь).

Истинность формулы в модели: $(W, S, v) \models A \rightleftharpoons v(A) = W$.

Логика шкалы: $L(\mu) \rightleftharpoons \{A \mid \forall v\ (\mu, v) \models A\}$.

Логика класса шкал: $L(\mathbf{M}) \rightleftharpoons \bigcap\{L(\mu) \mid \mu \in \mathbf{M}\}$.

Интуиционистская логика высказываний: Int — логика класса всех обобщённых шкал.

Замечание. Первоначально Int была определена в виде дедуктивной системы гильбертовского типа. Классические результаты Крипке о семантической полноте Int в классе т. н. *моделей Крипке* позволяют дать эквивалентное определение интуиционистской логики в терминах шкал.

Пусть $\mathbf{H}$ — класс всех конечных порождённых шкал.

Теорема 1.1 (финитная аппроксимируемость Int).

$$\mathrm{Int} = L(\mathbf{H}).$$

Характеристический класс [8]: $\mathrm{char}(\mathbf{M}) \rightleftharpoons L(\mathbf{M}) = \mathrm{Int}$.

Теорема 1.2 (критерий характеристичности класса).

$$\mathrm{char}(\mathbf{M}) \Leftrightarrow \mathbf{H} \preceq \mathbf{M}.$$

Логика: произвольное множество формул, включающее Int и замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens.

Теорема 1.3 (о моделировании). *Любая логика совпадает с логикой некоторого класса обобщённых шкал.*

Формула 2-покрытия:

$$A^{(2)} \rightleftharpoons \neg\neg(p \vee q \vee r) \to \neg\neg(p \vee q) \vee \neg\neg(p \vee r) \vee \neg\neg(q \vee r).$$

Эта формула общезначима в любой шкале с покрытием не более чем из двух элементов и не входит в Int. (Напомним, что пара конусов $X_1, X_2 \in S$ образует *покрытие* обобщённой шкалы (W, S), если $- - (X \cup Y) = W$ и для любого конуса $Z \in S$ для $i = 1, 2$ $Z \subsetneq X_i \Rightarrow Z = X_i$ или $Z = \varnothing$).

2. φ-логики и φ-шкалы

В этом параграфе приводятся без доказательств необходимые сведения из метаматематики φ-логик и φ-шкал (изложение частично опирается на [9]).

Пусть L — консервативная φ-логика и Γ — множество формул. Если $L+\Gamma$ консервативна, то говорим, что Γ *присоединимо* к L.

Формулы, не содержащие переменных, называются *константными*.

Лемма 2.1 (о присоединимости). *Пусть φ-логика L консервативна.*

1. *Γ присоединимо к L тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество $\Gamma' \subseteq \Gamma$ присоединимо к L.*

2. *Формула A неприсоединима к L тогда и только тогда, когда найдутся чистая формула $D \notin \mathrm{Int}$ и подстановки $s_1, \dots, s_n$ в φ-языке, такие что*

$$s_1(A) \wedge \ldots \wedge s_n(A) \to D \in L.$$

3. *Константная формула $\mathcal{E}$ неприсоединима к L тогда и только тогда, когда для некоторой чистой формулы $D \notin \mathrm{Int}$*

$$\mathcal{E} \to D \in L.$$

Обобщённой φ-шкалой называем тройку $\mu = (W, S, \Phi)$, где (W, S) — обобщённая шкала и $\Phi \in S$ — фиксированный конус. При построении моделей константа φ должна интерпретироваться конусом Φ:

$$v(\varphi) = \Phi.$$

Далее на φ-язык естественным образом переносятся понятия истинности, общезначимости. Через $L_\varphi(\mathbf{M})$ обозначаем φ-логику класса $\mathbf{M}$ обобщённых φ-шкал.

Обратим внимание на то, что значение константной формулы $\mathcal{E}$ в данной модели (μ, v) не зависит от оценки переменных, поэтому можно говорить о *значении* этой формулы *в шкале* и применять обозначение $\mu(\mathcal{E}) \rightleftharpoons \{x \in W_\mu \mid x \models \mathcal{E}\}$.

Понятие *порождённой φ-шкалы*, $(W', S', \Phi') \subseteq (W, S, \Phi)$, определяется так: $(W', S') \subseteq (W, S)$ и $\Phi' = \Phi \cap W'$.

Пусть μ' порождена из μ конусом W' и v — оценка на μ. Наследуемая оценка v' на μ' определяется посредством $v'(p) \rightleftharpoons v(p) \cap W'$ для $p \in \mathrm{VAR}$.

Теорема 2.2 (о порождённой φ-модели). *При указанных предположениях для любой формулы A φ-языка*

$$v'(A) = v(A) \cap W'.$$

P_φ-морфизм: $h\colon (W, S, \Phi) \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} (W', S', \Phi') \rightleftharpoons h\colon (W, S) \twoheadrightarrow (W', S')$ и $h^{-1}(\Phi') = \Phi$.

$\mu \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mu' \rightleftharpoons \exists h\colon \mu \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mu'$.

Если v' — оценка на μ' и $h\colon \mu \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mu'$, то прообраз оценки v относительно h определяется посредством $(h^{-1}v)(p) \rightleftharpoons h^{-1}(v'(p))$.

Теорема 2.3 (о p_φ-морфизмах моделей). *При указанных предположениях для любой формулы A φ-языка*

$$(h^{-1}v)(A) = h^{-1}(v'(A)).$$

$\mu \overset{\varphi}{\preceq} \eta \rightleftharpoons \exists \eta' \subseteq \eta\colon\ \eta' \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mu$ (отношение *φ-редуцируемости* шкал).

$\mathbf{M} \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{N} \rightleftharpoons \forall \mu \in \mathbf{M}\, \exists \eta \in \mathbf{N}\colon\ \mu \overset{\varphi}{\preceq} \eta$ (отношение *φ-мажорирования* классов φ-шкал).

Теорема 2.4 (прямая о сравнении φ-логик).

$$\mathbf{M} \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{N} \Rightarrow L_\varphi(\mathbf{N}) \subseteq L_\varphi(\mathbf{M}).$$

Теорема 2.5 (обратная о сравнении φ-логик). *Пусть $\mathbf{F}$ — некоторый класс конечных порождённых шкал. Тогда*

$$L_\varphi(\mathbf{M}) \subseteq L_\varphi(\mathbf{F}) \Rightarrow \mathbf{F} \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{M}.$$

Теорема 2.6 (о моделировании φ-логик). *Для всякой консервативной φ-логики L найдётся характеристический класс $\mathbf{M}$ обобщённых φ-шкал, такой что $L = L_\varphi(\mathbf{M})$.*

Теорема 2.7 (о φ-логиках, определяющих новую константу). *Консервативная φ-логика L определяет новую константу тогда и только тогда, когда найдётся чистая формула $D \notin \mathrm{Int}$, такая что*

$$(\varphi \vee \neg\varphi) \to D \in L.$$

Эта теорема проясняет соответствующее свойство φ-логики Sm, упомянутой во введении.

3. Универсальная φ-шкала

Последовательность *формул Нишимуры* ([10]) определяется по индукции:

$$\mathcal{E}_0 = 0, \quad \mathcal{E}_1 = \neg\varphi, \quad \mathcal{E}_2 = \varphi,$$
$$\mathcal{E}_{2n+1} = \mathcal{E}_{2n-1} \to \mathcal{E}_{2n}, \quad \mathcal{E}_{2n+2} = \mathcal{E}_{2n-1} \vee \mathcal{E}_{2n}, \quad \mathcal{E}_\infty = 1.$$

Эти формулы располагаются в виде диаграммы $\mathbf{E}$ на следующем рисунке:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & \mathcal{E}_1 & & & & \mathcal{E}_5 & & \cdots & \mathcal{E}_{2n-3} & & & & \mathcal{E}_{2n+1} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \cdots & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\mathcal{E}_0 & \to & \mathcal{E}_2 & \to & \mathcal{E}_4 & \to & \mathcal{E}_6 & \to & \cdots & \mathcal{E}_{2n-2} & \to & \mathcal{E}_{2n} & \to & \mathcal{E}_{2n+2} & \to & \cdots\ \mathcal{E}_\infty \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \cdots & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & \mathcal{E}_3 & & & & \cdots & & & \mathcal{E}_{2n-1} & & & &
\end{array}$$

Необходимые сведения о формулах Нишимуры приводим без доказательств.

