В. Г. Чирский, Обобщение понятия глобального соотношения, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2005, том 322, 220–238

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

В. Г. Чирский

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ГЛОБАЛЬНОГО СООТНОШЕНИЯ

1. Введение и формулировки результатов

Работа посвящена применению модификации метода Зигеля–Шидловского в теории трансцендентных чисел [1] к исследованию арифметических свойств рядов в неархимедовски нормированных областях. В 1981 году Э. Бомбиери в работе [2] рассмотрел понятие глобального соотношения. Введём несколько обозначений, необходимых в дальнейшем. Пусть $\mathbf{K}$ - поле конечной степени κ над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Пусть $\mathbf{Q}_p$ – поле p—адических чисел, пусть v – нормирование, продолжающее p—адическое нормирование в поле $\mathbf{K}$ (обозначаем это $v|p$) и пусть $\mathbf{K}_v$ – соответствующее пополнение поля $\mathbf{K}$. Множество неархимедовых нормирований поля $\mathbf{K}$ обозначаем V_0. Также обозначим $\kappa_v = [\mathbf{K}_v : \mathbf{Q}_p]$. Пусть $\xi \in \mathbf{K}$. Пусть $f_i(z)$ – формальные степенные ряды с коэффициентами из поля $\mathbf{K}$. Пусть $P(x_1, \dots, x_m)$ - отличный от тождественного нуля многочлен с коэффициентами из поля $\mathbf{K}$.

Определение 1. *Соотношение*

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0$$

называется глобальным, если оно выполняется во всех полях $\mathbf{K}_v$, *в которых сходятся все ряды* $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$.

Определение 2. *Глобальное соотношение называется тривиальным, если оно получается в результате подстановки* $z = \xi$ *в тождественное по* z *равенство*

$$\widetilde{P}(f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0,$$

где $\widetilde{P}(x_1, \dots, x_m)$ *– отличный от тождественного нуля многочлен. В противном случае оно называется нетривиальным.*

Примером глобального соотношения служит равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} nn! = -1, \tag{1.1}$$

верное во всех полях $\mathbf{Q}_p$. Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

Он сходится в любом поле $\mathbf{Q}_p$ при $|z|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$ и удовлетворяет уравнению

$$z^2 f'(z) + (z-1)f(z) + 1 = 0.$$

Обозначим

$$f_1(z) = 1, \quad f_2(z) = f(z), \quad f_3(z) = f'(z).$$

Эти ряды составляют решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1'(z) = 0, \\ f_2'(z) = \dfrac{1-z}{z^2} f_2(z) - \dfrac{1}{z^2} f_1(z), \\ f_3'(z) = \dfrac{1-z}{z^2} f_3(z) + \dfrac{z-2}{z^3} f_2(z) + \dfrac{2}{z^3} f_1(z). \end{cases}$$

и удовлетворяют соотношению

$$z^2 f_3(z) + (z-1) f_2(z) + f_1(z) = 0.$$

Поскольку

$$f_3(z) = f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nn! z^{n-1},$$

подстановка в это соотношение $z = 1$ доказывает справедливость, а также тривиальность глобального соотношения (1.1).

В работе [2] изучались так называемые G-функции, которые определяются, как степенные ряды вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

коэффициенты которых принадлежат некоторому полю $\mathbf{K}$ и удовлетворяют условиям:

1. $\overline{|a_n|} \le CQ^n$, где C, Q – некоторые постоянные, а $\overline{|a|}$ для $a \in \mathbf{K}$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраических чисел, сопряжённых с числом a в поле $\mathbf{K}$;

2. Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что для всех n и $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n a_k \in \mathbf{Z_K}$ и $d_n \le CQ^n$.

В работах [3, 4] исследовались глобальные соотношения для F-рядов. F-ряды естественным образом дополняют классы E- и G-функций Зигеля. G- функции определены выше, а определение E-функции дано, например, в книге [1]. В этой же книге приведено подробное изложение метода Зигеля–Шидловского в теории трансцендентных чисел и приложений этого метода. Нами будет использована модификация метода Зигеля–Шидловского, предназначенная для исследования арифметических свойств F-рядов.

Дадим более точное определение.

Определение. *Ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$$

принадлежит классу $F(\mathbf{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, *если его коэффициенты принадлежат полю* $\mathbf{K}$ *и удовлетворяют условиям*

1. $\overline{|a_n|} = O(\exp c_1 n), n \to \infty$;
2. *Существует последовательность натуральных чисел* $d_n = q^n d_{0,n}$, *где* $q \in \mathbf{N}$ *такая, что для всех* n *и* $k = 0, 1, \dots, n$ *числа* $d_n a_k \in \mathbf{Z_K}$.

