И. А. Комарчев, О 2-абсолютно суммирующих операторах в некоторых банаховых пространствах,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 4, 591–602

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 4 (1979)

О 2-АБСОЛЮТНО СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. А. Комарчев

В данной работе мы дадим необходимые и достаточные условия, чтобы для пространства (последовательностей) Орлича X выполнялось равенство: $\Pi_2(c_0, X) = L(c_0, X)$.

Вначале введем некоторые определения и факты, необходимые для доказательства основного результата.

Пусть X, Y — банаховы пространства. Через $L(X, Y)$ будем обозначать пространство линейных непрерывных операторов из X в Y, через X^*, Y^* — сопряженные пространства соответственно к X и Y.

Пространство всех сходящихся к нулю последовательностей будем обозначать через c_0. Пусть X — банахово пространство с базисом $(e_i)_{i<+\infty}$. Тогда через X^n будем обозначать линейную оболочку первых n элементов базиса.

Оператор $T \in L(X, Y)$ называется p-абсолютно суммирующим $(1 \leqslant p < +\infty)$, если существует такое число $C > 0$, что для любого натурального числа n и для любых $x_1, \ldots, x_n \in X$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| Tx_i \|^p\right)^{1/p} \leqslant C \sup_{x^* \in X^*,\ \|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x^* \rangle|^p\right)^{1/p}. \qquad (*)$$

Линейное пространство всех p-абсолютно суммирующих операторов из X в Y образует банахово пространство, если в нем ввести норму $\pi_p(T) = \inf C$, где inf берется по всем C, для которых справедливо $(*)$. Пространство всех p-абсолютно суммирующих операторов из X в Y с нормой

π_p обозначается через $\Pi_p(X, Y)$. Понятие p-абсолютно суммирующего оператора впервые появилось в [1]. Если каждый $T \in L(X, Y)$ является p-абсолютно суммирующим оператором, то будем писать $\Pi_p(X, Y) = L(X, Y)$.

Доказательство следующего предложения, на которое мы будем существенно опираться, можно найти в [2].

Предложение 1. *Пусть X — банахово пространство с нормированным безусловным базисом $(e_i)_{i<+\infty}$ и $(e_i^*)_{i<+\infty}$ — биортогональная к $(e_i)_{i<+\infty}$ система в X^*. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\Pi_2(c_0, X) = L(c_0, X)$,

2) *существует такое число $K > 0$, что для любых натуральных чисел m, n и для любого набора векторов $(x_i)_{i\leqslant m}$, $x_i \in X^n$ справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \| x_i \|^2\right)^{1/2} \leqslant K \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} | e_j^*(x_i) |^2\right)^{1/2} e_j \right\|.$$

Дадим определение пространств последовательностей Орлича. Мы всюду будем рассматривать вещественные пространства. Пусть M — выпуклая, возрастающая функция на $[0, +\infty)$ такая, что $M(0) = 0$, $M(t) > 0$, при $t > 0$. Тогда M называется функцией Орлича. Если M удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\, M(2x)/M(x) < +\infty$, то говорят, что функция M удовлетворяет Δ_2-условию в 0. Легко заметить, что если функция Орлича M удовлетворяет Δ_2-условию в нуле, то $\sup\limits_{0<x\leqslant K} M(2x)/M(x) < +\infty$ для любого числа $K < +\infty$.

Определение. Пусть M — функция Орлича. Рассмотрим l_M — пространство всех числовых вещественных последовательностей $x = (x_i)_{i<+\infty}$, для которых конечна следующая норма:

$$\| x \| = \inf \left\{t > 0\colon \sum_{i=1}^{\infty} M(|x_i|/t) \leqslant 1\right\}.$$

Тогда l_M с этой нормой называется пространством последовательностей Орлича (в дальнейшем будем его называть просто пространством Орлича).