Лемма 3.1. *Пусть L — произвольная φ-логика. Тогда*
а) $\mathcal{E}_m \leqslant_{\mathbf{E}} \mathcal{E}_n \Rightarrow \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n \in L$;
б) $(\mathcal{E}_m \wedge \mathcal{E}_n) \leftrightarrow \inf_{\mathbf{E}}\{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n\} \in L$.

Пусть $\mu = (W, S, \Phi)$ и $x \in W$. Определим *индекс* $\mathrm{ind}_\mu(x)$ как наименьшее n, такое что $x \models \mathcal{E}_n$ (наименьшее в смысле естественного упорядочения $0 < 1 < 2 < \ldots < \infty$).

Учитывая, что все формулы Нишимуры с четными номерами $\geqslant 4$ являются дизъюнкциями формул с меньшими номерами, видим, что индекс может принимать значения из множества

$$N = \{1, 2, 3, 5, 7, \ldots, 2n+1, \ldots, \infty\}.$$

Лемма 3.2 (об индексах). *Пусть* $\mu = (W, S, \Phi)$ *и* $x \in W$.

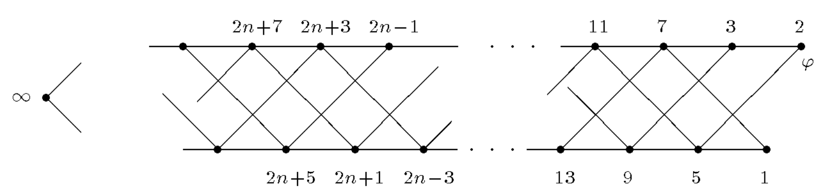
1. $\mathrm{ind}(x) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \exists y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) = 2, \\ \forall y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) \neq 1. \end{cases}$

2. $\mathrm{ind}(x) = 5 \Rightarrow \begin{cases} \exists y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) = 1, \\ \exists y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) = 2, \\ \forall y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) \neq 3. \end{cases}$

3. $\mathrm{ind}(x) = 2k+7 \Rightarrow \begin{cases} \exists y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) = 2k+1, \\ \exists y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) = 2k+3, \\ \forall y > x\colon \ \mathrm{ind}(y) \neq 2k+5. \end{cases}$

4. $\mathrm{ind}(x) = \infty \Rightarrow$ *для любого конечного индекса* m *найдётся точка* $y > x$, *такая что* $\mathrm{ind}(y) = m$.

В соответствии с леммой об индексах множество N упорядочивается так, как показано на следующем рисунке, при этом $\mathrm{root}\, N = \infty$ (из типографских соображений расположение горизонтальное):



Универсальная φ-шкала $\mathcal{N}$

Превратим N в φ-шкалу, полагая

$$\mathcal{N} \rightleftharpoons (N, \{2\}).$$

Лемма 3.3 (об универсальной φ-шкале). *Для любого* $n \in \mathcal{N}$

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{N}}(n) = n.$$

В дальнейшем буквами α, β, γ будем обозначать индексы.

4. Шкалы с наростами

Пусть F — конечная шкала, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество её максимальных элементов, W — произвольная шкала. Строим шкалу $F[W]$, располагая над каждым a_i экземпляр шкалы W. Формально:

$$\begin{aligned} F[W] &\rightleftharpoons F \times \{0\} \cup W \times \{1, \dots, n\}; \\ (x,k) <_{F[W]} (y,m) &\rightleftharpoons (k = m = 0 \,\&x <_F y) \text{ или} \\ &\quad\ (0 < k = m \leqslant n \,\&\, x <_W y) \text{ или} \\ &\quad\ (k = 0 \,\&\, 0 < m \leqslant n \,\&\, x \leqslant_F a_m). \end{aligned}$$

При этом все конусы считаются допустимыми, т. е. $F[W]$ трактуется как обыкновенная шкала. $F \times \{0\}$ можно назвать *основой*, $W \times \{i\}$ — *i-м наростом.*

Определим отображение $\mathrm{pr}\colon F[W] \to F$ по правилу

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}(x,0) &\rightleftharpoons x, \\ \mathrm{pr}(x,m) &\rightleftharpoons a_m \text{ для } 1 \leqslant m \leqslant n. \end{aligned}$$

Лемма 4.1. $\mathrm{pr}\colon F[W] \twoheadrightarrow F$.

Пусть $\mathcal{W} = (W, \Phi)$ — φ-шкала. Тогда $F[W]$ естественным образом превращается в φ-шкалу:

$$F[\mathcal{W}] \rightleftharpoons (F[W], \Phi \times \{1, \dots, n\}).$$

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{W}$ — порождённая φ-шкала и* $\mathrm{root}\, W \notin \Phi$. *Тогда*

$$F[\mathcal{W}] \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{W}.$$

Доказательство. Искомый p_φ-морфизм можно определить так:

$$\begin{aligned} f(x,0) &\rightleftharpoons \mathrm{root}\, W, \\ f(x,m) &\rightleftharpoons x \text{ для } 1 \leqslant m \leqslant n. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Следствие 4.3. *В условиях предыдущей леммы в $\mathcal{W}$ и в $F[\mathcal{W}]$ истинны одни и те же константные формулы.*

5. φ-логики L^α

Напомним, что через $\mathbf{H}$ обозначается класс всех конечных порождённых шкал.

Для каждого индекса $\alpha \geqslant 3$ положим

$$\mathbf{H}[\mathcal{N}^\alpha] \rightleftharpoons \{F[\mathcal{N}^\alpha] \mid F \in \mathbf{H}\}.$$

Основными объектами дальнейшего изучения будут φ-логики

$$L^\alpha \rightleftharpoons L_\varphi(\mathbf{H}[\mathcal{N}^\alpha]), \quad \alpha = 3, 5, \dots, \infty.$$

Предложение 5.1. *Каждая из указанных φ-логик определяет новую константу по Новикову.*

Доказательство. Из леммы 4.1 следует, что $\mathbf{H}[\mathcal{N}^\alpha]$ — характеристический класс, поэтому L^α консервативная над Int. Далее, легко видеть, что $(\varphi \vee \neg\varphi) \to (p \vee \neg p) \in L^\alpha$. После этого остается применить теорему 2.7. $\blacksquare$

Предложение 5.2. *Для любого конечного индекса* α

$$\mathcal{E}_\alpha \to A^{(2)} \in L^\infty$$

(*здесь* $A^{(2)}$ — *формула 2-покрытия*).

Доказательство. Если $x \in F[\mathcal{N}]$ и $x \models \mathcal{E}_\alpha$, то x находится в некотором наросте. Шкала $\mathcal{N}$ содержит покрытие из двух точек, поэтому $x \models A^{(2)}$. ■

Предложение 5.3. *Пусть* α, β — *конечные индексы и* $\beta \nleqslant_{\mathcal{N}} \alpha$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_\beta \to A^{(2)} \in L^\alpha.$$

Доказательство. В $\mathcal{N}$ имеем $\alpha \not\models \mathcal{E}_\beta$. Поэтому в шкале $F[\mathcal{N}^\alpha]$ формула $\mathcal{E}_\beta$ истинна только в точках наростов. Как и в предыдущем предложении, $\mathcal{N}^\alpha$ содержит покрытие из двух точек. ■

Предложение 5.4. $\mathcal{E}_a \in L^\alpha$.

Доказательство. По следствию 4.3 и теореме об универсальной φ-шкале. ■

Теорема 5.5. *Если* $\alpha \neq \beta$, *то* L^α *и* L^β *несовместимы.*

Доказательство. Если α, β — конечные индексы, то либо $\alpha \nleqslant_{\mathcal{N}} \beta$, либо $\beta \nleqslant_{\mathcal{N}} \alpha$. Пусть, например, $\beta \nleqslant_{\mathcal{N}} \alpha$. По предложению 5.3 $\mathcal{E}_\beta \to A^{(2)} \in L^\alpha$. По предложению 5.4 $\mathcal{E}_\beta \in L^\beta$. В объединении рассматриваемых логик выводима чистая формула $A^{(2)}$.

Если β конечен и $\alpha = \infty$, то по предложению 5.4 $\mathcal{E}_b \in L^\beta$, по предложению 5.2 $\mathcal{E}_\beta \to A^{(2)} \in L^\infty$, и снова в объединении указанных логик выводима $A^{(2)}$. ■

Для исследовании φ-логики L^∞ нам понадобится видоизменённая семантическая характеризация.

