

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ. I

РОЗОНОЭР Л. И., ЦИРЛИН А. М.

(Москва)

Рассматриваются задачи оптимального управления термодинамическими системами. В отличие от классических задач термодинамики о максимальной работе и об оптимальных термодинамических циклах, оптимум отыскивается среди необратимых процессов с фиксированным временем и конечной мощностью. Приводятся уравнения управляемых термодинамических процессов и обсуждаются некоторые их свойства.

### 1. Введение

Организация термодинамических процессов, обеспечивающих максимальную при заданных условиях механическую работу, является одним из центральных вопросов термодинамики, который, как известно, лег в основу развития этой науки, начиная с работы С. Карно (см., например, [1]). Классический результат термодинамики, относящийся к максимальной работе (или к максимальному КПД для циклического процесса), заключается в утверждении, что оптимальный процесс должен идти без возрастания энтропии системы. Это означает, что в оптимальном процессе теплопередача должна происходить при сколь угодно малой разнице температур, и, следовательно, для передачи конечного количества тепла и производства конечной работы требуется бесконечно большое время. Средняя мощность процесса при этом оказывается равной нулю. Отсюда естественно возникает задача отыскания оптимального процесса, имеющего фиксированную продолжительность и соответственно ненулевую среднюю мощность. Эта задача выходит за рамки равновесной термодинамики, так как оптимум должен отыскиваться среди необратимых процессов. Однако задача может быть поставлена в предположении, что термодинамическая система состоит из равновесных подсистем (не находящихся, вообще говоря, в равновесии друг с другом), а закон теплопередачи между подсистемами задан. Такая постановка вполне достаточна для всех технических приложений.

Литература, касающаяся оптимального управления термодинамическими процессами, сравнительно невелика. На то обстоятельство, что задача о максимальной работе является специфической задачей оптимального управления, указано в [2]. Задачи об оптимальных термодинамических циклах с конечной мощностью для линейных законов теплопередачи рассматривались в [3—8]. В [3] была решена задача о цикле максимальной мощности в предположении, что структура цикла («две изотермы и две адиабаты») задана. В [6] для определения структуры оптимальных циклов были использованы методы теории оптимального управления (принцип максимума).

В настоящей работе задача об оптимальных термодинамических процессах ставится в общем виде и рассматривается с самого начала как задача оптимального управления<sup>1</sup>. Работа публикуется в виде трех статей. В первой статье приводятся уравнения управляемых термодинамических процессов и рассматриваются некоторые их свойства. Во второй статье решена серия простых задач о максимальной работе, получаемой в термо-

<sup>1</sup> Работа содержит развернутое и дополненное изложение доклада авторов на VIII Всесоюзном совещании по проблемам управления [9].

динамическом процессе за конечное время. В третьей статье рассмотрены оптимальные (прямые и обратные) термодинамические циклы с конечной мощностью.

В статье рассмотрены лишь процессы, в которых отсутствуют химические реакции и массообмен между подсистемами, не рассмотрены и случаи, когда, наряду с термодинамическими, система имеет и механические степени свободы. Соответствующие обобщения в постановке задачи могут быть произведены без особого труда. Аналогичные задачи могут быть сформулированы также в рамках обобщенной модели обмена ресурсами [2].

## 2. Термодинамический процесс как управляемая система

Рассмотрим сначала описание отдельной однокомпонентной равновесной системы. Состояние подобной системы характеризуется, как известно, набором таких величин, как объем  $V$ , внутренняя энергия  $E$ , энтропия  $S$ , температура  $T$ , давление  $p$ , среди которых лишь две являются независимыми. Выбор этих двух независимых величин произволен<sup>2</sup> и диктуется соображениями удобства. Если, например, в качестве независимых выбрана энергия и объем, то

$$(1) \quad S=S(E, V), \quad T=1 / \frac{\partial S}{\partial E}, \quad p=T \frac{\partial S}{\partial V}.$$

Для идеального газа с постоянной теплоемкостью  $c_V$  имеем, например,

$$(1a) \quad S=c_V \ln E+R \ln V, \quad T=\frac{E}{c_V}, \quad p=T \frac{R}{V},$$

где  $R$  — константа.