Пространства Орлича являются банаховыми пространствами. Кроме того, если функция Орлича M удовлетворяет Δ_2-условию, то последовательность векторов $(e_i)_{i<+\infty}$, где $e_i = (\delta_{ij})_{j<+\infty}$, а δ_{ij} — символ Кроккера, образует в l_M

безусловный базис. Этот базис обычно называют стандартным. Далее мы будем считать, что все рассматриваемые нами функции Орлича удовлетворяют Δ_2-условию.

Теперь приступим к изложению основного результата данной работы. Вначале введем определение.

Определение. Пусть T — вещественная функция, заданная на отрезке $[b, a]$. Будем говорить, что T квазивогнута, если существует число $C > 0$ такое, что для любого натурального числа n и для любых $x_1, \ldots, x_n \in [b, a]$ справедливо неравенство

$$T\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n\right) \geqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} T(x_i)\right)/n.$$

В определении квазивогнутости мы можем вместо замкнутого интервала рассматривать открытый или полуоткрытый интервал.

ТЕОРЕМА. *Пусть M — функция Орлича* [1]. *Рассмотрим функцию M_1, определенную на* $[0, 1]$ *и задаваемую равенством* $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ $(x \in [0, 1])$. *Эквивалентны следующие утверждения*:

1) $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$,

2) M_1 *квазивогнута*.

Сначала сделаем одно замечание. Нам достаточно доказать теорему только для случая $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x) = 1$. Действительно, если $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x) = r$, то рассмотрим $N(x) = M(x)/r$ (функция N определена корректно, так как $r > 0$).

Легко видеть, что отображение $T: l_N \to l_M$, задаваемое равенствами $Tf_i = e_i$ (здесь $(f_i)_{i<+\infty}$, $(e_i)_{i<+\infty}$ — стандартные базисы в l_N и l_M соответственно), является изоморфизмом пространства l_N на l_M.

Но если банаховы пространства X и Y изоморфны, то, как легко видеть из определения p-абсолютно суммирующего оператора, равенство $\Pi_p(Z, X) = L(Z, X)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\Pi_p(Z, Y) = L(Z, Y)$ (здесь Z — произвольное банахово пространство, p — произвольное вещественное число из $[1, +\infty)$). Поэтому при доказательстве мы будем считать, что $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x) = 1$.

---

[1] Напомним, что мы рассматриваем только функции Орлича, удовлетворяющие Δ_2-условию в нуле. (Для краткости мы иногда будем писать просто Δ_2-условие вместо Δ_2-условия в нуле.)

ЛЕММА 1. *Пусть M — функция Орлича, удовлетворяющая Δ_2-условию, $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x)=1$. Если существует такое $L>0$, что для любого натурального числа n и для любых чисел $0\leqslant x_i\leqslant 1$ таких, что $1\leqslant\sum_{j=1}^{n} M(x_j)\leqslant 2$, справедливо неравенство $M\left(\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)/n}\right)\geqslant L/n$, то функция M_1 квазивогнута.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число m и такие вещественные числа $x_1,\ldots,x_m$ из $[0, 1]$ (не все нулевые), что

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)/m}\right)\leqslant\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} M(x_i)\right)/m. \tag{1}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$\sum_{i=1}^{m} M(x_i)\geqslant 1. \tag{2}$$

Мы можем считать $X=(x_i)_{i\leqslant m}$ невозрастающей последовательностью.

Рассмотрим натуральное число n и конечную последовательность натуральных чисел $(k_i)_{i\leqslant n}$, удовлетворяющих условиям

$$k_0=0,\quad k_n=m,\ k_i<k_{i+1},$$

$$1\leqslant\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} M(x_j)\leqslant 2\quad\text{для}\quad i<n$$

$$\text{и}\quad\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} M(x_j)\leqslant 2. \tag{3}$$