Обозначим посредством $F\{\mathcal{N}\}$ *обобщённую* φ-шкалу, носителем которой является $F[\mathcal{N}]$, а допустимыми конусами считаются все конечно порождённые конусы и только они. Разумеется, надо проверить, что указанные конусы образуют подалгебру.

Предложение 5.6. *Семейство конечно порождённых конусов шкалы* $F[\mathcal{N}]$ *содержит* $\varnothing$, Φ *и замкнуто относительно* $\cap$, $\cup$, $\supset$.

Доказательство. $\varnothing$ по определению считается конечно порожденным конусом. Далее, $\Phi = \{2\} \times \{1, \dots, n\}$ конечно порождён (напомним, что n — количество максимальных элементов шкалы F).

Для доказательства замкнутости относительно п.б. операций заметим, что конечно порождённые конусы шкалы $F[\mathcal{N}]$ характеризуются условием

$$\forall m \leqslant n \colon\ (\forall \alpha < \infty\, (\alpha, m) \in X) \Rightarrow (\infty, m) \in X. \qquad (*)$$

Предположим, что конусы X, Y удовлетворяют $(*)$.

Пусть $(\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in X \cap Y$. Тогда $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in X$ и $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in Y$. По $(*)$ $(\infty,m) \in X$ и $(\infty,m) \in Y$, т. е. $(\infty,m) \in X \cap Y$. Таким образом, $(*)$ выполняется для $X \cap Y$.

Пусть $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in X \cup Y$. Это означает, что по крайней мере один из конусов X, Y неограничен вниз в наросте $\mathcal{N} \times \{m\}$. Пусть это X. Тогда $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in X$, по $(*)$ $(\infty,m) \in X$ и тем более $(\infty,m) \in X \cup Y$.

Пусть $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in X \supset Y$ и $(\infty,m) \notin X \supset Y$. Найдётся $z \geqslant_{F[\mathcal{N}]} (\infty,m)$: $z \in X \,\&\, z \notin Y$. Это возможно только при $z = (\infty,m)$. Имеем $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in X \cap (X \supset Y)$. Поэтому $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,m) \in Y$ и $(\infty,m) \notin Y$, что противоречит условию $(*)$ для Y. ■

Введём обозначение

$$\mathbf{H}\{\mathcal{N}\} \rightleftharpoons \{F\{\mathcal{N}\} \mid F \in \mathbf{H}\}.$$

Лемма 5.7. $L^\infty \subseteq L_\varphi(\mathbf{H}\{\mathcal{N}\})$.

Доказательство. Тождественное отображение $\mathrm{id}\colon F[\mathcal{N}] \to F\{\mathcal{N}\}$ является p_φ-морфизмом. Теперь остается вспомнить прямую теорему о сравнении φ-логик. ■

Для доказательства обратного включения рассмотрим модель $M = (F[\mathcal{N}], \models)$, в которой на оценку $\models$ не накладываются никакие ограничения (кроме, разумеется, монотонности вверх).

Построим модель M', добавив к M новые точки вида $(*,i)$, располагая их непосредственно выше точек вида (∞,i). При этом $(*,i)$ становится «новым корнем» соответствующего нароста.

Оценку $\models'$ на M' определяем так:

$$(*,i) \models' p \rightleftharpoons \forall\alpha < \infty\,(\alpha,i) \models p,$$
$$x \models' p \rightleftharpoons x \models p \text{ для старых точек } x.$$

Лемма 5.8. *Для любой формулы A φ-языка*

$$(*,i) \models' A \Leftrightarrow \forall\alpha < \infty\,(\alpha,i) \models A;$$
$$x \models' A \Leftrightarrow x \models A \ \text{ для старых точек } \ x.$$

Доказательство. Индукция по построению A. Для атомарных формул утверждение следует из определения $\models'$.

Рассмотрим шаг индукции для $A = B \to C$.

Пусть $(*,i) \not\models' B \to C$. Найдётся $y \geqslant' (*,i)$: $y \models' B \,\&\, y \not\models' C$. Если y — старая точка, то по индуктивному предположению в исходной модели имеем $y \models B$, $y \not\models C$, $y > (\infty,i)$, поэтому неверно $\forall\alpha < \infty\,\alpha \models B \to C$.

Если $y = (*,i)$, то $(*,i) \models' B$ и $(*,i) \not\models' C$. По предположению индукции $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,i) \models B$ и $\exists\alpha < \infty\,(\alpha,i) \not\models C$. Следовательно, и в этом случае неверно $\forall\alpha < \infty\,(\alpha,i) \models B \to C$.

Пусть $\exists\alpha < \infty\,(\alpha,i) \not\models B \to C$. Найдётся $\beta \geqslant_{\mathcal{N}} \alpha$, такая что $(\beta,i) \models B$ и $(\beta,i) \not\models C$. Точка (β,i) старая, по предположению индукции $(\beta,i) \models' B$ и

$(\beta, i) \not\models' C$, т. е. $(*, i) \not\models' B \to C$. Таким образом, первое утверждение для $B \to C$ проверено.

Докажем второе утверждение. Пусть x — старая точка.

Допустим, $x \not\models' B \to C$. Найдётся $y \geqslant' x\colon\ y \models' B \,\&\, y \not\models' C$. Если y — старая точка, то в исходной модели имеем $x \leqslant y$, по предположению индукции $y \models B$ и $y \not\models C$. Поэтому $x \not\models B \to C$. Если $y = (*, i)$, то $(*, i) \models' B$ и $(*, i) \not\models' C$. По индуктивному предположению $\forall \alpha < \infty\, (\alpha, i) \models B$ и $\exists \alpha < \infty\, (\alpha, i) \not\models C$, т. е. найдётся старая точка вида (α, i), в которой $(\alpha, i) \models B$ и $(\alpha, i) \not\models C$. Имеем $x < (\alpha, i)$, поэтому $x \not\models B \to C$.

Допустим, $x \not\models B \to C$, т. е. найдётся $y \geqslant x$, такая что $y \models B$ и $y \not\models C$. Эти точки в таком же расположении есть в новой модели. По индуктивному предположению $y \models' B$ и $y \not\models' C$, поэтому $x \not\models' B \to C$.

Шаги для $\wedge$ и $\vee$ разбираются очевидным образом. ∎

С помощью двух предыдущих лемм получаем

Следствие 5.9. $L^\infty = L_\varphi(\mathbf{H}\{\mathcal{N}\})$.

Доказательство. Если $A \notin L^\infty$, то A опровергается в некоторой модели вида $M = (F[\mathcal{N}], \models)$. По предыдущей лемме A опровергается в модели M', причём в новой модели значение любой атомарной формулы является конечно порождённым конусом. Поэтому $A \notin L_\varphi(\mathbf{H}\{\mathcal{N}\})$. ∎

Для любого конечного индекса α φ-логика L^α по определению является финитно аппроксимируемой, что облегчает доказательство её разрешимости. Для $\alpha = \infty$ дело обстоит не так.

Предложение 5.10. *φ-логика L^∞ не является финитно аппроксимируемой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — конечная порождённая φ-шкала и $\mathcal{F} \models L^\infty$. Другими словами, $L_\varphi(\mathbf{H}[\mathcal{N}]) \subseteq L_\varphi(\mathcal{F})$. По обратной теореме сравнения φ-логик $\mathcal{F}$ является φ-редуктом некоторой шкалы вида $G[\mathcal{N}]$. Учитывая бесконечность и φ-несжимаемость $\mathcal{N}$, видим, что $\mathcal{F} \simeq \mathcal{N}^\alpha$ для некоторого конечного α. Следовательно, $\mathcal{F} \models A^{(2)}$ (формула 2-покрытия). Однако $A^{(2)} \notin L^\infty$. ∎

6. Основные леммы и их следствия

Основная лемма 1. *Фиксируем конечный индекс $\alpha \geqslant 3$. Пусть*

1) $\mathrm{char}(\mathbf{M})$;

2) $\mathbf{M} \models \mathcal{E}_\alpha$;

3) $\mathbf{M} \models \mathcal{E}_a \to D$ *для некоторой чистой* $D \notin \mathrm{Int}$.

Тогда $\mathbf{H}[\mathcal{N}^\alpha] \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{M}$.

Основная лемма 2. *Фиксируем чистую формулу $D \notin \mathrm{Int}$. Пусть*

1) $\mathrm{char}(\mathbf{M})$;

2) $\mathbf{M} \models \mathcal{E}_\alpha \to D$ *для каждого конечного индекса* α.

Тогда $\mathbf{H}\{\mathcal{N}\} \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{M}$.