Если независимыми переменными выбраны объем и энтропия, то

$$(2) \quad E=E(S, V), \quad T=\frac{\partial E}{\partial S}, \quad p=-\frac{\partial E}{\partial V}.$$

Каждую из зависимостей, выражающую один из параметров состояния через два других, будем называть уравнением состояния, а правые части этих зависимостей — функциями состояния. В дальнейшем предполагается<sup>3</sup>, что функции состояния обладают следующими свойствами: 1) функция  $S(E, V)$  является строго вогнутой, а  $E(S, V)$  — строго выпуклой функцией своих переменных; 2)  $V>0, T>0, p>0$ ; 3) выполняются следующие условия монотонности функции  $T(S, V)$ : а) при изменении величины  $S$  от некоторого значения  $S_{\min}$  до  $\infty$  (при  $V=\text{const}$ ), величина  $T(S, V)$  монотонно возрастает от 0 до  $\infty$ ; б) при изменении величины  $V$  от 0 до  $\infty$  (при  $S=\text{const}$ ), величина  $T(S, V)$  монотонно убывает от  $\infty$  до 0.

Если система получает поток тепла, равный  $q$ , то

$$(3) \quad \dot{S}=q/T,$$

$$(4) \quad \dot{E}=q-p\dot{V}.$$

Уравнения (3) и (4) легко следуют одно из другого с учетом соотношений (1) и (2). Величины

$$N=p\dot{V}, \quad A=\int_0^{\dot{i}} P\dot{V} dt$$

представляют собой соответственно мощность и механическую работу, произведенную системой за время  $\dot{i}$ .

При задании  $q(t)$  и  $V(t)$  приведенные соотношения определяют поведение системы (т. е. зависимость от времени переменных состояния). Од-

<sup>2</sup> За исключением особых случаев, когда  $T$  и  $p$  — константы. Такие особые случаи в дальнейшем специально оговариваются.

<sup>3</sup> За исключением случаев, отмеченных в предыдущей сноске.

нако тепловой поток  $q$  обычно не задают непосредственно, а определяют условиями на границе системы. Если система находится в тепловом контакте с другой системой, имеющей температуру  $T'$ , то

$$(5) \quad q = q(T, T').$$

Функция  $q(T, T')$  обладает следующим свойством:

$$(6) \quad q(T, T') \begin{cases} > 0 \text{ при } T' > T, \\ = 0 \text{ при } T' = T, \\ < 0 \text{ при } T' < T, \end{cases}$$

т. е. тепло передается от горячих тел к холодным. В дальнейшем предполагается, что законы теплопередачи  $q(T, T')$  являются достаточно гладкими и монотонными по  $T$  и  $T'$  (тепловой поток растет с ростом  $T'$  и уменьшением  $T$ ). В технических расчетах часто используют линейный закон теплопередачи вида

$$(6a) \quad q(T, T') = \lambda(T' - T),$$

где  $\lambda$  — константа (коэффициент теплопередачи).

Рассмотрим теплоизолированную систему, состоящую из  $n$  равновесных подсистем. Тепловые потоки в систему и из нее отсутствуют, а теплообмен может осуществляться только между подсистемами. Индексом  $i$  будем отмечать величины, относящиеся к  $i$ -й подсистеме. Если  $i$ -я и  $k$ -я подсистемы находятся в тепловом контакте, то тепловой поток  $q_{ik}$  от  $k$ -й подсистемы к  $i$ -й задается законом теплопередачи

$$(7) \quad q_{ik} = q_{ik}(T_i, T_k).$$

Если системы  $i, k$  не находятся в тепловом контакте, то  $q_{ik} = 0$ . В силу закона сохранения энергии

$$(8) \quad q_{ik} = -q_{ki}.$$

Принимая во внимание аддитивность тепловых потоков, в соответствии с (3) можно написать

$$(9) \quad S_i = \frac{1}{T_i} \sum_{k=1}^n q_{ik}(T_i, T_k), \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь и далее для упрощения записи суммирование производится по всем индексам, но полагается  $q_{ii} = 0$ .

