А. А. Ильин, Ю. Г. Рыков, Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2012, 012

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 12 за 2012 г.

Ильин А.А., Рыков Ю.Г.

Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин А.А., Рыков Ю.Г. Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 12. 9 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-12

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А.А.Ильин, Ю.Г.Рыков

Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений

Москва, 2012

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 11-01-12045 офим).
УДК.517.9

А.А.Ильин, Ю.Г.Рыков
Email: ilyin@keldysh.ru, Yu-Rykov@yandex.ru

Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений

АННОТАЦИЯ

На модельном примере нелинейного гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной по времени показывается, что его динамика при больших значения времени аппроксимируется в смысле глобальных аттракторов динамикой предельного параболического уравнения. Близость же индивидуальных траекторий существенным образом зависит от их спектров Фурье. Полученные результаты отражают возможные явления, возникающие при анализе квазигазодинамических систем уравнений.

Стр. 9, библ. назв. 3

A.A.Ilyin, Yu.G.Rykov

ABSTRACT

We study a model nonlinear hyperbolic equation with small parameter as a coefficient of the second-order time derivative. We show that its long time dynamics are approximated in terms of global attractors by the dynamics of the limiting parabolic equation. The proximity of the individual trajectories essentially depends on their Fourier spectrum. The obtained results might be useful for the explanation of certain effects arising in the analysis of the quasi-gasdynamics systems.

Содержание

1 Введение

При математическом моделировании сложных газодинамических процессов иногда полезно использовать квазигазодинамическую (КГД) систему уравнений и связанные с ней кинетические разностные схемы. В работе [2], [3] была предложена новая модификация КГД, которая наряду со вторыми производными по пространству содержит также вторые производные по времени.

Как известно, основные системы уравнений гидро- газодинамики, уравнения Эйлера и Навье-Стокса, были в свое время обоснованы с помощью методов кинетической теории. Эти уравнения хорошо зарекомендовали себя на практике. Однако, остается достаточно много вопросов, даже в традиционных областях, к которым полезно вновь обращаться на основе кинетической теории. Те части течения, которые демонстрируют быстрые и большие изменения газодинамических параметров (физически, вообще говоря, на масштабах порядка длины свободного пробега молекулы), должны, строго говоря, описываться с помощью кинетической теории. Макроприближения необходимо строить на ее основе. Типичным примером подобной ситуации является образование ударных волн. Структура ударной волны в различных ситуациях может отличаться от той структуры, которая предписывается учетом лишь эффектов вязкости и теплопроводности. Здесь различные формы КГД уравнений могут играть решающую роль.

С вычислительной точки зрения возможная полезность гиперболизации уравнений Навье-Стокса может быть описана следующим образом. Если система уравнений имеет вид

$$u_t - \nu u_{xx} = 0,$$

то использование явной схемы (которая может оказаться наиболее точной) предполагает шаг по времени $\tau \sim h^2$, где h — характерный размер пространственной ячейки. При гиперболизации рассматривается система уравнений типа

$$\varepsilon u_{tt} + u_t - \nu u_{xx} = 0,$$

и тогда временной шаг $\tau \sim h\sqrt{\varepsilon}$. Если брать ε порядка h, то получается заметный выигрыш по времени расчета.

Тогда возникает естественный вопрос, насколько близки решения исходного параболического уравнения и его гиперболизованной модификации. В препринте будет показано, что даже в простейшем случае одного линейного уравнения этот вопрос не является тривиальным. Грубо говоря, решения будут близкими, если количество частот в решении ограничено. Если же присутствует весь частотный ряд со сколь угодно сильным убыванием (в рамках степенного закона) амплитуд, то различие в решении быстро достигнет величины $O(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, используя гиперболизацию основной системы уравнений в газодинамических задачах, необходимо убедиться, что мы имеем дело с гладкими решениями. При возникновении областей с большими градиентами, которые в случае уравнений Эйлера представляют собой разрывы, а в случае уравнений Навье-Стокса отражают развитие некоторых переходных процессов, необходимы дальнейшие специальные усовершенствования метода, например, путем декомпозиции расчетной области.

Отметим, что переход к модельной линейной системе уравнений, а тем более учет нелинейных эффектов (которые вносят основные сложности в реальные практические задачи) даст еще более сложную и запутанную картину поведения траекторий динамической системы при сингулярном возмущении с помощью второй производной по времени.

2 Аттракторы гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной по времени

В этом разделе рассматривается пример сингулярно возмущенного гиперболического уравнения, для которого предельное параболическое уравнение имеет глобальный аттрактор, в произвольно малой окрестности которого содержатся аттракторы исходного сингулярно возмущенного уравнения. При этом близости индивидуальных траекторий на бесконечном интервале времени в общем случае, конечно, нет.