При этом натуральные числа $d_{0,n}$ *делятся только на простые числа* p, *не превосходящие* $c_2 n$ *и*

$$\operatorname{ord}_p d_{0,n} \le c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Перейдём к формулировкам утверждений. Предположим, что рассматриваемые ряды $f_i(z), i = 1, \dots, m$ составляют (формальное) решение системы дифференциальных уравнений

$$y_i'(z) = \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \dots, m, Q_{j,i}(z) \in \mathbf{K}(z), i, j = 1, \dots, m. \tag{1.2}$$

Пусть $T = T(z)$ – многочлен с целыми коэффициентами из поля $\mathbf{K}$ такой, что $T(z) Q_{j,i}(z) \in \mathbf{Z_K}[z], j, i = 1, \dots, m$.

В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть F-ряды $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1.2), $\xi \in \mathbf{K}$, $\xi T(\xi) \neq 0$. Тогда не существует нетривиальных глобальных соотношений, связывающих $f_1(\xi) \equiv 1, f_2(\xi), \dots, f_m(\xi)$*

В работе [5] А. И. Галочкин доказал теорему об алгебраической независимости значений E-функций в трансцендентных точках, допускающих высокий порядок приближения алгебраическими числами.

Сформулированное выше понятие глобального соотношения допускает следующее обобщение. Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \tag{1.4}$$

где $\theta_k \in \mathbf{K}$, причём этот ряд сходится во всех полях $\mathbf{K}_v, v \in V_0$. Примеры таких рядов и описание их свойств будут приведены в конце второго параграфа.

Тогда в определениях глобального соотношения и нетривиального глобального соотношения можно рассматривать такую точку ξ вместо точки ξ из поля $\mathbf{K}$.

Обозначим $\Theta_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k$.

Теорема 1. *Пусть F-ряды $f_1(z) \equiv 1$, $f_2(z)$, $\dots$, $f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1.2) и линейно независимы над $\mathbf{K}(z)$. Пусть ξ – ряд (1.3), где θ_k – целые числа из $\mathbf{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbf{K}_v$, $v \in V_0$. Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству*

$$p \leq m \exp(\ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}) \tag{1.4}$$

и любого нормирования v, продолжающего p-адическое нормирование в поле $\mathbf{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(m-1+\delta)(\exp \ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}) \ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}). \tag{1.5}$$

Тогда для любой линейной формы $L(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которой – целые числа из поля $\mathbf{K}$, не все равные нулю, существуют простое число p и нормирование v, продолжающее p-адическое нормирование в поле $\mathbf{K}$ такие, что в поле $\mathbf{K}_v$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_v = |L(1, f_2(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v > 0. \tag{1.6}$$

Теорема 2. *Пусть F-ряды $f_1(z)$, $f_2(z)$, …, $f_m(z)$ составляют решение системы уравнений*

$$
\begin{aligned}
&y_i'(z) = Q_{0,i}(z) + \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), \quad i = 1, \dots, m, \\
&Q_{j,i}(z) \in \mathbf{K}(z), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

и алгебраически независимы над $\mathbf{K}(z)$. Пусть ξ – ряд (1.3), где θ_k – целые числа из $\mathbf{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbf{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству

$$p \le \exp(\ln^{1+2\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}) \tag{1.8}$$

и любого нормирования v, продолжающего p-адическое нормирование в поле $\mathbf{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp\left(-(\exp \ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}) \ln^{1+2\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}\right). \tag{1.9}$$

Тогда для любого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$, коэффициенты которого – целые числа из поля $\mathbf{K}$, не все равные нулю, существуют простое число p и нормирование v, продолжающее p-адическое нормирование в поле $\mathbf{K}$ такие, что в поле $\mathbf{K}_v$ выполняется неравенство

$$|P(\xi)|_v = |P(f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v > 0.$$

Теорема 3. *Пусть F-ряды $f_1(z) \equiv 1$, $f_2(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений (1.2). Пусть максимальное количество линейно независимых над $\mathbf{K}(z)$ среди этих рядов равно максимальному количеству линейно независимых среди них над $\mathbf{K}$. Пусть ξ – ряд (1.3), где θ_k – целые числа из $\mathbf{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbf{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству (1.4) и любого нормирования v, продолжающего p-адическое нормирование в поле $\mathbf{K}$, выполняется неравенство (1.5).*

Тогда не существует нетривиальных глобальных линейных соотношений, связывающих $f_1(\xi) \equiv 1$, $f_2(\xi)$, …, $f_m(\xi)$.

Перед формулировкой теоремы 4 нам потребуется описать некоторые свойства алгебраических уравнений. Пусть ряды

$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически зависимы над $\mathbf{K}(z)$. Тогда связывающие эти ряды алгебраические уравнения степени, не превосходящей d, можно рассматривать, как линейные уравнения, связывающие над $\mathbf{K}(z)$ произведения степеней

$$f_1^{k_1}(z), \ldots, f_m^{k_m}(z), \tag{1.10}$$

где $k_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $k_1 + \ldots + k_m \leq d$.