Если температуры  $T_i$  выразить через  $V_i$  и  $S_i$  в соответствии с (2) и подставить в (9), то при заданных функциях  $V_i(t)$  получим замкнутую систему дифференциальных уравнений для определения функций  $S_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Величины  $E_i(t)$ ,  $T_i(t)$ ,  $p_i(t)$  определяются через  $V_i(t)$ ,  $S_i(t)$  из соотношений вида (2). Таким образом, уравнения (9) вместе с соотношениями (2) задают управляемую систему, в которой роль управляющих воздействий играют объемы подсистем  $V_i(t)$ , а роль фазовых координат — энтропии подсистем  $S_i(t)$ . Кроме естественных ограничений  $V_i(t) > 0$ , множество допустимых управлений может быть охарактеризовано еще некоторыми условиями, например условием постоянства суммарного объема системы

$$\sum_{i=1}^n V_i(t) = \text{const.}$$

Наличие подобных ограничений свидетельствует о существовании механического контакта между подсистемами<sup>4</sup>. Примером может служить цилиндр с газом, разделенный на два объема подвижным поршнем.

<sup>4</sup> Механический контакт — наличие общих подвижных перегородок между подсистемами. Если при этом объемы подсистем можно изменять независимо, то механические контакты не сказываются на приведенных уравнениях. Поэтому существует не сам факт контакта, а лишь необходимость учета совместных ограничений на объемы.

Существует также возможность управления термодинамическими системами за счет установления или нарушения тепловых контактов. Уравнения процесса переписываются в этом случае в форме

$$(10) \quad S_i = \frac{1}{T_i} \sum_{k=1}^n u_{ik}(t) q_{ik}(T_i, T_k), \quad i = \overline{1, n},$$

в которой управление  $u_{ik}(t)$  может принимать лишь два значения: 0 при отсутствии и 1 при наличии теплового контакта между  $i$ -й и  $k$ -й подсистемами ( $u_{ik} = u_{ki}$ ).

Если изменением управляющих переменных  $V_i(t)$  можно обращать тепловые потоки  $q_{ik}(t)$  в нуль в любые моменты времени  $t$ , то во введении дополнительных управлений  $u_{ik}$  нет необходимости, так как равенство теплового потока нулю эквивалентно отсутствию теплового контакта.

В силу уравнений (9) и (10) суммарная энтропия теплоизолированной системы не убывает, так как с учетом (8)

$$S_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n u_{ik} q_{ik}(T_i, T_k) \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_k} \right).$$

Это выражение в силу свойств законов теплопередачи (6) неотрицательно.

В тех случаях, когда система не является теплоизолированной в течение всего процесса, а может находиться в контакте с «источником», имеющим постоянные температуру  $T_{\Pi}$  и давление  $P_{\Pi}$  (термо- и баростатом), иногда бывает удобно включить источник в систему в качестве одной из подсистем, а совокупную систему рассматривать как теплоизолированную. Энтропию источника следует при этом задать формулой

$$(11) \quad S_{\Pi} = \frac{1}{T_{\Pi}} E_{\Pi} + \frac{P_{\Pi}}{T_{\Pi}} V_{\Pi}.$$

Подчеркнем, что функция (11) не удовлетворяет условиям, которые были наложены выше на функции состояния «обычных» систем.

При постановке задач оптимального управления термодинамическими системами особый интерес представляют «энергетические» критерии оптимальности, характеризующие предельные возможности получения работы. Типичной является задача о максимальной работе

$$(12) \quad A = \int_0^{\bar{t}} \sum_{i=1}^n P_i V_i dt,$$

произведенной системой за фиксированное время  $\bar{t}$ . Используя соотношение (4) для каждой из подсистем, имеем

$$(13) \quad \dot{E}_i = \sum_{k=1}^n q_{ik}(T_i, T_k) - P_i \dot{V}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Суммируя эти выражения с учетом (8), суммарную работу можно представить в виде

$$A = \sum_{i=1}^n (E_i(0) - E_i(\bar{t})),$$

отражающем закон сохранения энергии в теплоизолированной системе. Если начальные состояния подсистем фиксированы, то максимуму работы соответствует минимум функционала

$$(14) \quad \bar{E} = \sum_{i=1}^n E_i(S_i(\bar{t}), V_i(\bar{t})),$$

где  $E_i(S_i, V_i)$  — функция состояния (2). В тех случаях, когда система включает наряду с «обычными» подсистемами источники, из-за особенностей функции состояния (11) иногда бывает удобно представлять критерий оптимальности в иных формах.