Существование таких n и $(k_i)_{i\leqslant n}$ следует из (2) и из того, что $r=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} M(x)=1$. Мы можем считать n достаточно большим, что следует из того, что функция M удовлетворяет Δ_2-условию в 0. Мы будем считать $n\geqslant 8$. Мы также можем считать, что $l=m/n$ — целое число. Действительно, если это не так, то мы вместо последовательности $(x_i)_{i\leqslant m}$ рассмотрим последовательность $(y_i)_{i\leqslant([l]+1)n}$ (здесь $[l]$ обозначает целую часть числа l), где $y_i=x_i$ при $i\leqslant m$ и $y_i=0$ при $i>m$. Тогда неравенство (1) заменится на неравенство

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{([l]+1)n} y_i^2\right) / (([l]+1)n)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{([l]+1)n} y_i^2\right) / m}\right) \leqslant \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{([l]+1)n} M(y_i)\right) / m \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{([l]+1)n} M(y_i)\right) / (([l]+1)n).$$

Итак, не умаляя общности, мы будем считать, что l — целое число. Для удобства переобозначим элементы последовательности $(x_i)_{i \leqslant m}$, а именно, рассмотрим $p_i = k_{i+1} - k_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ и положим $x_{ij} = x_r$, если $r = k_i + j$ $(1 \leqslant j \leqslant k_{i+1} - k_i)$. Рассмотрим q_i $(i = 0, \ldots, n-1)$, определяемые равенствами $q_i = \min(l, p_i)$, и рассмотрим множества $Y_i = \{x_{ij} : j \leqslant q_i\}$, $Z_i = \{x_{ij} : j > l\}$. Положим $Y = \bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i$, $Z = \bigcup_{i=0}^{n-1} Z_i$; тогда $Z \cap Y = \phi$ и $Z \cup Y = X$. Докажем, что для любого $y \in Z$ справедливо неравенство $M(y) \leqslant 2/l$. Действительно, пусть $M(y) > 2/l$. По определению Z существуют j, i такие, что $y = x_{ij}$ и $j > l$. Так как $x_{ik} \geqslant x_{ij}$ для $1 \leqslant k \leqslant j$ ($(x_j)_{j<m}$ — не возрастающая последовательность), то

$$\sum_{r=1}^{p_i} M(x_{ir}) \geqslant \sum_{r=1}^{j} M(x_{ir}) \geqslant \sum_{r=1}^{j} M(x_{ij}) > l2/l = 2.$$

Мы получаем противоречие с неравенством (3). Сейчас мы произведем некоторую перестройку множеств $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$. Возьмем Y_0. Если $q_0 < l$, то выберем $(l - q_0)$ произвольных элементов из Z. Обозначим их $y_1, \ldots, y_{l-q_0}$. Полагаем $Y_0' = Y_0 \cup \{y_1, \ldots, y_{l-q_0}\}$. Заметим, что такие всегда найдутся, так как в Z содержится $\sum_{i=0}^{n-1}(l - q_i)$ элементов, а $q_i \leqslant l$ для любого $i \leqslant n-1$. Если $q_0 = l$, то множество Y_0 не изменяем, принимаем $Y_0' = Y_0$ и сразу переходим к Y_1. Рассматриваем множество $Z_0 = Z \setminus \{y_1, \ldots, y_{l-q_0}\}$, если $q_0 < l$, и $Z_0 = Z$, если $q_0 = l$. Точно таким же способом, как и Y_0', строим Y_1', только роль Z будет играть множество Z_0 и т. д. В результате у нас получаются множества $Y_0', \ldots, Y_{n-1}'$ такие, что

$$Y_i' \cap Y_j' = \phi \qquad (i \neq j); \qquad \bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i' = X,$$

и в каждом Y_i' содержится ровно l элементов. Переобозначим элементы Y_i', а именно, элементы Y_i' будем обозначать

u_{ij} $(j \leqslant l)$. Нетрудно заметить, что для любого $i \leqslant n-1$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}) \leqslant 4. \tag{4}$$