Среди двух произведений старшим считается то, степень которого по совокупности переменных $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$ выше, произведения одинаковой степени упорядочиваем лексикографически, считая, что f_i старше, чем $f_{j,}$ если $i > j$. В каждом алгебраическом уравнении, связывающем $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$, выделим его старший член вида (1.10). Во множестве старших членов S выберем подмножество S_1 так называемых минимальных элементов. Назовём элемент S вида (1.10) *минимальным*, если для любого другого

$$f_1^{t_1}(z), \ldots, f_m^{t_m}(z) \in S$$

существует i, $1 \leq i \leq m$, такое, что $t_i > k_i$.

В работе [6] установлены следующие свойства подмножества S_1 минимальных элементов множества старших членов S:

1. S_1 – непустое и конечное, пусть d - наибольшая из степеней минимальных элементов по совокупности переменных;

2. Для любого элемента

$$f_1^{t_1}(z), \ldots, f_m^{t_m}(z) \in S$$

существует элемент

$$f_1^{k_1}(z), \ldots, f_m^{k_m}(z) \in S_1$$

такой, что $k_i \leq t_i$, $i = 1, \ldots, m$;

3. Множество произведений степеней

$$f_1^{t_1}(z), \ldots, f_m^{t_m}(z)$$

таких, что для любого минимального элемента

$$f_1^{k_1}(z), \ldots, f_m^{k_m}(z) \in S_1$$

существует i, $1 \leq i \leq m$, такое, что $t_i < k_i$, образует базис векторного пространства над $\mathbf{K}(z)$, порождённого всеми произведениями степеней вида (1.10), где $k_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $k_1 + \ldots + k_m \leq d$.

Определение. *Назовём минимальными уравнения, старшими членами которых являются минимальные элементы.*

Теорема 4. *Пусть F-ряды $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_m(z)$ составляют решение системы уравнений* (1.7).

Пусть коэффициенты всех минимальных уравнений, связывающих их над $\mathbf{K}(z)$ принадлежат $\mathbf{K}$. Пусть ξ – ряд (1.3), *где θ_k – целые числа из $\mathbf{K}$, сходящийся во всех полях $\mathbf{K}_v$, $v \in V_0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству* (1.8) *и любого нормирования v, продолжающего p-адическое нормирование в поле $\mathbf{K}$, выполняется неравенство* (1.9).

Тогда не существует нетривиальных глобальных алгебраических соотношений, связывающих $f_1(\xi)$, $f_2(\xi), \ldots, f_m(\xi)$.

Примечание 1. Условия (1.4), (1.5), (1.8) и (1.9) можно несколько ослабить, заменив число $\varepsilon > 0$ на функцию $\varepsilon(N) > 0, \varepsilon(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

2. Доказательство теорем 1, 2

В формулируемых утверждениях положительные постоянные $c_i, i = 4, 5, \ldots$ зависят от параметров класса, которому принадлежат рассматриваемые F-ряды, от системы (1.2) и от числа m.

Определим соответствующий системе (1.2) дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}(z) y_j \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Пусть $y_1, \ldots, y_m, m \geq 2$ представляют собой степенные ряды, составляющие формальное решение системы уравнений (1.2). Подставляя их в форму

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(z) y_i$$

вместо переменных, получаем формальный степенной ряд $R(z)$. Формальная производная этого ряда является линейной формой от рядов $y_1, \ldots, y_m$ и их формальных производных $y'_1, \ldots, y'_m$. После замены $y'_1, \ldots, y'_m$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений и умножения на многочлен $T(z)$ получим линейную форму от $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}[z]$, т.е. для решений этой системы $TDR = TR'$. Таким образом, начав с произвольной формы

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}(z) y_i, P_{1,i}(z) \in \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}[z], \tag{2.11}$$

положим

$$R_k = TDR_{k-1}, k = 2, 3, \dots . \tag{2.12}$$

Согласно сказанному выше, R_k представляет собой линейную форму от $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbf{Z}_{\mathbf{K}}[z]$, т.е.

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i}(z) y_i, P_{k,i} = P_{k,i}(z) \in \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}[z]. \tag{2.13}$$

Коэффициенты этой формы удовлетворяют равенствам

$$P_{k,i} = T(P'_{k-1,i} + \sum_{j=1}^{m} P_{k-1,j} Q_{j,i}, i = 1, \dots, m, k = 2, 3, \dots . \tag{2.14}$$

Лемма 1 (Лемма 10 [1, с. 106]). *Пусть F-ряды $f_1(z), f_2(z), \dots,$ $f_m(z)$ составляют решение системы уравнений* (1.2) *и линейно независимы над $\mathbf{K}(z)$. Пусть*

$$\rho = \min_{1 \le i \le m} \operatorname{ord}_{\ z=0} f_i(z),$$

$$\sigma = \max(\deg T, \max_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m} \deg TQ_{j,i}).$$