### 3. Математические особенности простейших задач управления термодинамическими процессами

При решении оптимизационных задач управления термодинамическими процессами естественно попытаться воспользоваться спецификой их уравнений. При наличии произвольных ограничений на протекание процесса получение каких-либо общих результатов вряд ли возможно — каждая конкретная задача должна рассматриваться отдельно с применением соответствующих методов теории оптимального управления (включая вычислительные методы). Рассмотрим, однако, класс задач, в которых на функции  $V_i(t)$ , определяющие зависимость объемов подсистем от времени, не наложено никаких ограничений, кроме требования кусочной непрерывности и условия  $V_i(t) > 0$  (скорости изменения объемов не ограничиваются, так что функции  $V_i(t)$  могут терпеть разрывы). Для таких задач специфика уравнений движения (9) и уравнений состояния (2) позволяет получить ряд общих результатов. В этом случае в качестве управляющих воздействий могут быть рассмотрены непосредственно температуры  $T_i(t)$ . Это легко следует из свойства 3б) функции состояния  $T(S, V)$ . При таком выборе управляющих воздействий правые части уравнений движения (9) не зависят от фазовых координат  $S_i$ , и оптимизационная задача приводится к простейшему типу так называемых ляпуновских задач (см., например, [10]) или, по терминологии, принятой в технической литературе, усредненных задач (см., например, [11, 12]). Это и позволяет в целом ряде физически и технически интересных случаев получить полное решение оптимизационной задачи. В дальнейшем только такие задачи и рассматриваются.

Подчеркнем, что и в тех случаях, когда на протекание процессов наложены дополнительные ограничения (например, ограничения на скорости изменения объемов), получаемые без учета таких ограничений решения дают полезные верхние оценки эффективности, существенно уточняющие классические термодинамические оценки.

Возможность выбора в качестве управляющих воздействий непосредственно температур  $T_i(t)$  позволяет легко учесть температурные ограничения на ход термодинамического процесса. Заметим, что разрывам функций  $T_i(t)$  физически соответствуют «мгновенные» адиабатические изменения объемов  $V_i(t)$ , поскольку функции  $S_i(t)$  непрерывны. Разрывы функций  $T_i(t)$  могут происходить и на концах отрезка  $[0, \bar{t}]$ , когда граничные значения  $T_i(0)$  и  $T_i(\bar{t})$  заданы и не совпадают с пределами  $T_i(t)$  при  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \bar{t}$ . Оптимальное управление  $T_i(t)$  определяется на открытом интервале  $(0, \bar{t})$  и не зависит от задания граничных значений  $T_i(0)$  и  $T_i(\bar{t})$ . Если оптимальные законы  $T_i(t)$ ,  $S_i(t)$  изменения температур и энтропий подсистем найдены, то законы изменения остальных величин  $V_i(t)$ ,  $p_i(t)$ ,  $E_i(t)$  могут быть определены из уравнений состояния. В техническом отношении важно то, что зависимость правых частей уравнений движения от  $T_i$  определяется лишь законами теплопередачи. Поэтому если и критерии оптимальности можно представить в форме, не зависящей от вида уравнений состояния, то оптимальные законы изменения переменных управления  $T_i(t)$  и состояния  $S_i(t)$  также не зависят от уравнений состояния, а определяются лишь законами теплопередачи. Это обстоятельство лежит, в частности, в основе того, что классические оптимальные термодинамические циклы в переменных  $T, S$  «универсальны» (т. е. не зависят от уравнений состояния рабочего тела).