Доказательства обеих лемм проходят по общей схеме. Символом $*$ обозначим либо α (для первой леммы), либо ∞ (для второй леммы). Встречающиеся различия в рассуждениях будут явно отмечаться.

Пусть F — конечная порождённая шкала с n максимальными элементами.

По теореме о финитной аппроксимируемости Int найдётся конечная порождённая шкала G, такая что $G \not\models D$. Пусть $r = \operatorname{root} G$.

Строим конечную порождённую шкалу $F[G]$. В силу характеристичности класса $\mathbf{M}$ найдутся порождённая из некоторой шкалы этого класса φ-шкала $\mu = (W, S, \Phi)$ и p-морфизм

$$h\colon (W, S) \twoheadrightarrow F[G].$$

Обозначим

$$W_i = h^{-1}(G \times \{i\}) \quad (1 = 1, \dots, n),$$
$$W' = \bigcup_{i=1}^{n} W_i.$$

Ясно, что W_i попарно не пересекаются и $W_1, \dots, W_n \in S$.

По выбору шкалы G в $F[G]$ при подходящей оценке v имеем

$$(r, i) \not\models D \quad \text{для всех} \quad i \leqslant n.$$

По теореме о p-морфизмах при оценке $(h^{-1}v)$ в (W, S) получаем

$$h(x) = (r, i) \Rightarrow x \not\models D \quad (i \leqslant n).$$

для основной леммы 1	для основной леммы 2
По условию (3)	По условию (2)
$h(x) = (r, i) \Rightarrow x \not\models \mathcal{E}_{\alpha+2}$.	$h(x) = (r, i) \Rightarrow x \not\models \mathcal{E}_{\alpha}$
По условию (2)	для всех конечных α, т. е.
$h(x) = (r, i) \Rightarrow \operatorname{ind}(x) = \alpha$.	$h(x) = (r, i) \Rightarrow \operatorname{ind}(x) = \infty$.

Таким образом,

$$h(x) = (r, i) \Rightarrow \operatorname{ind}(x) = * \quad (i \leqslant n). \tag{\#}$$

Строим φ-шкалу $F[\mathcal{N}^*]$. Выделенный конус этой шкалы обозначим через Ψ.

Определим отображение $f\colon W \to F[\mathcal{N}^*]$ по правилу

$$f(x) \rightleftharpoons \begin{cases} h(x) & \text{при } x \notin W', \\ (\operatorname{ind}(x), i) & \text{при } x \in W_i \ (i \leqslant n). \end{cases}$$

Отображение f определено корректно (в случае основной леммы 1 по условию (2) $\forall x \in W \ \operatorname{ind}(x) \geqslant_{\mathcal{N}} \alpha$, т. е. f действительно отображает W на $F[\mathcal{N}^{\alpha}]$).

Проверим, что f удовлетворяет всем условиям p_{φ}-морфизма.

Лемма 6.1.

$$x \leqslant_W y \Rightarrow f(x) \leqslant_{F[\mathcal{N}^*]} f(y).$$

Доказательство. Пусть $x \leqslant_W y$. Разбор случаев.

1. $x, y \notin W'$. Тогда для некоторых $a, b \in F$ имеем $f(x) = h(x) = (a, 0)$, $f(y) = h(y) = (b, 0)$, $a < 0) \leqslant_{F[G]} (b, 0)$. Отсюда $a \leqslant_F b$, поэтому $f(x) = (a, 0) \leqslant_{F[\mathcal{N}^*]} (b, 0) = f(y)$.

2. $x, y \in W_i$. В этом случае $\mathrm{ind}(x) \leqslant_{\mathcal{N}} \mathrm{ind}(y)$, поэтому $f(x) = (\mathrm{ind}(x), i) \leqslant_{F[\mathcal{N}^*]} (\mathrm{ind}(x), i) = f(y)$.

3. $x \notin W'$, $y \in W_i$. Тогда $h(y) \in G \times \{i\}$, $h(x) \notin G \times \{i\}$, $h(x) <_{F[G]} h(y)$, $h(x) = (a, 0)$ для некоторого $a \leqslant_F a_i$ (здесь a_i — i-й максимальный элемент шкалы F). Имеем $f(x) = h(x) = (a, 0)$, $f(y) \in \mathcal{N}^* \times \{i\}$, поэтому $f(x) <_{F[\mathcal{N}^*]} f(y)$. ■

Лемма 6.2. $f(x) <_{F[\mathcal{N}^*]} b \Rightarrow \exists y \in W\colon\ x <_W y \,\&\, f(y) = b$.

Доказательство. Пусть $f(x) <_{F[\mathcal{N}^*]} b$. Разбор случаев.

1. $x \notin W'$.

1.1. $b \in F \times \{0\}$. Тогда $f(x) = h(x) <_{F[G]} b$. По свойствам h (напомним, что h — p-морфизм) найдётся $y \in W$: $x <_W y$ и $h(y) = b$. Имеем $y \notin W'$, поэтому $f(y) = h(y) = b$.

1.2. $b = (*, i)$ для некоторого $i \leqslant n$. По свойствам h существует $y >_W x$: $h(y) = (r, i)$. Согласно (#) $\mathrm{ind}(y) = *$, $y \in W_i$, поэтому $f(y) = (\mathrm{ind}(y), 0) = (*, i) = b$.

1.3. $b = (\beta, i)$ для некоторых $\beta >_{\mathcal{N}} *$ и $i \leqslant n$. Согласно предыдущему пункту доказательства найдётся $z \in W_i$: $z >_W x$ и $\mathrm{ind}(z) = *$. По лемме об индексах существует $y >_W z$: $\mathrm{ind}(y) = \beta$, при этом $y \in W_i$. Следовательно, $f(y) = (\mathrm{ind}(y), i) = (\beta, i) = b$.

2. $x \in W_i$. Тогда $f(x) \in \mathcal{N}^* \times \{i\}$, т. е. для некоторого $\beta \in \mathcal{N}^*$ $f(x) = (\beta, i)$. В частности, $\mathrm{ind}(x) = \beta$. По условию $b >_{F[\mathcal{N}^*]} (\beta, i)$, т. е. $b = (\gamma, i)$ для некоторого $\gamma >_{\mathcal{N}} \beta$. По лемме об индексах существует $y >_W x$: $\mathrm{ind}(y) = \gamma$. Ясно, что $y \in W_i$, поэтому $f(y) = (\mathrm{ind}(y), i) = (\gamma, i) = b$. ■

Лемма 6.3. *Пусть $b \in F$. Тогда*

$$f^{-1}(F[\mathcal{N}^*]^{(b,0)}) = h^{-1}(F[G]^{(b,0)}).$$

Доказательство.

($\subseteq$). Пусть $x \in f^{-1}(F[\mathcal{N}^*]^{(b,0)})$. Тогда $f(x) \in F[\mathcal{N}^*]^{(b,0)}$, т. е. $f(x) \geqslant_{F[\mathcal{N}^*]} (b, 0)$. Разбор случаев.

1. $x \notin W'$. Тогда $f(x) = h(x) \in F \times \{0\}$, $h(x) \geqslant_{F[G]} (b, 0)$, $x \in h^{-1}(F[G]^{(b,0)})$.

2. $x \in W_i$. Тогда $h(x) \in G \times \{i\}$, $b \leqslant_F a_i$, $h(x) \geqslant_{F[G]} (r, i) >_{F[G]} (b, 0)$, т. е. $x \in h^{-1}(F[G]^{(b,0)})$.

($\supseteq$). Пусть $x \in h^{-1}(F[G]^{(b,0)})$. Тогда $h(x) \in F[G]^{(b,0)}$, т. е. $h(x) \geqslant_{F[G]} (b, 0)$. Разбор случаев.

1. $x \notin W'$. Тогда $f(x) = h(x) \in F \times \{0\}$, $f(x) \geqslant_{F[\mathcal{N}^*]} (b, 0)$, $x \in f^{-1}(F[\mathcal{N}^*]^{(b,0)})$.