Пусть N – натуральное число, R_1 – отличная от нуля линейная форма

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}(z) y_i, P_{1,i}(z) \in \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}[z],$$

причём $\deg P_{1,i}(z) \le N$, пусть ряд $R_1(z)$ получается из формы R_1 в результате подстановки $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\dots$, $f_m(z)$ вместо $y_1, \dots, y_m$ и пусть

$$\operatorname{ord}_{\ z=0} R_1(z) \ge m(N+1) - s - 1, s \in \mathbf{N}, 0 \le s \le \left[\frac{N}{2}\right].$$

Тогда при $N \geq N_0$, *(где* N_0 *– постоянная, для которой в работе* [7] *дана оценка сверху, выраженная через параметры рассматриваемого класса рядов и системы дифференциальных уравнений) формы* $R_1, \dots, R_m$ *линейно независимы и их определитель* $\Delta(z)$ *имеет вид*

$$\Delta(z) = z^{mn-s-\rho}\Delta_1(z),$$

где многочлен $\Delta_1(z)$ *имеет степень* $t_1, 0 \leq t_1 \leq t$, *а* $t = \sigma\frac{m(m-1)}{2} + s + \rho$.

Лемма 2 (Лемма 11 [1, с. 107]). *Пусть* F*-ряды* $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ *составляют решение системы уравнений* (1.2) *и линейно независимы над* $\mathbf{K}(z)$, *числа* ρ, σ, N_0, s, t *– те же, что и в предыдущей лемме. Пусть* R_1 *– отличная от нуля линейная форма, определённая в предыдущей лемме такая, что*

$$\mathrm{ord}\ _{z=0} R_1(z) \geq m(N+1) - s - 1.$$

Тогда при $N \geq N_0$ *для любого целого числа* $\Theta \in \mathbf{K}$, $\Theta T(\Theta) \neq 0$, *матрица*

$$\|P_{k,i}(\Theta)\|_{i=1,\dots,m,k=1,\dots,m+t} \tag{2.15}$$

имеет ранг m.

Лемма 3. *Пусть ряды*

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m$$

принадлежат классу $F(\mathbf{K}, c_1, c_2, c_3, q)$. *Тогда для любого натурального числа* N *существуют многочлены*

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^{N} B_{i,n} n! z^n, \quad i = 1, \dots, m$$

такие, что их коэффициенты $B_{i,n}$, $n = 0, \dots, N$, $i = 1, \dots, m$ *являются целыми числами из поля* $\mathbf{K}$, *удовлетворяющими неравенству*

$$\overline{|B_{i,n}|} \leq \exp(c_4 N \sqrt{\ln N}). \tag{2.16}$$

При этом линейная форма

$$R(z) = \sum_{i=1}^{m} P_i(z) f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n n! z^n$$

имеет при $z=0$ *порядок нуля не ниже, чем* $u(N)+1$, *где*

$$u(N)=m(N+1)-\left[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right] \tag{2.17}$$

и для любого простого числа p, $c_5\le p\le u(N)$ *и любого* $v|p$, *для любой точки* $\xi\in\mathbf{K}_v$, *удовлетворяющей условию* $|\xi|_v\le 1$, *справедливо неравенство*

$$|R(\xi)|_v\le|(u(N))!|_v\exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6\log_p N+c_7\frac{N}{p^2}\right)\right).$$

Эта лемма вполне аналогична леммам, приведённым в [1, лемма 14, с. 113] или [2, с. 7]. Её подробное доказательство опущено. Следующая лемма также аналогична лемме 15 [1, с. 116].

Лемма 4. *Пусть ряды* $f_1(z),f_2(z),\dots,f_m(z)$ *принадлежат классу* $F(\mathbf{K},c_1,c_2,c_3,q)$, *составляют решение системы уравнений* (1.2) *и линейно независимы над* $\mathbf{K}(z)$, *линейная форма* (2.11) $R_1(z)=R(z)$ *построена по лемме* 3, *формы* R_k *и их коэффициенты* $P_{k,i}$ *определены равенствами* (2.12)–(2.14), $\Theta\in\mathbf{K}$, $\Theta T(\Theta)\ne 0$. *Число* σ *определено в лемме* 1.