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории усредненных оптимизационных задач [10–12]. Рассмотрим оптимизационную

задачу вида

$$\int_0^{\bar{t}} f_0(u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (15)$$

$$\dot{x}_i = f_i(u(t)), \quad x_i(0) = x_i^0; \quad x_i(\bar{t}) = \bar{x}_i; \quad i = \overline{1, n}, \quad u(t) \in U,$$

где  $x_i$  — фазовые координаты, а  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$  — управление. Эта задача приводится к виду усредненной задачи

$$(16) \quad \overline{f_0(u(t))} \rightarrow \min, \quad \overline{f_i(u(t))} = J_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad u(t) \in U,$$

где  $y_i = (\bar{x}_i - x_i^0) / \bar{t}$ , а черта означает среднее по времени. Специальным случаем задачи (16) является задача вида

$$(17) \quad \overline{f(z(t))} \rightarrow \min, \quad \overline{z(t)} = J_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad z(t) \in G,$$

где  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Задачу (16) можно свести к виду (17), переходя к новым управлениям  $z_i(t) = f_i(u(t))$ . Для этого определим множество  $G$  тех значений  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $z_i = f_i(u)$ , которые являются образами значений  $u \in U$ :

$$G = \{z: z_i = f_i(u), \quad i = \overline{1, n}; \quad u \in U\}.$$

Для каждого  $z \in G$  определим значение функции  $f(z)$  как оптимальное по  $u$  значение функции  $f_0(u)$  в задаче

$$(18) \quad f_0(u) \rightarrow \min, \quad f_i(u) = z_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad u \in U.$$

Если обозначить через  $\tilde{u}(z)$  оптимальное значение  $u$ , то  $f(z) = f_0(\tilde{u}(z))$ . Заметим, что в том случае, когда система уравнений  $f_i(u) = z_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  однозначно разрешима относительно  $u$  (при  $z \in G$ ),  $\tilde{u}(z)$  есть просто решение этой системы. Определенные таким образом множество  $G$  и функция  $f(z)$  формируют задачу (17). Как нетрудно видеть, оптимальное управление  $u^*(t)$  в задаче (16) получается из оптимального управления  $z^*(t)$  в задаче (17) по формуле  $u^*(t) = \tilde{u}(z^*(t))$ . Далее всегда будем сводить усредненные задачи (16) (и, следовательно, исходные (15)) к специальному виду (17). Поэтому ниже без ограничения общности рассматриваются лишь усредненные задачи вида (17).

Исходной в теории усредненных задач является лемма А. А. Ляпунова, в соответствии с которой множество  $\overline{D} \subset R^l$ , образованное точками  $w = (w_1, \dots, w_l)$  с координатами  $w_k = \overline{\varphi_k(u(t))}$ ,  $k = \overline{1, l}$  при всевозможных кусочно-непрерывных функциях  $u(t)$ , принимающих значения из множества  $U$ , является выпуклой оболочкой множества  $D \subset R^l$ , образованного точками  $z = (z_1, \dots, z_l)$  с координатами  $z_k = \varphi_k(u)$  при всевозможных значениях  $u \in U$ . Известная теорема К. Каратеодори утверждает, что каждая точка выпуклой оболочки  $\overline{D}$  множества  $D \subset R^l$  может быть представлена выпуклой комбинацией не более чем  $l+1$  точек, принадлежащих  $D$ . Применение леммы А. А. Ляпунова и теоремы К. Каратеодори позволяет свести усредненную задачу (17) к следующей задаче нелинейного программирования:

$$(19a) \quad \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j f(z^j) \rightarrow \min,$$

$$(19b) \quad \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j z^j = y, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_j = 1; \quad \gamma_j \geq 0, \quad z^j \in G.$$

Минимум в (19a) берется по наборам чисел  $\gamma_j$  и векторов  $z^j = (z_1^j, \dots, z_n^j)$ ,  $j = \overline{1, n+1}$ , удовлетворяющие ограничениям (19b), где  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Оптимальные значения величин  $\gamma_j$ ,  $z^j$  имеют следующий

смысл: оптимальное управление  $z^*(t)$  в усредненной задаче (17) может принимать не более  $n+1$  значений  $z^1, \dots, z^{n+1}$ , причем доля времени, в течение которого  $z^*(t)$  принимает значение  $z^j$ , равна  $\gamma_j$ . Оптимальное управление в усредненной задаче неединственно, поскольку значение функционала не зависит от последовательности, в которой управление принимает значения  $z^j$ . Очевидно, совершенно аналогичные выводы могут быть сделаны и применительно к задачам вида (16) и (15).

