S. A. Aldashev, Well-posedness of Poincare problem in the cylindrical domain for a class of multi-dimensional elliptic equations,
Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, 2014, Issue 10, 17–25

УДК 517.956

С.А. Алдашев[1]

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Краевые задачи в обобщенных пространствах для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами хорошо изучены.

Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного достаточно хорошо исследованы.

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений.

В данной статье методом, предложенным автором, показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

Ключевые слова: корректность, многомерные эллиптические уравнения, функция, уравнение, цилиндрическая область, плотность, операторы, системы функций.

1. Постановка задачи и результаты

Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами изучены в [1–3].

В данной статье, используя предложенный в [4–6] метод, получено в явном виде классическое решение задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

Пусть $D-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D, обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

Алдашев Серик Аймурзаевич (aldash51@mail.ru), кафедра математического анализа, алгебры и геометрии, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, 050012, Республика Казахстан, г. Алматы, ул. Толе би, 86.

В области D многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* \upsilon \equiv \Delta_x \upsilon + \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m, m \geqslant 2$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

В качестве задачи Пуанкаре рассмотрим задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_t\Big|_S = \nu(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \ u\Big|_{S_\alpha} = \varphi(r,\theta), \tag{2}$$

при этом $\psi(\alpha,\theta) = \varphi(1,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ...-$ пространства Соболева.

Имеют место [7] утверждения, сформулированные в виде двух лемм.

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием до порядка $p \leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leqslant c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leqslant c_2, \ \ c_1, \, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar{\varphi}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3) соответственно функций $a_i\,(r,\theta,t)\,\rho\,(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b\,(r,\theta,t)\,\rho$, $c\,(r,\theta,t)\,\rho$, $d\,(r,\theta,t)\,\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$, $\nu(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, $H-$ единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D) \subset C(\overline{D})$, $l \geqslant m+1$, $i = 1, ..., m$, $c(r,\theta,t) \leqslant \leqslant 0$, $\forall (r,\theta,t) \in D$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\varphi(r,\theta) \in W_2^l(S_\alpha)$, $l \geqslant \frac{3m}{2}$, то задача 1 разрешима.

Теорема 2. Если $b(r,\theta,0) = 0$, $\forall (r,\theta) \in S_0$, то решение задачи 1 единственно.

2. Доказательство теоремы 1

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{\delta u}{r^2} + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+ +m- -2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Решение задачи будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для $\bar{u}^k_n$, получим [4–6]

$$\begin{gathered}\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} + \rho^1_0 \bar{u}^1_{0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0 \bar{u}^1_0 + \tilde{c}^1_0 \bar{u}^1_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\left\{\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} + \rho^k_n \bar{u}^k_{ntt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} u^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} + \tilde{b}^k_n \bar{u}^k_{nt} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}^k_n - \lambda_n \frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-1} - n a^k_{in})\right]\bar{u}^k_n\right\} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} + \rho^1_0 \bar{u}^1_{0tt} + \frac{(m-1)}{r}\rho^1_0 \bar{u}^1_{0r} = 0, \tag{7}$$

$$\rho^k_1 \bar{u}^k_{1rr} + \rho^k_1 \bar{u}^k_{1tt} + \frac{(m-1)}{r}\rho^k_1 \bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1 \bar{u}^k_1 = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0 \bar{u}^1_0\right),\ n = 1,\ k = \overline{1, k_1}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} + \rho^k_n \bar{u}^k_{ntt} + \frac{(m-1)}{r}\rho^k_n \bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho^k_n \bar{u}^k_n = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a^k_{in-1}\bar{u}^k_{n-1r} + \tilde{b}^k_{n-1}\bar{u}^k_{n-1t} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}^k_{n-1} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-1} - (n-1)a^k_{in-1})\right]\bar{u}^k_{n-1}\right\},\ k = \overline{1, k_n},\ n = 2, 3 \ldots .\end{gathered} \tag{9}$$