Тогда $\deg P_{k,i}(z)\le N+(k-1)\sigma$,

$$\overline{|P_{k,i}(\Theta)|}\le\left(\prod_{n=0}^{k-1}(n\sigma+m+N)\right)\cdot$$
$$\cdot\exp(N\ln N+c_8N\sqrt{\ln N}+c_9k)\overline{|\Theta)|}^{N+\sigma\frac{m(m-1)}{2}+\left[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right]}. \tag{2.18}$$

Кроме того, для любого простого числа p, $c_5\le p\le u(N)$, *любого* $v|p$ *и любой точки* $\xi\in\mathbf{K}_v$, *удовлетворяющей условию* $|\xi|_v\le 1$, *справедливо неравенство*

$$|R_k(\xi)|_v\le|(u(N))!|_v\exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6\log_p N+c_7\frac{N}{p^2}\right)\right). \tag{2.19}$$

Перейдём к доказательству теоремы 1. Определим число $N=N(n)$ равенством

$$N=N(n)=\left[\exp\ln^{1+\varepsilon}\overline{|\Theta_n|}\right]. \tag{2.20}$$

Пусть $N\ge N_0$. Положим $s=[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]$, $t=\sigma\frac{m(m-1)}{2}+[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}]$ и применим лемму 2. Матрица (2.15) имеет ранг m, поэтому среди её строк есть $m-1$ строк, линейно независимых со строкой коэффициентов формы L. Обозначим номера этих строк $k_2,\dots,k_m$ и рассмотрим определитель

$$\Delta(\Theta_n)=\begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_m \\ P_{1,k_2}(\Theta_n) & \dots & P_{m,k_2}(\Theta_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{1,k_m}(\Theta_n) & \dots & P_{m,k_m}(\Theta_n) \end{vmatrix}. \qquad (2.21)$$

Он представляет собой отличное от нуля целое число из поля $\mathbf{K}$. Его можно рассматривать, как значение многочлена

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_m \\ P_{1,k_2}(z) & \dots & P_{m,k_2}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{1,k_m}(z) & \dots & P_{m,k_m}(z) \end{vmatrix} \qquad (2.22)$$

в точке $z=\Theta_n$. Поскольку $k_i\le m+t$,

$$\prod_{n=0}^{k-1}(n\sigma+m+N)\le\exp(c_{10}N\sqrt{\ln N})$$

и из леммы 4 следуют неравенства $\deg P_{k_i,j}(z)\le N+c_{11}\left[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right]$,

$$\overline{|P_{k_i,j}(\Theta_n)|}\le\exp(N\ln N+c_{12}N\sqrt{\ln N})\overline{|\Theta_n|}^{N+m+\sigma\frac{m(m-1)}{2}+\left[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right]},$$

выполняющиеся для всех $i,j=1,\dots,m$. Обозначим

$$h=\max_{i=1,\dots,m}\overline{|h_i|}.$$

Тогда

$$\overline{|\Delta(\Theta_n)|}\le(m-1)!h\exp((m-1)N\ln N+$$
$$+c_{13}N\sqrt{\ln N})\overline{|\Theta_n)|}^{(m-1)(N+m+\sigma\frac{m(m-1)}{2}+\left[\frac{N}{\sqrt{\ln N}}\right])},$$

и из (2.20) получаем

$$\overline{|\Delta(\Theta_n)|}\le$$
$$(m-1)!h\exp((m-1)N\ln N+c_{14}N\sqrt{\ln N}+c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}). \qquad (2.23)$$

Подставим $z=\xi$ в $\Delta(z)$ и рассмотрим полученные элементы полей $\mathbf{K}_v$, где $v|p$,

Лемма 5. *При $N \geq N_0$ для любого простого числа p, $c_5 \leq p \leq u(N)$ и $v|p$ в поле $\mathbf{K}_v$ выполняется равенство $|\Delta(\xi)|_v = |\Delta(\Theta_n)|_v$.*

Для доказательства леммы используем равенство, справедливое в каждом из рассматриваемых полей $\mathbf{K}_v$:

$$\Delta(\xi) = \Delta(\Theta_n + (\xi - \Theta_n)) = \Delta(\Theta_n) + (\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n), \qquad (2.24)$$

где $\Delta_1(\xi, \Theta_n)$ – многочлен от ξ, Θ_n с коэффициентами из $\mathbf{Z_K}$. Следовательно, согласно (1.5),

$$|(\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n)|_v \leq |(\xi - \Theta_n)|_v \leq$$
$$\leq \exp(-(m-1+\delta)(\exp \ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}) \ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}),$$

откуда, ввиду (2.20),

$$|(\xi - \Theta_n)\Delta_1(\xi, \Theta_n)|_v \leq \exp(-(m-1+\delta)N \ln N).$$

С другой стороны, $\Delta(\Theta_n)$ – отличное от 0 целое число из поля $\mathbf{K}$, следовательно, согласно (2.23),

$$|\Delta(\Theta_n|_v \geq \overline{|\Delta(\Theta_n|} \geq \exp(-(m-1)N \ln N - c_{14} N \sqrt{\ln N} - c_{15} N (\ln N)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}).$$

Если число n, а, значит, и число N, выбрано достаточно большим, то

$$\exp(-(m-1)N \ln N - c_{14} N \sqrt{\ln N} - c_{15} N (\ln N)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} >$$
$$> \exp(-(m-1+\delta)N \ln N),$$

поэтому из равенства (2.24) следует, что

$$|\Delta(\xi)|_v = |\Delta(\Theta_n)|_v \geq$$
$$\geq \exp(-(m-1)N \ln N - c_{14} N \sqrt{\ln N} - c_{15} N (\ln N)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}). \qquad (2.25)$$

Лемма доказана.