При решении конкретных задач важно заранее знать число  $m$  (не большее  $n+1$ ) значений, которые может принимать оптимальное управление, т. е. знать число отличных от нуля величин  $\gamma_j$ . Оставшаяся часть раздела посвящена формулировке утверждений, позволяющих в ряде случаев отвечать на этот вопрос.

*Утверждение 1.* Пусть множество  $G$  выпукло, а функция  $f(z)$  выпукла вниз на  $G$ . Тогда если  $y \in G$ , то  $m=1$ , и оптимальное управление  $z^*(t)=y$  постоянно на  $(0, \bar{t})$ .

Очевидно, в условиях утверждения 1 оптимальное управление существует тогда и только тогда, когда  $y \in G$ . В общем же случае задачи (17) необходимым условием существования оптимального управления является принадлежность  $y$  выпуклой оболочке множества  $G$ , что в дальнейшем и предполагается.

Перенумеруем отличные от нуля значения  $\gamma_j$  индексами  $j=\overline{1, m}$ , так что  $\gamma_j=0$  при  $j>m$ . Назовем значения  $z^j$ ,  $j=\overline{1, m}$  базовыми значениями оптимального управления или базовыми точками задачи (17). Выпуклая оболочка множества  $\{z^1, \dots, z^m\}$  образует симплекс  $K(y)$ . Обозначение  $K(y)$  содержит указание на зависимость базовых точек от параметров  $(y_1, \dots, y_n)$  в ограничениях задачи (17), так что вершины симплекса  $K(y)$  — базовые точки задачи (17) при заданном значении  $y \in R^n$ . Для определения числа  $m$  базовых точек оказывается полезной следующая теорема<sup>5</sup>.

*Теорема.* Пусть  $a, b$  — две точки из  $R^n$ . Тогда, если  $b \in K(a)$ , то множество вершин симплекса  $K(b)$  есть подмножество вершин симплекса  $K(a)$ .

*Замечание.* Вершины симплекса  $K(b)$  являются теми из вершин симплекса  $K(a)$ , выпуклая комбинация (с ненулевыми коэффициентами) которых дает точку  $b$ . Поэтому если точка  $b$  принадлежит внутренности симплекса  $K(a)$ , то множество вершин симплексов  $K(b)$  и  $K(a)$  совпадает и  $K(b)=K(a)$ . Если же точка  $b$  принадлежит границе симплекса  $K(a)$ , то  $K(b)$  является симплексом меньшей размерности и  $K(b) \subset K(a)$ . В обоих случаях минимальное значение функционала в задаче (17) при  $y=b$

равно  $\sum_{j=1}^m \mu_j f(z^j)$ , где  $z^j$ ,  $j=\overline{1, m}$  — вершины симплекса  $K(a)$ , а числа  $\mu_j$ ,

$j=\overline{1, m}$  ( $\mu_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ ) суть коэффициенты выпуклой комбинации

$$b = \sum_{j=1}^m \mu_j z^j.$$

*Следствие.* Пусть функция  $f(z)$  определена и строго выпукла на выпуклой оболочке множества  $G$ . Тогда, если  $y \notin G$ , то симплекс  $K(y)$  не содержит точек из  $G$ , отличных от своих вершин.

*Утверждение 2.* Пусть множество  $G$  замкнуто и является объединением  $l$  выпуклых множеств  $G_1, \dots, G_l$ , а функция  $f(z)$  определена и строго выпукла на выпуклой оболочке множества  $G$ . Тогда, если  $y \notin G$ , то каждое множество  $G_k$ ,  $k=\overline{1, l}$  содержит не более одной базовой точки и  $m \leq l$ ; кроме того, все базовые точки принадлежат границе множества  $G$ .