Суммируя уравнение (8) от 1 до k_1, а уравнение (9) — от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместо с (7), приходим к уравнению (6).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}^k_n\right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, ...$ — решение системы (7)–(9), то оно является решением уравнения (6).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n + \bar{u}^k_{ntt} = f^k_n(r,t), \tag{10}$$

где $f^k_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f^1_0(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (5) будем иметь

$$\bar{u}^k_{nt}(r,0) = \bar{\nu}^k_n(r), \quad \bar{u}^k_n(1,t) = \psi^k_n(t), \quad \bar{u}^k_n(r,\alpha) = \bar{\varphi}^k_n(r), k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{11}$$

В (10), (11), произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_n^k(t)$, получим

$$\bar{\upsilon}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k + \bar{\upsilon}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{12}$$

$$\bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0) = \nu_n^k(r), \quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha) = \varphi_n^k(r),\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\dots, \tag{13}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = f_n^k(r,t) - \psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k,\ \nu_n^k(r) = \bar{\nu}_n^k(r) - \psi_{nt}^k(0),\ \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_n^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (12), (13) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k + \upsilon_{ntt}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$\upsilon_{nt}^k(r,0) = \tilde{\nu}_n^k(r), \quad \upsilon_n^k(1,t) = 0,\ \upsilon_n^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \tag{15}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad \tilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t), \quad \tilde{\nu}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\nu_n^k(r),$$

$$\tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r).$$

Решение задачи (14), (15) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{16}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r,t), \tag{17}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = 0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0,\ \upsilon_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \tag{18}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{19}$$

$$\upsilon_{2nt}^k(r,0) = \tilde{\nu}_n^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0,\ \upsilon_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_n^k(r). \tag{20}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{21}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r),\ \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r). \tag{22}$$

Подставляя (21) в (17), (18), с учетом (22) получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s + \mu R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{23}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{24}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t),\ 0 < t < \alpha, \tag{25}$$

$$T_{st}(0) = 0,\ T_s(\alpha) = 0. \tag{26}$$

Ограниченным решением задачи (23), (24) является [8]

$$R_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{27}$$

где $\nu = n + \frac{m-2}{2}$, $\mu_{s,n}$– нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (25) представимо в виде [8]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t + c_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}t + \frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi -$$

$$-\frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi,$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив условию (26), будем иметь

$$\mu_{s,n}T_{s,n}(t) = \left[(\operatorname{th}\mu_{s,n}\alpha)\int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi - \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi\right]\operatorname{ch}\mu_{s,n}t +$$

$$+(\operatorname{ch}\mu_{s,n}t)\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi - (\operatorname{sh}\mu_{s,n}t)\int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi. \quad (28)$$

Подставляя (27) в (22), получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{ns}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty e_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0 < r < 1. \quad (29)$$

Ряды (29) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [9], если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (30)$$

$$e_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\nu}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\ b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (31)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, ...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (27), (28) получим решение задачи (17), (18) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r}T_s(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad (32)$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяются из (30).

Далее, подставляя (27) в (19), (20), с учетом (22) будем иметь

$$T_{stt} - \mu_{s,n}^2 T_s = 0,\ 0 < t < \alpha, \quad (33)$$

$$T_{st}(0) = e_{ns}^k,\ T_s(\alpha) = b_{ns}^k. \quad (34)$$

Общее решение уравнения (33) имеет вид

$$T_{s,n}(t) = c'_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t + c'_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}t. \quad (35)$$

Подчинив его условию (34), получим

$$c'_{2s} = \frac{e^k_{ns}}{\mu_{s,n}},\ c'_{1s} = \frac{b^k_{ns}}{\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha} - \frac{e^k_{ns}}{\mu_{s,n}}\operatorname{th}\mu_{s,n}\alpha. \tag{36}$$

Из (27), (35), (36) найдем решение задачи (19), (20)

$$\upsilon^k_{2n}(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{37}$$

где e^k_{ns}, b^k_{ns} находятся из (31).