В каждом из рассматриваемых полей $\mathbf{K}_v$ умножим первый столбец определителя $\Delta(\xi)$ на 1, второй столбец – на $f_2(\xi)$ и так далее, столбец с номером m на $f_m(\xi)$ и прибавим получившиеся столбцы к первому. Отметим, что $|\xi|_v \leq 1$ и все ряды $f_2(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ сходятся. Согласно (1.6) и (2.13), элементами первого столбца будут величины

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)), \quad L_i(\xi) = R_{k_i}(\xi), \quad i = 2, \ldots, m$$

в указанном порядке. Поэтому

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} L(\xi) & h_2 & \dots & h_m \\ L_2(\xi) & P_{2,k_2}(\xi) & \dots & P_{m,k_2}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_m(\xi) & P_{2,k_m}(\xi) & \dots & P_{m,k_m}(\xi) \end{vmatrix}.$$

Обозначим алгебраические дополнения элементов первого столбца этого определителя $\delta_1, \dots, \delta_m$, соответственно, и разложим его по первому столбцу:

$$\Delta(\xi) = \sum_{j=2}^{m} L_j(\xi)\delta_j + L(\xi)\delta_1. \tag{2.26}$$

Из (2.19) следует, что для любого простого числа $p, c_5 \leq p \leq u(N)$ и $v|p$

$$\Big|\sum_{i=2}^{m} L_i(\xi)\delta_i\Big|_v \leq \max_{i=2,\dots,m} |L_i(\xi)\delta_i|_v \leq |L_i(\xi)|_v \leq$$

$$\leq |(u(N))!|_v \exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6 \log_p N + c_7 \frac{N}{p^2}\right)\right), \quad i = 2, \dots, m.$$

Следовательно,

$$\prod \sum_{i=2}^{m} |L_i(\xi)\delta_i|_v \leq \prod |(u(N))!|_v \exp\left(\frac{\kappa_v}{\kappa}\left(c_6 \log_p N + c_7 \frac{N}{p^2}\right)\right),$$

где произведения в правой и левой частях этого неравенства взяты по всем $v|p,\ p, c_5 \leq p \leq u(N)$. Используя известные неравенства для количества простых чисел в заданном интервале, получаем

$$\prod \exp(c_6 \log_p N) \leq \exp\left(c_6 \frac{\ln N}{\ln p} \times c_{16} \frac{u(N)}{\ln u(N)}\right) \leq \exp(c_{17} N),$$

$$\prod \exp\left(c_7 \frac{N}{p^2}\right) = \exp\left(N \sum \frac{c_7}{p^2}\right) \leq \exp(c_{18} N).$$

Наконец, поскольку произведения берутся по $v|p, p, c_5 \leq p \leq u(N)$, произведение $\prod |(u(N))!|_v$ отличается от $((u(N)!)^{-1})$ постоянным множителем. Поэтому

$$\sum_{i=2}^{m} |L_i(\xi)\delta_i|_v \leq ((u(N))!)^{-1} \exp(c_{19} N). \tag{2.27}$$

С другой стороны, из неравенства (2.25) следует,что

$$\prod |\Delta(\xi)|_v = \prod |\Delta(\Theta_n)|_v \geq$$
$$\geq \exp\left(-(m-1)N\ln N - c_{14}N\sqrt{\ln N} - c_{15}N(\ln N)^{\frac{1}{1+\epsilon}}\right), \quad (2.28)$$

где произведения берутся по $v|p$, $p, c_5 \leq p \leq u(N)$. Из неравенств (2.27), (2.28) и равенства(2.17) сразу следует, что

$$\prod |\Delta(\xi)|_v \geq \prod \sum_{i=2}^{m} |L_i(\xi)\delta_i|_v,$$

тогда из (2.26) получаем, что существуют $p, c_5 \leq p \leq u(N)$ и $v|p$ такие, что в поле $\mathbf{K}_v$ выполняется неравенство

$$|L(\xi)|_v > |\Delta(\xi)|_v.$$

Теорема 1 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 2. Пусть d – степень многочлена $P(y_1,\ldots,y_m)$по совокупности переменных $y_1,\ldots,y_m$. Тогда его можно рассматривать, как линейную форму от $M = C_{m+d}^m$ произведений степеней переменных $y_1^{k_1},\ldots,y_m^{k_m}$, где $k_1+\ldots+k_m \leq d, k_i \geq 0, i=1,\ldots,m$.