2. $x \in W_i$. Тогда $h(x) \in G \times \{i\}$, $b \leqslant_F a_i$ (здесь a_i — i-я максимальная точка шкалы F), $f(x) \in \mathcal{N}^* \times \{i\}$, $f(x) >_{F[\mathcal{N}^*]} (b,0)$, т. е. $x \in f^{-1}(F[\mathcal{N}^*]^{(b,0)})$. ■

Лемма 6.4. *Пусть $\beta \in \mathcal{N}^*$. Тогда для каждого $i \leqslant n$*

$$f^{-1}(F[\mathcal{N}^*]^{(\beta,i)}) = W_i \cap \mu(\mathcal{E}_\beta).$$

Доказательство. ($\subseteq$). Пусть $x \in f{-}1(F[\mathcal{N}^*]^{(\beta,i)})$, т. е. $f(x) \geqslant_{F[\mathcal{N}^*]} (\beta,i)$. Тогда $x \in W_i$, $\mathrm{ind}(x) \geqslant_{\mathcal{N}} \beta$, $x \models \mathcal{E}_\beta$, $x \in W_i \cap \mu(\mathcal{E}_\beta)$.

($\supseteq$). Пусть $x \in W_i \cap \mu(\mathcal{E}_\beta)$. Тогда $x \models \mathcal{E}_\beta$, $\mathrm{ind}(x) \geqslant_{\mathcal{N}} \beta$, $f(x) = (\mathrm{ind}(x), i) \geqslant_{F[\mathcal{N}^*]} (\beta,i)$, т. е. $x \in f^{-1}(F[\mathcal{N}^*]^{(\beta,i)})$. ■

Следствие 6.5.

1. *Для любого конуса X шкалы $F[\mathcal{N}^\alpha]$*

$$f^{-1}(X) \in S;$$

2. *Для любого конечно порождённого конуса X шкалы $F[\mathcal{N}]$*

$$f^{-1}(X) \in S.$$

Лемма 6.6. $\Phi \subseteq W'$.

Доказательство. $x \notin W' \Rightarrow h(x) \leqslant_{F[G]} (a_i, 0)$ для некоторого максимального элемента $a_i \in F \Rightarrow$ в шкале $F[G]$ при некоторой оценке v имеем $h(x) \not\models D \Rightarrow$ в μ при оценке $h^{-1}v$ получаем $x \not\models D \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1.\ x \not\models \mathcal{E}_{\alpha+2} \\ 2.\ x \not\models \neg\neg\varphi(=\mathcal{E}_3) \end{array}\right] \Rightarrow x \not\models \varphi$. ■

Следствие 6.7. $f^{-1}(\Psi) = \Phi$.

Доказательство. Напомним, что $\Psi = \{(2,i) \mid i \leqslant n\}$. Тогда $f^{-1}(\Psi) = f^{-1}(\{(2,i) \mid i \leqslant n\}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(\{(2,i)\}) =$ [лемма 6.4] $= \bigcup\limits_{i=1}^{n}(W_i \cap \mu(\mathcal{E}_2)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}(W_i \cap \Phi) = \Phi \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i = \Phi \cap W' =$ [лемма 6.6] $= \Phi$. ■

В результате получаем: $f\colon \mu \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} F[\mathcal{N}^\alpha]$ (при $* = \alpha$) и $f\colon \mu \twoheadrightarrow F[\mathcal{N}]$ (при $* = \infty$), т. е. основные леммы доказаны.

Для последующего доказательства классификационной теоремы введём некоторые понятия.

Скажем, что φ-логика L *определяет новую константу индекса* α ($3 \leqslant \alpha < \infty$), если L консервативна над Int и для некоторой чистой формулы $D \notin \mathrm{Int}$ $\mathcal{E}_\alpha \wedge (\mathcal{E}_{\alpha+2} \to D) \in L$.

Скажем, что консервативная φ-логика L *определяет константу бесконечного индекса*, если для любого конечного α найдётся чистая формула $D_\alpha \notin \mathrm{Int}$, такая что $\mathcal{E}_\alpha \to D_\alpha \in L$.

Скажем, что в консервативной φ-логике константные формулы *равномерно ограничены*, если найдётся чистая формула $D \notin \mathrm{Int}$, такая что для любого конечного индекса α $\mathcal{E}_\alpha \to D \in L$.

Ясно, что консервативная φ-логика с равномерно ограниченными константными формулами определяет константу бесконечного индекса. Обратное скорее всего не верно, но в этот вопрос мы углубляться не будем.

Теорема 6.8. *Всякая консервативная φ-логика, определяющая константу индекса α $(3 \leqslant \alpha < \infty)$ содержится в L^α.*

Доказательство. По теореме о моделировании найдётся характеристический класс $\mathbf{M}$ обобщённых φ-шкал, в котором общезначимы все формулы рассматриваемой φ-логики. В частности, $\mathbf{M} \models \mathcal{E}_\alpha \wedge (\mathcal{E}_{\alpha+2} \to D)$ для подходящей чистой $D \notin \mathrm{Int}$. По основной лемме 1 $\mathbf{H}[\mathcal{N}^\alpha] \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{M}$. По прямой теореме сравнения φ-логик $L_\varphi(\mathbf{M}) \subseteq L^\alpha$. ■

Теорема 6.9. *Всякая консервативная φ-логика с равномерно ограниченными константными формулами содержится в L^∞.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, найдётся характеристический класс $\mathbf{M}$ обобщённых φ-шкал, в котором общезначимы формулы рассматриваемой φ-логики. В частности, найдётся чистая формула $D \notin \mathrm{Int}$, такая что для любого конечного α $\mathbf{M} \models \mathcal{E}_\alpha \to D$. По основной лемме 2 $\mathbf{H}\{\mathcal{N}\} \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{M}$. По обратной теореме сравнения φ-логик $L_\varphi(\mathbf{M}) \subseteq L^\infty$. ■

Таким образом, эти две теоремы почти решают проблему классификации полных по Новикову φ-логик с новой константой. Остается исследовать лишь φ-логики с не равномерно ограниченными константными формулами.

7. О φ-логиках с неравномерно ограниченными константными формулами

Пусть L — консервативная φ-логика, определяющая константу бесконечного индекса. Покажем, что L можно расширить с сохранением консервативности путем добавления множества формул вида $\mathcal{E}_\beta \to A^{(2)}$ для любого конечного индекса β. Здесь $A^{(2)}$ — формула 2-покрытия.

Лемма о присоединимости показывает, что достаточно проверить присоединимость к L любого конечного подмножества множества

$$\{\mathcal{E}_\beta \to A^{(2)} \mid \beta \neq \infty\}.$$

Наконец, учитывая взаимосвязь формул $\mathcal{E}_\beta$ (лемма 2.7(а)), видим, что достаточно проверить присоединимость к L формулы $\mathcal{E}_\beta \to A^{(2)}$ для любого конечного фиксированного индекса β.

Предложение 7.1. *Пусть*

(а) $\mathbf{M}$ — *характеристический класс обобщённых φ-шкал;*

(б) *для любого конечного индекса α найдётся чистая формула $D_\alpha \notin \mathrm{Int}$, такая что $\mathbf{M} \models \mathcal{E}_\alpha \to D_\alpha$.*

Тогда для любого конечного $\beta \geqslant 5$ существует характеристический класс $\mathbf{M}'$ обобщённых φ-шкал, такой что $\mathbf{M}' \overset{\varphi}{\preceq} \mathbf{M}$ и $\mathbf{M}' \models \mathcal{E}_\beta \to A^{(2)}$.

Пусть G — конечная порождённая шкала с n максимальными элементами.

В силу финитной аппроксимируемости Int найдётся конечная порождённая шкала H, такая что $H \not\models D_\beta$. Обозначим $r = \mathrm{root}\, H$.

Строим (конечную порождённую) шкалу $G[H]$. В силу характеристичности класса $\mathbf{M}$ найдутся порождённая из некоторой шкалы этого класса шкала $\mu = (W, S, \Phi)$ и p-морфизм $h\colon (W, S) \twoheadrightarrow G[H]$.

Обозначим $W_i \rightleftharpoons h^{-1}(H \times \{i\})$ $(i = 1, \dots, n)$ и $W' \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$. Ясно, что W_i попарно не пересекаются и $W_i \in S$.

Лемма 7.2. $\Phi \cup -\Phi \subseteq \mu(\mathcal{E}_\beta) \subseteq W'$.

Доказательство. Из $\beta \geqslant 5$ следует $\models (\varphi \vee \neg\varphi) \to \mathcal{E}_\beta$. Отсюда получаем первое включение.