<sup>5</sup> Авторам не удалось найти в литературе утверждения, аналогичного этой теореме. Поэтому ее доказательство приведено в приложении.

В последующей части статьи понадобится некоторое ослабление условий утверждения 2 — в случае, когда функция  $f(z)$  выпукла не строго.

*Утверждение 3.* Пусть множество  $G$  имеет то же строение, что и в утверждении 2, функция  $f(z)$  выпукла (не обязательно строго) на выпуклой оболочке множества  $G$ , для любых  $v^k \in G_k$ ,  $k=1, \dots, l$  и при любых коэф-

фициентах  $\lambda_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^l \lambda_k = 1$ , хотя бы два из которых отличны от нуля, выполнено строгое неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^l \lambda_k v^k\right) < \sum_{k=1}^l \lambda_k f(v^k).$$

Тогда если  $y \in G$ , то справедливо заключение утверждения 2.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Пусть базовые значения управления в задаче (17) при  $y=a$  суть  $z^j$ , соответствующие доли времени равны  $\gamma_j > 0$ ,  $j=1, \dots, m$ ,  $\sum_{j=1}^m \gamma_j = 1$ , так что

$$(П.1) \quad a = \sum_{j=1}^m \gamma_j z^j,$$

а минимальное значение функционала  $\overline{f(z(t))}$  равно

$$(П.2) \quad f_{\min}(a) = \sum_{j=1}^m \gamma_j f(z^j).$$

Поскольку  $b \in K(a)$ , то  $b$  представимо выпуклой комбинацией

$$(П.3) \quad b = \sum_{j=1}^m \mu_j z^j,$$

где  $\mu_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ . В задаче (17) при  $y=b$  рассмотрим управление, принимающее значения  $z^j$  в течение промежутков времени, доля которых составляет  $\mu_j$ . Значение

функционала  $\overline{f(z(t))}$  на этом управлении равно  $\sum_{j=1}^m \mu_j f(z^j)$ . Утверждение теоремы,

очевидно, эквивалентно утверждению о том, что это управление оптимально в рассматриваемой задаче. Предположим противное, что оптимальным является другое управление с некоторыми базовыми значениями  $w^s$  и соответствующими долями времени  $v_s$ ,  $s=1, \dots, r$  (среди значений  $w^s$  должно быть хотя бы одно, отличное от всех  $z^j$ ). Это означает, что

$$(П.4) \quad b = \sum_{s=1}^r v_s w^s,$$

а оптимальное значение функционала  $\overline{f(z(t))}$  равно  $\sum_{s=1}^r v_s f(w^s)$ , и поэтому, в частности,

$$(П.5) \quad \sum_{s=1}^r v_s f(w^s) < \sum_{j=1}^m \mu_j f(z^j).$$

Покажем, что соотношения (П.4), (П.5) противоречат соотношениям (П.1)–(П.3), и тем самым докажем утверждение теоремы.

Рассмотрим числа  $\mu_j/\gamma_j$ ,  $j=1, m$  и выберем максимальное из них (если таких чисел несколько, выбираем любое). Пусть для определенности

$$(П.6) \quad \frac{\mu_1}{\gamma_1} \geq \frac{\mu_k}{\gamma_k}, \quad k=\overline{2, m}.$$

Очевидно,  $\mu_1 > 0$ , так как среди чисел  $\mu_j$  есть отличные от нуля. Вместо симплекса  $K(a)$  с вершинами  $z^1, \dots, z^m$  рассмотрим симплекс  $\bar{K}$  с вершинами  $b, z^2, \dots, z^m$ . Покажем, что  $a \in \bar{K}$ . Из (П.3) получаем

$$z^1 = \frac{1}{\mu_1} b - \frac{1}{\mu_1} \sum_{k=2}^m \mu_k z^k,$$

и поэтому из (П.1) имеем

$$a = \gamma_1 z^1 + \sum_{k=2}^m \gamma_k z^k = \frac{\gamma_1}{\mu_1} b + \sum_{k=2}^m \left( \gamma_k - \frac{\gamma_1}{\mu_1} \mu_k \right) z^k,$$