Лемма 6. *Пусть ряды $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда их произведения степеней*

$$f_1^{k_1}(z)\ldots f_m^{k_m}(z),\ k_1+\ldots+k_m \leq d,\ k_i \geq 0, i=1,\ldots,m,$$

составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой являются целочисленными линейными комбинациями коэффициентов исходной системы (1.2). *Кроме того, они принадлежат классу $F((\mathbf{K}, C_1, C_2, C_3,\ \widetilde{q})$, где*

$$C_1 = c_1 + \ln 2, \quad C_2 = c_2, \quad C_3 = (c_3+1)d, \quad \widetilde{q} = q^{1+[\ln d]}.$$

Доказательство леммы вполне аналогично доказательствам леммы 18 из [1, с. 122] и леммы 7, там же, с. 415.

Эти произведения степеней линейно независимы вследствие алгебраической независимости $f_1(z),\ldots,f_m(z)$. Из неравенств (1.8), (1.9) при достаточно больших n следуют неравенства

$$p \leq M\exp\left(\ln^{1+\epsilon}(\overline{|\Theta_n|})\right)$$

и

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp\left(-(M-1+\delta)(\exp\ln^{1+\varepsilon}\overline{|\Theta_n|})\ln^{1+\varepsilon}\overline{|\Theta_n|}\right),$$

представляющие собой неравенства (1.4) и (1.5), в которых m заменено на M. Применение теоремы 1 завершает доказательство теоремы 2.

В заключение параграфа приведём пример точки ξ, удовлетворяющей условиям доказанных теорем. Для этого для натуральных чисел $k, l \geq 2$ положим $\Phi(k, l, K)$, равной последовательному возведению числа k в степень lK раз, т.е.

$$k^{k^{\cdots^{k}}},$$

обозначим $\Phi(K) = \Phi(k, l, K)$ и положим

$$\Theta_n = \sum_{K=0}^{n} (\Phi(K))!.$$

Для $n \geq 1$

$$\Theta_n \leq 2(\Phi(n))! \leq \exp(\Phi(n)(\ln(\Phi(n))).$$

Для всех простых $p \leq \Phi(n+1)$

$$|\xi - \Theta_n|_p = |(\Phi(n+1))!|_p.$$

Докажем, что для всех простых

$$p \leq \exp(\ln(\exp\Phi(n))\ln\Phi(n))^2$$

выполняются неравенства

$$|(\Phi(n+1))!|_p \leq \exp(-\exp((\Phi(n))\ln\Phi(n))^2).$$

Доказываемое неравенство следует из неравенства

$$\exp\left(-\frac{\Phi(n+1)\ln p}{p-1}\right)\Phi(n+1) \leq \exp(-\exp((\Phi(n))\ln\Phi(n))^2),$$

которое следует из неравенства

$$\frac{\Phi(n+1)}{p-1} - \ln\Phi(n+1) > \exp((\Phi(n))\ln\Phi(n))^2),$$

которое, в свою очередь, следует из неравенства

$$\Phi(n+1) > \exp\left((\Phi(n))\ln\Phi(n))^2\right)(\ln\Phi(n+1) + \exp((\Phi(n))\ln\Phi(n))^2)),$$

легко вытекающего из неравенства

$$\Phi(n+1) \geq 2^{2^{\Phi(n)}},$$

при достаточно больших n.

Предложение. *Ряд* (1.3) *такой, что существует бесконечное множество натуральных чисел n таких, что для любого простого числа p, удовлетворяющего условиям* (1.8) *и любого $v|p$ выполняется неравенство* (1.9), *является трансцендентным элементом поля* $\mathbf{K}_v$.

Для доказательства, предполагая противное, рассмотрим отличный от нуля многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $Q(\xi) = 0$ поля $\mathbf{K}_v$. Тогда

$$Q(x) = Q'(\xi)(x-\xi) + \frac{Q''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 + \ldots$$

и для любого n выполняется равенство:

$$Q(\Theta_n) = -Q'(\xi)(\xi - \Theta_n) + \frac{Q''(\xi)}{2}(\xi - \Theta_n)^2 + \ldots. \tag{2.29}$$

Пусть C – наибольшая из абсолютных величин коэффициентов многочлена $Q(x)$, а D – степень этого многочлена. Тогда

$$\overline{|Q(\Theta_n)|} \leq C2^D(\overline{|\Theta_n|})^D$$

и, значит,

$$|Q(\Theta_n)| > (C2^D(\overline{|\Theta_n|})^D)^{-1}.$$

Из (2.29) следует, что если

$$|\xi - \Theta_n|_v < (C2^D(\overline{|\Theta_n|})^D)^{-1}, \tag{2.30}$$

то равенство $Q(\xi) = 0$ не выполняется. Но при больших n неравенство (2.30) следует из (1.9). Предложение доказано.