Докажем второе включение. Пусть $x \in W \setminus W'$. Тогда $h(x) \in G \times \{0\}$. По выбору H в шкале $G[H]$ при надлежащей оценке переменных имеем $h(x) \not\models D_\beta$. По теореме о p-морфизмах при соответствующей оценке в μ получаем $x \not\models D_\beta$. По условию (2) доказываемого предложения $x \not\models \mathcal{E}_\beta$. ■

Зададим на W новую систему конусов S':

$$S' \rightleftharpoons \{X \in S \mid \forall i \leqslant n\colon\ (X \cap \Phi \cap W_i = \varnothing \vee \Phi \cap W_i \subseteq X)\ \& \\ \&\ (X \cap -\Phi \cap W_i = \varnothing \vee -\Phi \cap W_i \subseteq X)\}.$$

Лемма 7.3.

(а) $\varnothing, \Phi, W_1, \dots, W_n \in S'$;

(б) *S' замкнуто относительно п.б.операций.*

Доказательство. (а) проверяется непосредственно с использованием леммы 7.2.

Докажем (б). Пусть $X, Y \in S'$. Для сокращения записи введём обозначение $Z = W_i \cap \pm\Phi$ ($+$ — для первого конъюнктивного члена условия S', $-$ — для второго).

- Покажем $X \cap Y \in S'$. Ясно, что $X \cap Y \in S$. Допустим $X \cap Y \cap Z \neq \varnothing$. Тогда $X \cap Z \neq \varnothing$ и $Y \cap Z \neq \varnothing$. По предположению $Z \subseteq X$ и $Z \subseteq Y$. Отсюда $Z \subseteq X \cap Y$. Таким образом, $X \cap Y \in S'$.
- Покажем $X \cup Y \in S'$. Ясно, что $X \cup Y \in S$. Допустим $(X \cup Y) \cap Z \neq \varnothing$. Тогда $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \neq \varnothing$. Если $X \cap Z \neq \varnothing$, то $Z \subseteq X \subseteq X \cup Y$. Если же $Y \cap Z \neq \varnothing$, то $Z \subseteq Y \subseteq X \cup Y$. Таким образом, $X \cup Y \in S'$.
- Покажем $X \supset Y \in S'$. Ясно, что $X \supset Y \in S$. Далее рассуждаем от противного. Допустим $(X \supset Y) \cap Z \neq \varnothing$ и $Z \nsubseteq X \supset Y$. Найдётся $x \in Z\colon\ x \notin X \supset Y$. Найдётся $y \geqslant x\colon\ y \in X\ \&\ y \notin Y$. Имеем $y \in Z$. Отсюда $X \cap Z \neq \varnothing$ и $Z \nsubseteq Y$. Из $X, Y \in S'$ следует $Z \subseteq X$ и $Y \cap Z = \varnothing$. Но тогда $(X \supset Y) \cap Z = \varnothing$, что противоречит предположению. ■

Обозначим $\mu' \rightleftharpoons (W, S', \Phi)$.

Следствие 7.4. $\mathrm{id}\colon \mu \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mu'$.

Напомним, что посредством $\mathrm{pr}\colon G[H] \twoheadrightarrow G$ обозначался p-морфизм, отображающий каждый нарост в соответствующую максимальную точку основы и оставляющий на месте каждую точку основы.

Определим отображение $g\colon W \to G$ как $g = \mathrm{pr}\circ h$. Ясно, что g является p-морфизмом (обыкновенной) шкалы W на G. Покажем, что $g\colon (W, S') \twoheadrightarrow G$. Для этого достаточно проверить следующую лемму.

Лемма 7.5. $\forall b \in G\ \ g^{-1}\left(G^b\right) \in S'$.

Доказательство. По определению pr получаем $\mathrm{pr}^{-1}(G^b) = G[H]^{(b,0)}$. Правую часть этого равенства обозначим для краткости через V.

Строение шкалы $G[H]$ таково, что для $i = 1, \dots, n$

$$H \times \{i\} \cap V = \varnothing \ \text{ или } \ H \times \{i\} \subseteq V.$$

Учитывая $W_i = h^{-1}(H \times \{i\})$, получаем

$$W_i \cap h^{-1}(V) = \varnothing \ \text{ или } \ W_i \subseteq h^{-1}(V). \tag{$*$}$$

Покажем $h^{-1}(V) \in S'$. Ясно, что $h^{-1}(V) \in S$.

Допустим, что $h^{-1}(V) \cap Z \neq \varnothing$ (Z — как в доказательстве предыдущей леммы). Тогда $W_i \cap h^{-1}(V) \neq \varnothing$. Согласно $(*)$ $W_i \subseteq h^{-1}(V)$. Следовательно, $Z \subseteq W_i \subseteq h^{-1}(V)$. Таким образом, $g^{-1}(G^b) = h^{-1}(V) \in S'$. ■

Лемма 7.6. $\mu'(\mathcal{E}_\beta) \subseteq W'$.

Доказательство. Из $\Phi \in S'$ следует $\mu'(\mathcal{E}_\beta) = \mu(\mathcal{E}_\beta) \in S'$, далее по лемме 7.2. ■

Лемма 7.7. *Пусть μ'_i порождена из μ' конусом W_i. Тогда $\mu'_i \models A^{(2)}$.*

Доказательство. Определение семейства S' показывает, что конусы $\Phi \cap W_i$ и $-\Phi \cap W_i$ образуют покрытие μ'_i ($(\Phi \cap W_i) \cup (-\Phi \cap W_i) = (\Phi \cup -\Phi) \cap W_i$ плотно в W_i). ■

Следствие 7.8. $\mu' \models \mathcal{E}_\beta \to A^{(2)}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mu'(\mathcal{E}_\beta)$. По лемме 7.6 $x \in \bigcup_{i=1}^{N} W_i$. По лемме 7.7 $x \models' A^{(2)}$. ■

Завершим доказательство предложения 7.1. Для каждой $G \in \mathbf{H}$ найдем порождённую из некоторой шкалы класса $\mathbf{M}$ шкалу $\mu_G = (W, S, \Phi)$ и p-морфизм $(W, S) \twoheadrightarrow G$. Строим $\mu'_G = (W, S', \Phi)$. В силу изложенного выше имеем $\mu'_G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mu_G$, $(W, S') \twoheadrightarrow G$, $\mu'_G \models \mathcal{E}_\beta \to A^{(2)}$. Это и означает, что класс $\mathbf{M}' = \{\mu'_G \mid G \in \mathbf{H}\}$ искомый.

Теорема 7.9. *Всякая консервативная φ-логика, определяющая константу бесконечного индекса, содержится в L^∞.*

Доказательство. По предложению 7.1 всякая такая φ-логика содержится в консервативной φ-логике с равномерно ограниченными (формулой 2-покрытия) константными формулами. Остается применить теорему 6.9. ■

8. Классификация полных по Новикову φ-логик

Предложение 8.1. *Пусть φ-логика L консервативна над* Int. *Тогда:*
а) $\varphi \in L \Rightarrow L = \mathrm{Int} + \varphi$;
б) $\neg\varphi \in L \Rightarrow L = \mathrm{Int} + \neg\varphi$.

Доказательство. Докажем для $\varphi \in L$. Ясно, что $\mathrm{Int} + \varphi \subseteq L$. Проверим обратное включение. Пусть $A \in L$. Имеем $\varphi \leftrightarrow 1 \in L$. По правилу эквивалентной замены $A(\varphi|1) \in L$, причём $A(\varphi|1)$ — чистая формула. По консервативности $A(\varphi|1) \in \mathrm{Int}$. Заменяя в нужных местах формулы $A(\varphi|1)$ константу 1 константой φ, снова получим A, поэтому $\mathrm{Int} + \varphi \vdash A$.

Для $\neg\varphi \in L$ аналогично с заменой φ на 0 и обратно. ■

Предложение 8.2. *φ-логики L^1 и L^2 разрешимы.*

Доказательство. $\mathrm{Int} + \varphi \vdash A \Leftrightarrow \mathrm{Int} \vdash A(\varphi|1)$; $\mathrm{Int} + \neg\varphi \vdash A \Leftrightarrow \mathrm{Int} \vdash A(\varphi|0)$. ■

Теорема 8.3. *Полные по Новикову φ-логики исчерпываются последовательностью*

$$L^1, L^2, L^3, L^5, L^7, \dots, L^{2k+1}, \dots, L^\infty.$$

Здесь L^1 и L^2 содержат явные соотношения, остальные φ-логики определяют новую константу.

Доказательство. Пусть L — консервативная φ-логика. Рассмотрим альтернативу:

присоединима ли к L какая-либо формула $\mathcal{E}_\alpha$ для конечного α или нет?