Следовательно, сначала решив задачу (7), (11) ($n=0$), а затем (8), (11) ($n=1$), найдем последовательно все $\upsilon^k_n(r,t)$ из (16), где $\upsilon^k_{1n}(r,t)$, $\upsilon^k_{2n}(r,t)$ определяются из (32), (37), $k=\overline{1,k_n}$, $\quad n=0,1,\ldots$.

Итак, в области D имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta)Lu dH = 0. \tag{38}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V = V_0\otimes H\otimes V_1$ плотна в $L_2(D)$ [10].

Отсюда и из (38) следует, что

$$\int\limits_D f(r,\theta,t)Lu dD = 0$$

и

$$Lu = 0,\ \forall(r,\theta,t)\in D.$$

Таким образом, решением задачи Пуанкаре является сумма ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi^k_n(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon^k_{1n}(r,t) + \upsilon^k_{2n}(r,t)\right]\right\}Y^k_{n,m}(\theta), \tag{39}$$

где $\upsilon^k_{1n}(r,t), \upsilon^k_{2n}(r,t)$ находятся из (32), (37).

Учитывая формулу [9] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [7; 11]

$$|J_\nu(z)| = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu\geqslant 0,$$

$$|k_n|\leqslant c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta^q_j}Y^k_{n,m}(\theta)\right|\leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j=\overline{1,m-1},\ q=0,1,\ldots, \tag{40}$$

ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\nu(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, как в [4–6], можно показать, что полученное решение (39) принадлежит классу $C^1(\bar{D})\cap C^2(D)$.

Следовательно, разрешимость задачи Пуанкаре установлена.

3. Доказательство теоремы 2

Для этого сначала построим решение задачи Пуанкаре для уравнения (1*) с данными

$$\upsilon\big|_{\Gamma_\alpha\cup S_\alpha} = 0,\ \upsilon_t\big|_{S_0} = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{41}$$

где $\bar{\nu}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\nu(r)$ из класса $C\left([0,1]\right) \cap C^1\left((0,1)\right)$. Множество V плотно всюду в $L_2((0,1))$ [10]. Решение задачи $(1^*), (41)$ будем искать в виде (5), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п. 2, функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений (7)-(9), где $\tilde{a}_{in}^k$, a_{in}^k, $\tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i = = 1, ..., m$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = = 0, 1, \ldots$.

Далее, из краевого условия (41) в силу (5) получим

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha) = \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \ \bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0) = \bar{\nu}_n^k(r), \ k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{42}$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (7)–(9) представимо в виде (10). В п. 2 показано, что задача (10), (42) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1^*) (41) в виде ряда (39) построено, которая в силу оценок (40) принадлежит классу $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$.

Из определения сопряженных операторов L, L^* [12] вытекает равенство

$$\upsilon Lu - uL^*\upsilon = -\upsilon P(u) + uP(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos\left(N^{\perp}, x_i\right) + u_t \cos\left(N^{\perp}, t\right), \ Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos\left(N^{\perp}, x_i\right) - b\cos\left(N^{\perp}, t\right),$$

а $N^{\perp}$ — внутренняя нормаль к границе ∂D. По формуле Грина имеем

$$\int\limits_D (\upsilon Lu - uL^*\upsilon) dD = \int\limits_{\partial D} \left[\left(\upsilon \tfrac{\partial u}{\partial N} - u\tfrac{\partial \upsilon}{\partial N}\right) M + u\upsilon Q\right] ds, \tag{43}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^{m} \cos\left(N^{\perp}, x_i\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \cos\left(N^{\perp}, t\right) \frac{\partial}{\partial t}, \ M^2 = \sum_{i=1}^{m} \cos^2\left(N^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N^{\perp}, t\right).$$

Из (43), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (41), получим

$$\int\limits_{S_0} \nu(r,\theta) u(r,\theta,0) ds = 0. \tag{44}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\nu}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_0)$ [10], то из (44) заключаем, что $u(r,\theta,0) = 0$, $\forall (r,\theta) \in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Дирихле $[13, 14] : Lu = = 0, u\big|_{S_0 \cup \Gamma_\alpha \cup S_\alpha} = 0$, будем иметь $u = 0$ в $\bar{D}$.