так что точка  $a$  представима в виде

$$(П.7) \quad a = \lambda_1 b + \sum_{k=2}^m \lambda_k z^k,$$

где

$$(П.8) \quad \lambda_1 = \frac{\gamma_1}{\mu_1}, \quad \lambda_k = \gamma_k - \frac{\gamma_1}{\mu_1} \mu_k, \quad k=\overline{2, m}.$$

В силу условия (П.6)  $\lambda_k \geq 0$  и, кроме того, как легко проверить,  $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ , так что, действительно,  $a \in \bar{K}$ . Используя (П.4), получаем из (П.7)

$$(П.9) \quad a = \sum_{s=1}^r \lambda_{1s} v_s w^s + \sum_{k=2}^m \lambda_k z^k.$$

Рассмотрим теперь в задаче (17) при  $y=a$  управление, которое принимает значения  $w^s, z^k$  в течение промежутков времени, доли которых составляют  $\lambda_{1s} v_s, \lambda_k$ ,

$s=\overline{1, r}, k=\overline{2, m}$  (очевидно,  $\sum_{s=1}^r \lambda_{1s} v_s + \sum_{k=2}^m \lambda_k = 1$ ). В силу (П.9) это управление до-

пустимо. Значение функционала на этом управлении равно

$$\bar{f} = \sum_{s=1}^r \lambda_{1s} v_s f(w^s) + \sum_{k=2}^m \lambda_k f(z^k).$$

Но в силу неравенства (П.5), определения (П.8) и соотношения (П.2) имеем

$$\bar{f} < \lambda_1 \sum_{j=1}^m \mu_j f(z^j) + \sum_{k=2}^m \lambda_k f(z^k) = f_{\min}(a).$$

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кричевский И. Р. Понятия и основы термодинамики. М.: Химия, 1970.
2. Розоноэр Л. И. Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход). III. – Автоматика и телемеханика, 1973, № 8, с. 82–103.
3. Curzon F. L., Alborn B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. – Amer. J. Physics, 1975, v. 43, p. 22–24.
4. Andressen B., Salamon P., Berry R. S. Thermodynamics in finite time: extremals for imperfect heat engines. – J. Chemical Physics, 1977, v. 66, № 4, p. 1574–1577.
5. Andressen B., Berry R. S., Nitzan A., Salamon P. Thermodynamics in finite time. I. The step-Carnot cycle. – Physical Review A, 1977, v. 15, № 5, p. 2086–2093.

6. Rubin M. H. Optimal configuration of a class of irreversible heat engines. I, II. — Physical Review A, 1979, v. 19, № 3, p. 1272–1276, 1277–1289.
7. Barrere M. Le role du temps dans l'optimisation des cycles thermodynamiques. — Revue General de Thermique, 1980, № 228, p. 995–1006.
8. Salamon P., Nitzan B. Finite time optimizations of a Newton's law Carnot cycle. — J. Chemical Physics, 1981, v. 74, № 6, p. 3546–3560.
9. Розоноэр Л. И., Цирлин А. М. Об оптимальных термодинамических процессах. — В кн.: VIII Всес. совещ. по проблемам управления. Тез. докл., кн. 1. М.—Таллин, 1980, с. 75–77.
10. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
11. Каплинский А. М., Пропой А. И. О стохастическом подходе к задачам нелинейного программирования. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 3, с. 122–133.
12. Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. М.: Энергия, 1976.

Поступила в редакцию  
10.XI.1981

## OPTIMAL CONTROL OF THERMODYNAMIC PROCESSES. I.

ROZONOER L. I., TSIRLIN A. M.

Problems in optimal control of thermodynamic systems are discussed. Unlike classical thermodynamic problems on maximal work and on optimal thermodynamic cycles the optimum is found among irreversible processes with fixed time and a finite power. Equations are given of controlled thermodynamic processes and some of their properties are discussed.