3. Доказательство теорем 3, 4

Лемма 7. *Пусть максимальное количество линейно независимых над* $\mathbf{K}(z)$ *среди рядов* $1,\ f_2(z),\dots,f_m(z)$ *равно максимальному количеству линейно независимых над* $\mathbf{K}$ *и равно* l, $1\le l\le m$, ξ *– ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 3. Тогда ряды* $1,f_2(z),\dots,f_m(z)$ *можно перенумеровать так, что полученные в результате ряды* $1,\ G_2(z),\dots,G_l(z)$ *будут линейно независимы над* $\mathbf{K}(z)$, *а остальные можно представить в виде*

$$G_j(z)=B_{j,1}+B_{j,2}G_2(z)+B_{j,l}G_l(z),\ \ j=l+1,\dots,m, \qquad (3.31)$$

где $B_{j,i}\in\mathbf{K}$, $i=2,\dots,l$, $j=l+1,\dots,m$.

Доказательство леммы очевидное.

Ряды $1,G_{2(z)},\dots,G_l(z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1, поэтому между $1,\ G_2(\xi),\dots,G_l(\xi)$ нет линейных глобальных соотношений. Любое глобальное линейное соотношение

$$\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2f_2(\xi)+\widetilde{c}_mf_m(\xi)=0$$

после того, как ряды $1,\ f_2(z),\dots,f_m(z)$ будут перенумерованы, как в лемме, перейдёт в некоторое линейное глобальное соотношение

$$c_1+c_2G_2(\xi)+\ldots+c_mG_m(\xi)=0. \qquad (3.32)$$

Из равенств (3.31) следуют глобальные соотношения

$$G_j(\xi)=B_{j,1}+B_{j,2}G_2(\xi)+B_{j,l}G_l(\xi),\ \ j=l+1,\dots,m, \qquad (3.33)$$

Докажем, что любое соотношение (3.32) представляет собой линейную комбинацию соотношений (3.33). Действительно, предполагая противное и последовательно исключая из соотношения (3.32) величины $B_{j,l}G_l(\xi)$, $j=l+1,\dots,m$, получим глобальное линейное соотношение

$$C_1+C_2G_2(\xi)+\ldots+C_lG_l(\xi)=0,$$

в котором при некотором $i,1\le i\le l,C_i\ne0$, что противоречит доказанной выше теореме 1. Теорема 3 доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 4. Рассмотрим множество S_1 минимальных уравнений. Согласно условиям теоремы, их можно рассматривать, как представление старших членов этих уравнений в виде линейной комбинации с коэффициентами из поля $\mathbf{K}$ элементов базиса пространства, порождённого над $\mathbf{K}_z$ произведениями степеней (1.10). Подставляя в них ξ вместо z, получаем тривиальные глобальные соотношения. Если же подставить ξ вместо z в вышеупомянутые элементы базиса, то, используя лемму 6 и теорему 1, легко доказать, что полученные в результате ряды не будут связаны никаким линейным глобальным соотношением.

Любое глобальное алгебраическое соотношение между $f_1(\xi)$, $\ldots$, $f_m(\xi)$, согласно сказанному выше, можно представить, как линейное соотношение над $\mathbf{K}$ между произведениями степеней этих рядов. Старший член этого соотношения получается в результате подстановки ξ вместо z в некоторый старший член алгебраического уравнения, связывающего ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над $\mathbf{K}(z)$, иначе мы получили бы глобальное соотношение между элементами базиса, что невозможно. Согласно свойству 2 минимальных элементов, старший член этого уравнения можно заменить линейной комбинацией с коэффициентами из $\mathbf{K}$ членов меньшего порядка, что приведёт к глобальному соотношению, старший член которого имеет меньший порядок. Продолжая этот процесс, получаем, что исходное глобальное соотношение сводится к результату подстановки ξ вместо z в алгебраическое соотношение с коэффициентами из $\mathbf{K}$, связывающее$f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Тем самым, теорема 4 доказана.

Литература

1. А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа.* — Наука, М. (1987).
2. E. Bombieri, *On G-functions.* — ин: Recent Progress in Analytic Number Theory, **2**, London, Academic Press (1981), pp. 1–68.
3. В. Г. Чирский, *О глобальных соотношениях.* — Матем. заметки. **48**, No. 2 1990, 123–127.
4. В. Г. Чирский, *О нетривиальных глобальных соотношениях.* — Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика No. 5 (1989), 33–36.
5. А. И. Галочкин, *Об алгебраической независимости значений E-функций в некоторых трансцендентных точках.* — Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика No. 5 (1970), 58–63.
6. В. А. Олейников, *О некоторых свойствах алгебраически зависимых величин.* — Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика No. 6 (1962), 11–17.
7. D. Bertrand, V. G. Chirskii, J. Yebbou, *Effective estimates for global relations on Euler-type series.* — принята к печати в J. N. Th. Bordeaux.

Chirsky V. G. A generalization of the method of global relation.

We generalize the notions of global and non-trivial global relations to the case when the the series in the definitions of these relations are evaluated at a point, which is itself a series, well -approximable by algebraics in any non-archimedean local field.

Московский государственный
университет им. Ломоносова

Поступило 2 марта 2005 г.