В первом случае L содержится в L^α для некоторого конечного индекса α, во втором — в L^∞. ■

Пример. φ-логика Сметанича Sm, упомянутая во введении, содержится в L^3. Более того, это включение строгое. Нетрудно проверить, что

$$(\neg\neg p \to \varphi) \to (\varphi \vee \neg p) \ \in L^3 \setminus \mathrm{Sm}\,.$$

9. Фильтрация

В этом параграфе доказывается разрешимость φ-логик L^α для $\alpha \geqslant 3$.

Первый шаг — уменьшение мощности основы данной модели с помощью некоторой модификации известного метода фильтрации ([11]).

Предложение 9.1. $A \notin L^\alpha \ \Rightarrow \ G[\mathcal{N}^\alpha] \not\models A$ *для некоторой шкалы G, $|G| \leqslant 2^{|\,\mathrm{Sub}\,A|}$ ($\mathrm{Sub}\,A$ — множество всех подформул формулы A).*

Доказательство. Пусть $M = (G[\mathcal{N}^\alpha], \models) \not\models A$.

Для $x \in G$ положим

$$t(x) \rightleftharpoons (\{B \in \operatorname{Sub} A \mid (x,0) \models B\};\ \{B \in \operatorname{Sub} A \mid (x,0) \not\models B\})$$

($t(x)$ можно назвать *A-типом* точки x).

Пусть $G^* \rightleftharpoons \{t(x) \mid x \in G\}$. Элементы G^* обозначаем буквами σ, τ. При этом $\sigma = (\sigma^0, \sigma^1)$.

Упорядочение на G^*: $\sigma \leqslant^* \tau \rightleftharpoons \sigma^0 \subseteq \tau^0$.

$(G^*, \leqslant^*)$ — частично упорядоченное множество, причём $|G^*| \leqslant 2^{|\operatorname{Sub} A|}$.

Отметим простые свойства G^*:

- для $x, y \in G$ $\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ t(x) \leqslant^* t(y)$;
- $\max_G(x) \ \Rightarrow\ \max_{G^*}(t(x))$;
- $\max_{G^*}(\sigma) \ \Rightarrow\ \sigma = t(x)$ для некоторого $x \in \mathrm{MAX}(G)$.

Строим φ-шкалу $G^*[\mathcal{N}^\alpha]$. Оценку $\models^*$ на ней определяем следующим образом:

- для $\sigma \in G^*$ $\ (\sigma, 0) \models^* p \rightleftharpoons p \in \sigma^0$;
- пусть $\sigma \in \mathrm{MAX}(G^*)$ и $\mathcal{N}^\alpha \times \{\sigma\}$ — соответствующий нарост*.

  Выберем в модели M точку $z \in \mathrm{MAX}(G)$ так, чтобы $t(z) = \sigma$, и положим

$$(\mathcal{N}^\alpha \times \{\sigma\}, \models^*) \simeq (\mathcal{N}^\alpha \times \{z\}, \models).$$

Нетрудно проверить, что условие монотонности вверх для $\models^*$ выполнено, поэтому $M^* = (G^*[\mathcal{N}^\alpha], \models^*)$ действительно является моделью.

Лемма 9.2. *Для любой формулы $B \in \operatorname{Sub} A$, для любой $\sigma \in G^*$*

$$B \in \sigma^0 \ \Rightarrow\ (\sigma, 0) \models^* B;$$
$$B \in \sigma^1 \ \Rightarrow\ (\sigma, 0) \not\models^* B.$$

Доказательство. Индукция по построению B. Мы рассмотрим лишь шаг индукции для $B = C \to D$. Пусть $x \in G$ такая, что $t(x) = \sigma$.

- Пусть $C \to D \in \sigma^0$. Тогда $x \models C \to D$,

$$\forall \tau \geqslant^* \sigma\ C \to D \in \tau^0,$$
$$\forall \tau \geqslant^* \sigma\ C \in \tau^1 \vee D \in \tau^0.$$

  По предположению индукции ($C, D \in \operatorname{Sub} A$)

$$\forall \tau \geqslant^* \sigma\ (\tau, 0) \not\models^* C \vee (\tau, 0) \models^* D,$$

  т. е. условие истинности формулы $C \to D$ выполнено во всех точках основы, расположенных выше $(\sigma, 0)$. Проверим условие истинности для наростов, расположенных выше $(\sigma, 0)$.

*Здесь вместо *номера* нароста используется имя максимальной точки основы, над которой расположен этот нарост.

Пусть $\tau \geqslant^* \sigma$, $\tau \in \mathrm{MAX}(G^*)$, $\mathcal{N}^\alpha \times \{\tau\}$ — нарост над τ. По определению

$$(\mathcal{N}^\alpha \times \{\tau\}, \models^*) \simeq (\mathcal{N}^\alpha \times \{z\})$$

для подходящего $z \in \mathrm{MAX}(G)$, такого что $t(z) = \tau$. Имеем $(z, 0) \models C \to D$, поэтому $(\alpha, \tau) \models^* C \to D$. Таким образом, $(\sigma, 0) \models^* C \to D$.

- Пусть $C \to D \in \sigma^1$. Имеем $(x, 0) \not\models C \to D$.
  - Существует $y \in G$: $y \geqslant x$, $(y, 0) \models C$, $(y, 0) \not\models D$. Тогда $t(y) \geqslant^* t(x) = \sigma$, $C \in t(y)^0$, $D \in t(y)^1$. По предположению индукции $(t(y), 0) \models^* C$, $(t(y), 0) \not\models D$, поэтому $(\sigma, 0) \not\models C \to D$.
  - Существуют $z \in \mathrm{MAX}(G)$: $z \geqslant x$ и $y \in \mathcal{N}^\alpha \times \{z\}$: $y \models C$, $y \not\models D$. В частности, $(\alpha, z) \not\models C \to D$.

    По определению найдётся $w \in \mathrm{MAX}(G)$: $t(w) = t(z)$ и

    $$(\mathcal{N}^\alpha \times \{w\}, \models) \simeq (\mathcal{N}^\alpha \times \{t(z)\}, \models^*).$$

    Поскольку $(w, 0) \not\models C \to D$, то $(t(z), 0) \not\models^* C \to D$ и тем более $(\sigma, 0) \not\models^* C \to D$.

Лемма, а вместе с ней и предложение 9.1 доказаны. ■

Следствие 9.3. *Для конечных индексов $\alpha \geqslant 3$ φ-логики L^α разрешимы.*

Вопрос о разрешимости L^∞ решается иным образом (напомним, что эта φ-логика не является финитно аппроксимируемой).

Теорема 9.4. *Для фиксированной шкалы G φ-логика $L_\varphi(G[\mathcal{N}])$ разрешима.*

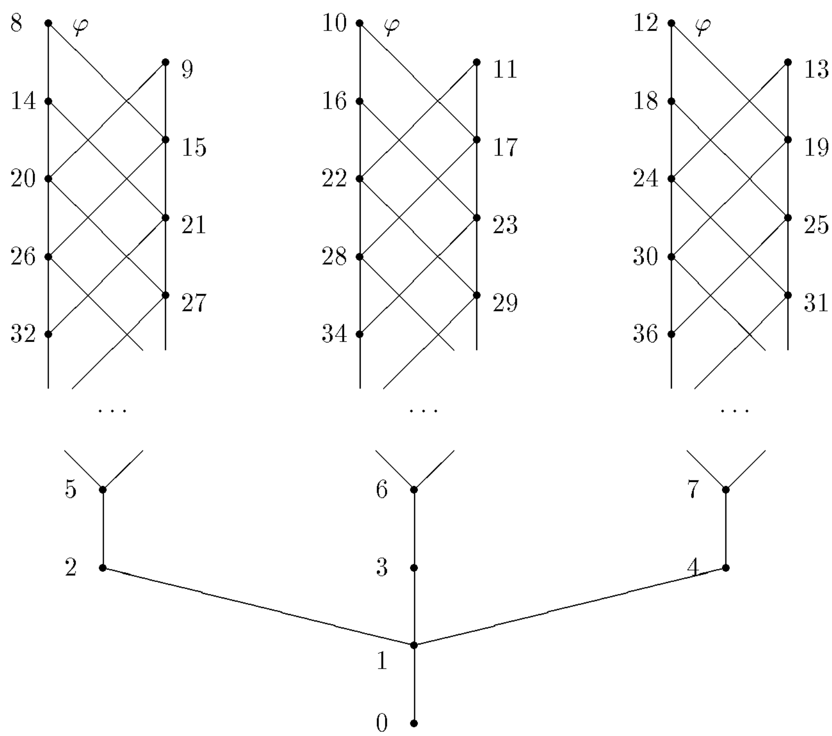
Доказательство. Воспользуемся результатом о разрешимости второпорядковой монадической теории $\mathrm{Th}_2(\omega, +1)$ с операцией $+1$ ([12]). Язык этой теории содержит константу 0 (не путать с пропозициональной константой «ложь»), функциональный символ $+1$ и счетную серию одноместных предикатных символов $P_i(\cdot), Q_j(\cdot), \ldots$. Термами являются выражения вида «константа», «переменная», «переменная + константа» (отметим, что выражений типа «переменная + переменная» в этом языке нет).