Таким образом, единственность решения задачи Пуанкаре доказана.

Литература

[1] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О задаче с косой производной в области с кусочно-гладкой границей // Функц. анализ. 1971. № 5(3). С. 102–103.

[2] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе // Труды семинара С.Л. Соболева. 1978. № 2. С. 69–102.

[3] Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений частными производными в негладких областях // УМН. Т. 38. Вып. 2(230). С. 3–76.

[4] Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. С. 64–68.

[5] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 170 с.

[6] Алдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал: ЗКАТУ, 2007. 139 с.

[7] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

[8] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

[9] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 295 с.

[10] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.

[11] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1966. 724 с.

[12] Смирнов В.И. Курс высшей математики: в 5 т. М.: Наука, 1981. Т. 4. 550 с.

References

[1] Maz'ya V.G., Plamenevesky B.A. On the problem with directional derivative in a domain with piecewise smooth boundaries. *Funkts. analiz* [*Functional analysis*], 1971, 5:3, pp. 102–103. [in Russian].

[2] Maz'ya D., Plamenevsky B.A. Shauderov estimates of solutions for elliptic boundary value problems in domains with edges on the boundary. *Trudy seminara S.L. Soboleva* [*Proceedings of S.L. Sobolev's seminar*], 1978, Vol.2, pp. 69-102 [in Russian].

[3] Kondratiev V.A., Oleinik O.A. Boundary value problems for partial differential equations in non-smooth domains. *UMN* [*UMN*], Vol. 38, Issue 2(230), pp. 3–76 [in Russian].

[4] Aldashev S.A. On the Darboux problem for a class of multidimensional hyperbolic equations. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential Equations*], 1998, Vol. 34, pp. 64–68 [in Russian].

[5] Aldashev S.A. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed type equations. Almaty, Gylym, 1994, 170 p. [in Russian].

[6] Aldashev S.A. Degenerate multidimensional hyperbolic equations. Oral, ZKATU, 2007, 139 p. [in Russian].

[7] Michlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations. M., Fizmatgiz, 1962, 254 p. [in Russian].

[8] Kamke E. Handbook on ordinary differential equations. M., Nauka, 1965, 703 p. [in Russian].

[9] Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. M., Nauka, 1974, 295 p. [in Russian].

[10] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M., Nauka, 1976, 543 p. [in Russian].

[11] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 1966, 724 p. [in Russian].

[12] Smirnov V.I. The course of higher mathematics: in 5 vol. M., Nauka, 1981, Vol. 4. 550 p. [in Russian].

S.A. Aldashev[2]

WELL-POSEDNESS OF POINCARE PROBLEM IN THE CYLINDRICAL DOMAIN FOR A CLASS OF MULTI-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

The boundary value problems for second order elliptic equations in domains with edges are well studied. For elliptic equations, boundary-value problems on the plane were shown to be well posed by using methods from the theory of analytic functions of complex variable. When the number of independent variables is greater than two, difficulties of fundamental nature arise. Highly attractive and convenient method of singular integral equations can hardly be applied, because the theory of multidimensional singular integral equations is still incomplete. In this paper with the help of the method suggested by the author, the unique solvability is shown and explicit form of classical solution of Poincare problem in a cylindrical domain for a one class of multidimensional elliptic equations is received.

Key words: well-posedness, multi-dimensional elliptic equations, function, equation, cylindrical domain, density, operators, systems of functions.

Статья поступила в редакцию $22/IX/2014$.

The article received $22/IX/2014$.

[2] *Aldashev Serik Aimurzaevich* (aldash51@mail.ru), Department of Mathematical analysis, Algebra and Geometry, Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, 050012, Republic of Kazakhstan.