Сначала напомним основные использующиеся ниже понятия. Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = F(u), \quad u(0) = u_0 \in H \tag{1}$$

корректно разрешимо в гильбертовом пространстве H, то есть определена полугруппа разрешающих операторов

$$S_t : H \to H, \quad S_t u_0 = u(t),$$

где $u(t)$ — решение уравнения (1) в момент времени t. Ограниченное множество $\mathcal{A} \in H$ называется глобальным аттрактором S_t, если

1. $\mathcal{A} \Subset H$ (компактность);
2. $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (строгая инвариантность);
3. $\operatorname{dist}_{t\to\infty}(S_tB, \mathcal{A}) \to 0$ $\forall$ ограниченного B (притяжение),

где

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x - y\|.$$

Рассмотрим гиперболическое уравнение с малым параметром при старшей производной по времени

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u = \nu\Delta u - f(u) - g(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, $\gamma > 0$ — фиксировано, а ε — малый параметр. Условия на нелинейность таковы (условие на рост и условие диссипативности):

$$\begin{aligned} &|f'(u)| \le C(1 + |u|)^2, \\ &\int_0^u f(v)dv \equiv F(u) \ge -(\lambda_1 - \eta)u^2 - C \quad \forall u \in \mathbb{R},\ \eta > 0, \\ &F(u) \le Cf(u)u + C_1 + (\lambda_1 - \eta)u^2/2, \end{aligned}$$

где λ_1 — первое собственное значение оператора $-\Delta$ с условием Дирихле. Кроме того, $g \in H^1(\Omega)$, где $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева.

Уравнение (2) при $\varepsilon = 0$ переходит в параболическое уравнение

$$\begin{aligned} \gamma\partial_t u = \nu\Delta u - f(u) - g(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Фазовым пространством для уравнения (2) является пространство пар $(u, p) = (u, \partial_t u) \in E_1 = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1$, а для уравнения (3) — пространство H_0^1. Кроме того, нам понадобится шкала

$$E_s = H^{s+1} \times H^s, \qquad H^s = (-\Delta)^{-s/2} L_2(\Omega), \tag{4}$$

где оператор $-\Delta$ берется с однородным условием Дирихле.

Уравнение (3) имеет единственное решение в фазовом пространстве H_0^1 и обладает в нем глобальным аттрактором $\mathcal{A}_0$. Из свойств сглаживания вытекает, что аттрактор $\mathcal{A}_0$ ограничен в H^3. Для его решений также образуем пару

$$(u, p) = (u, (1/\gamma)(\nu\Delta u - f(u) - g(x))),$$

состоящую из полных траекторий $(u, \partial_t u)$, где $u \in \mathcal{A}_0$. Для всех $u \in \mathcal{A}_0$ множество всех таких пар обозначим через $\mathcal{A}(0)$. Так как аттрактор $u \in \mathcal{A}_0$ ограничен в H^3, то множество пар $\mathcal{A}(0)$ ограничено в следующем смысле

$$\|u\|_3^2 + \|\partial_t u\|_1^2 \le M_2.$$

Уравнение (2) при $\varepsilon > 0$ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}(\varepsilon)$, который равномерно по $\varepsilon > 0$ ограничен в E_1:

$$\|(u,p)\|_{E_1} \le M,$$

где M не зависит от ε.

Справедлив следующий результат о близости глобальных аттракторов гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной по времени (2) и предельного параболического уравнения (3) [1].

Теорема 2.1 *Аттракторы $\mathcal{A}(\varepsilon)$, соответствующие (2), полунепрерывно сверху зависят от ε при $\varepsilon \to 0$ и в $E_{1-\delta}$, $\delta > 0$ справедливо*

$$\operatorname{dist}_{E_{1-\delta}}(\mathcal{A}(\varepsilon), \mathcal{A}(0)) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{5}$$

где E_s определено в (4).

Замечание 2.1 Предел (5) означает, что все аттракторы $\mathcal{A}(\varepsilon)$ лежат при $\varepsilon \to 0$ в произвольно малой окрестности аттрактора предельного уравнения (3):

$$\forall \mu > 0 \quad \exists \varepsilon_0(\mu): \quad \mathcal{A}(\varepsilon) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A}(0)) \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_0(\mu).$$

3 О близости индивидуальных траекторий на конечном интервале

Теорема 2.1 говорит об интегральной близости (в терминах глобальных аттракторов) динамики сингулярно возмущенного и предельного уравнения при больших значениях времени. О близости индивидуальных решений эта теорема информации фактически не предоставляет.