Напомним, что*

$$\begin{gathered} x = y \rightleftharpoons \forall P(P(x) \leftrightarrow P(y)), \\ P \subseteq Q \rightleftharpoons \forall x(P(x) \to Q(x)), \\ \mathrm{Even}(x) \rightleftharpoons \forall P(P(0) \wedge \forall y(P(y) \to P(y+2)) \to P(x)). \end{gathered}$$

Во избежание нагромождения в обозначениях рассмотрим конкретный пример φ-шкалы вида $G[\mathcal{N}]$ на следующем рисунке (из рассматриваемого примера будет ясна идея доказательства в общем случае):

*Мы не используем другие символы для обозначения связок языка $\mathrm{Th}_2(\omega, +1)$. Из контекста будет ясно, что имеется в виду.



$G[\mathcal{N}]$

Все точки основы и корни наростов нумеруем начальным отрезком натуральных чисел. Нумерация точек наростов производится равномерным образом — слева направо и сверху вниз.

Теперь необходимо определить понятие конуса в этой шкале.

Запишем формулы:

(1) $(P(0) \to P(1)) \ \wedge \ (P(1) \to (P(2) \wedge P(3) \wedge P(4))) \ \wedge \ (P(2) \to P(5)) \ \wedge$ $\wedge \ (P(3) \to P(6)) \wedge (P(4) \to P(7))$. Эта формула характеризует расположение точек основы и корней наростов.

(2) $\forall x(P(x+14) \to P(x+8))$.
Всякая точка с номером $x \geqslant 14$ имеет непосредственного потомка с номером $x-6$.

(3) $\forall x(\mathrm{Even}(x) \wedge P(x+20) \to_{.} P(x+9))$.
Всякая точка с чётным номером $x \geqslant 20$ имеет непосредственного потомка с номером $x-11$.

(4) $\forall x(\mathrm{Even}(x) \wedge P(x+15) \to_{.} P(x+8))$.
Всякая точка с нечётным номером $x \geqslant 15$ имеет непосредственного потомка с с номером $x-7$.

Пусть
$$Q = \hat{5} \rightleftharpoons S_5(Q) \wedge \forall Q'(S_5(Q') \to Q \subseteq Q'),$$
где $S_5(Q) \rightleftharpoons Q(8) \wedge Q(9) \wedge \forall x(Q(x) \to Q(x+6))$. То есть $\hat{5}$ — наименьшее подмножество, содержащее точки $8, 9$ и замкнутое относительно прибавления 6.

(5) $P(5) \to \forall Q(Q = \hat{5} \to Q \subseteq P)$.
Конус, содержащий точку 5, содержит и все точки из $\hat{5}$.

Аналогично записываются формулы

(6) $P(6) \to \forall Q(Q = \hat{6} \to Q \subseteq P)$,

(7) $P(7) \to \forall Q(Q = \hat{7} \to Q \subseteq P)$.

Положим
$$\mathrm{Cone}(P) \rightleftharpoons (1) \wedge (2) \wedge \ldots \wedge (7).$$
Отношение порядка на $G[\mathcal{N}]$ определяется так:
$$x \leqslant_{G[\mathcal{N}]} y \ \rightleftharpoons\ \forall P(\mathrm{Cone}(P) \wedge P(x) \to_{.} P(y)).$$

По индукции для каждой формулы $A(p_1, \ldots, p_k, \varphi)$ пропозиционального φ-языка определим формулу $A'(x)$ с одной свободной переменной в языке $\mathrm{Th}_2(\omega, +1)$:
$$\begin{aligned} p_i' &\rightleftharpoons P_i(x), \\ \varphi' &\rightleftharpoons (x = 8 \vee x = 10 \vee x = 12), \\ (A \wedge B)' &\rightleftharpoons A'(x) \wedge B'(x), \\ (A \vee B)' &\rightleftharpoons A'(x) \vee B'(x), \\ 0' &\rightleftharpoons x = x + 1, \\ (A \to B)' &\rightleftharpoons \forall y(x \leqslant_{G[\mathcal{N}]} y \wedge A'(y) \to_{.} B'(y)). \end{aligned}$$
Наконец, заметим, что если переменные, входящие в формулу A, содержатся среди $p_1, \ldots, p_n$, то
$$G[\mathcal{N}] \models A \ \Leftrightarrow\ \omega \models \forall P_1 \cdots P_n \Bigl(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathrm{Cone}(P_i) \to A'(0) \Bigr).$$
Из разрешимости $\mathrm{Th}_2(\omega, +1)$ получаем разрешимость $L_\varphi(G[\mathcal{N}])$. ■

Предложение 9.1 и теорема 9.4 дают разрешимость L^∞.

10. Разрешимость алгоритмической проблемы консервативности

Пусть φ-логика задана в виде $\mathrm{Int} + A$, где A — некоторая формула φ-языка.

Теорема 10.1. *Массовая проблема*

«консервативна ли φ-логика $\mathrm{Int}+A$ над Int?»

алгоритмически разрешима.

Доказательство. С одной стороны, $\mathrm{Int}+A$ неконсервативна $\Leftrightarrow$ существует вывод в $\mathrm{Int}+A$ некоторой чистой формулы $D \notin \mathrm{Int}$. Это означает, что семейство неконсервативных φ-логик рассматриваемого вида перечислимо (в терминологии [15] существует негативный тест для проверки консервативности).

С другой стороны, $\mathrm{Int}+A$ консервативна над Int $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Int}+A$ содержится в некоторой полной по Новикову φ-логике $\Leftrightarrow \exists\alpha\colon\ A \in L^{\alpha}$.

Последовательность $L^1, L^2, \ldots, L^{\infty}$ построена явно и все её члены разрешимы, поэтому семейство консервативных φ-логик рассматриваемого вида перечислимо (позитивный тест).

По теореме Поста получаем требуемое. ■

Литература

[1] Сметанич Я. С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Труды Моск. матем. об-ва. — 1960. — Т. 9. — С. 357–371.

[2] Сметанич Я. С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // ДАН СССР. — 1961. — Т. 139, № 2. — С. 309–312.

[3] Goldblatt R. I. Metamathematics of of modal logic I; II // Reports on Math. Logic. — 1976. — V. 6. — P. 41–78; V. 7. — P. 21–52.

[4] Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. — М.: Наука, 1972.

[5] Эсакиа Л. Л. Алгебры Гейтинга. — Тбилиси: Мецниереба, 1985.

[6] Dubashi D. P. On decidable varieties of Heyting algebras // Journal Symb. Logic. — 1992. — V. 57, No. 3. — P. 988–991.

[7] Chagrov A., Zakharyaschev M. The undecidability of the disjunction property of propositional logics and other related problems // Journal Symb. Logic. — 1993. — V. 58, No. 3. — P. 967–1002.

[8] Kirk R. E. A characterization oh the classes of finite tree frames which are adequate for the intuitionistic logic // Zeitschr. f. Math. Logik and Grundl. Math. — 1980. — B. 26, H. 6. — S. 497–501.

[9] Скворцов Д. П. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. — М.: Наука, 1983. — С. 154–173.

[10] Nishimura I. On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus // Journal of Symb. Logic. — 1960. — V. 25. — P. 327–331.

[11] Gabbay D. M. A general filtration method for modal logic // Journal of Philos. Logic. — 1972. — No. 1. — P. 29–34.

[12] Бюхи М. О. О разрешающем методе для ограниченной арифметики второго порядка // Кибернетический сборник. — 1964. — Т. 8. — С. 78–80.

[13] Яшин А. Д. Логика Сметанича T^{Φ} и два определения новой интуиционистской связки // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, вып. 1. — С. 135–142.

[14] Yashin A. D. The Smetanich logic has the unique Novikov complete extension // Proc. of Logic Colloquium-94, Clermont-Ferrand, France, 1994. — P. 163.

[15] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994.

Статья поступила в редакцию в апреле 1996 г.