Мы рассмотрим вопрос о близости индивидуальных траекторий для линейного уравнения и для простоты рассмотрим одномерную периодическую задачу:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \partial_t^2 u + \partial_t u + a u_x = \nu u_{xx}, \\ &u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = \dot{u}_0, \quad x \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{1}$$

Не ограничивая общности будем считать, что

$$\int_0^{2\pi} u(t,x)dx = 0 \quad \text{для всех} \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Будем использовать ряды Фурье и представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} u_k(t)e^{ikx}, \quad \text{где} \quad u_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-ikx}dx,$$

где $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, и нулевая мода отсутствует в силу (2). Однородные пространства Соболева определяются стандартным образом

$$\|u\|^2_{\dot{H}^s} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} |k|^{2s}|u_k|^2, \quad s\in\mathbb{R}.$$

Мы хотим сравнить решения этого уравнения с решениями предельного уравнения (с $\varepsilon = 0$):

$$\begin{aligned} &\partial_t u + au_x = \nu u_{xx}, \\ &u(0) = u_0, \quad x\in[0,2\pi]. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу линейности для каждого u_k получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\varepsilon\ddot{u}_k + \dot{u}_k + iaku_k = -\nu k^2 u_k, \\ &u_k(0) = u_0^k, \quad \dot{u}_k(0) = \dot{u}_0^k. \end{aligned} \tag{4}$$

Характеристическое уравнение

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda + iak + \nu k^2 = 0 \tag{5}$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon(iak + \nu k^2)}}{2\varepsilon} \tag{6}$$

Рассмотрим два случая: волновые числа k ограничены и случай, когда $|k| \sim \varepsilon^{-m}$, $m \gg 1$.

1. Пусть $|k| \leq \mathrm{const}$, а в случае если $a = 0$, $|k| \leq \mathrm{const}\cdot\nu^{-1/2}$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm (1 - 2\varepsilon(iak + \nu k^2))}{2\varepsilon} + O(\varepsilon) \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(iak + \nu k^2) + O(\varepsilon), \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} + (iak + \nu k^2) + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{8}$$

Решение уравнения (4) есть

$$u_k(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

где постоянные c_1, c_2 определяются из начальных условий, что дает

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda_2 u_k^0 - \dot{u}_k^0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ c_2 &= \frac{\lambda_1 u_k^0 - \dot{u}_k^0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

При сравнении решений уравнений (1) и (3) разумно потребовать, чтобы начальная “скорость” равнялась нулю, $\dot{u}(0) = 0$, откуда

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda_2 u_k^0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ c_2 &= \frac{\lambda_1 u_k^0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда в первом случае $|k| \leq \mathrm{const}$ имеем

$$\begin{aligned} u_k(t) = u_k(0)(1 + O(\varepsilon)) e^{(-(iak+\nu k^2)+O(\varepsilon))t} + \\ + u_k(0) O(\varepsilon) e^{(\frac{1}{\varepsilon}+(iak+\nu k^2)+O(\varepsilon))t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение уравнения (3) в Фурье-пространстве есть

$$\bar{u}_k(t) = u_k(0) e^{-(iak+\nu k^2)t}. \tag{12}$$

Сравнивая решения (11) и (12) на фиксированном отрезке времени $[0, T]$, получаем следующий результат.

Теорема 3.1 *Пусть T произвольно и фиксировано. Пусть выполняется $\dot{u}(0) = 0$ и пусть*

$$u_0(x) = \sum_{|k| \leq k_0 = \mathrm{const}} u_k(0) e^{ikx}.$$

Тогда решения уравнений (11) и (12) равномерно близки на отрезке $[0, T]$ в любой соболевской норме $\dot{H}^s$:

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{\dot{H}^s} \leq C(T, k_0, s) \cdot \varepsilon. \tag{13}$$

2. Пусть $k \sim \varepsilon^{-m}$, $m \gg 1$ и пусть для простоты $a = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-1 + i2\sqrt{\nu}\varepsilon^{-(2m-1)/2}}{2\varepsilon} + O(\varepsilon), \\ \lambda_2 &= \frac{-1 - i2\sqrt{\nu}\varepsilon^{-(2m-1)/2}}{2\varepsilon} + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$u_k(t) = u_k(0)(1/2 + O(\varepsilon))e^{(-\frac{1}{2\varepsilon}+i2\sqrt{\nu}\varepsilon^{-(2m-3)/2})t}+ \\ +u_k(0)(1/2 + O(\varepsilon))e^{(-\frac{1}{2\varepsilon}-i2\sqrt{\nu}\varepsilon^{-(2m-3)/2})t}. \tag{15}$$

Ясно, что на малом начальном отрезке времени вида $t \in [0, \varepsilon^{m/2}]$ это решение и решение предельного уравнения (12)

$$\bar{u}_k(t) = u_k(0)e^{-\nu\varepsilon^{-2m}t}$$

разойдутся на величину $O(1)$.

Список литературы

[1] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. Москва, Наука, 1989.

[2] Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-ого порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них. *Журнал вычислительной математики и математической физики* **48**:3 (2008), 445–472.

[3] Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва, Научный мир, 2007.