Действительно, пусть $Y_i' = \{x_{i1}, \ldots, x_{iq_i}, z_1, \ldots, z_{(l-q_i)}\}$, где $z_j \in Z$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{q_i} M(x_{ij}) + \sum_{k=1}^{l-q_i} M(z_k) \leqslant 2 + (l-q_i)\, 2/l \leqslant 4$$

(здесь использовано неравенство $M(z) \leqslant 2/l$ для $z \in Z$). Неравенство (1) в новых обозначениях будет выглядеть так:

$$M\left(\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2 \Big/ (nl)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij})/(nl). \tag{5}$$

Из (4) и (5) сразу вытекает

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2\right) \Big/ (nl)}\right) \leqslant \varepsilon 4/l. \tag{6}$$

Теперь нашей задачей будет оценить величину

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2\right) \Big/ (nl)}\right)$$

снизу и, используя произвольность $\varepsilon > 0$, получить противоречие. Обозначим через A множество тех $i \leqslant n-1$, для которых

$$\sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}) \geqslant 1/10. \tag{7}$$

Тогда $|A| \geqslant n/8$ (здесь через $|A|$ обозначается мощность множества A). Предположим противное: $|A| < n/8$. Оценим сверху следующие суммы:

$$\sum_{i \in A} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}), \qquad \sum_{i \notin A} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}).$$

Используя неравенство (4), получаем

$$\sum_{i \in A} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}) \leqslant \sum_{i \in A} 4 < 4n/8 = n/2. \tag{8}$$

Для второй суммы из определения множества A вытекает оценка

$$\sum_{i \notin A} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}) < \sum_{i \notin A} 1/10 \leqslant n/10. \tag{9}$$

Складывая неравенства (8) и (9) и учитывая, то, что $n \geqslant 8$, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}) = \sum_{i \in A} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}) + \\ + \sum_{i \notin A} \sum_{j=1}^{l} M(u_{ij}) < n-1. \qquad (10)$$

Но в то же время, вспоминая, что последовательность $(u_{ij})_{i \leqslant n-1,\, j \leqslant l}$ есть в точности последовательность $(x_i)_{i \leqslant m}$, и используя (3), приходим к неравенству $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=l}^{l} M(u_{ij}) \geqslant n-1$, которое противоречит (10). Не умаляя общности, мы можем считать, что (7) выполнено для $i \leqslant [n/8]-1$. Так как M удовлетворяет Δ_2-условию, то из неравенства $15\,[n/8] \geqslant n$ следует, что существует число $P > 0$, такое, что

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{[n/8]-1} \sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2\right) / ([n/8]\, l)}\right) \leqslant \\ \leqslant PM\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2\right) / (nl)}\right). \qquad (11)$$

Здесь P зависит только от функции M. Возьмем теперь $i_0 \leqslant [n/8]-1$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{l} u_{i_0 j}^2 = \min\left\{\sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2 \colon \quad i \leqslant [n/8]-1\right\}.$$

Тогда из монотонности M вытекает, что

$$M\left(\sqrt{\sum_{i=0}^{[n/8]-1} \sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2) / ([n/8]\, l)}\right) \geqslant \\ \geqslant M\left(\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{l} u_{i_0 j}^2\right) / l}\right). \qquad (12)$$

Так как $1/10 \leqslant \sum_{j=1}^{l} M(u_{i_0 j}) \leqslant 4$ (это следует из (4) и (7)), то из того, что функция M — выпуклая, строго возрастающая и удовлетворяет Δ_2-условию, следует, что существуют числа $0 < t_1 < t_2$ (зависящие только от M) и число c, $t_1 \leqslant c \leqslant t_2$, которое, вообще говоря, зависит от $(u_{i_0 j})_{j \leqslant l}$, такие, что $\sum_{j=1}^{l} M(cu_{i_0 j}) = 1$. Из этого равенства и из предположения леммы следует неравенство $M\left(c\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{l} u_{i_0 j}^2\right) / l}\right) \geqslant L/l$. Используя опять то, что M удовлетворяет Δ_2-условию и что $c \leqslant t_2$, мы получаем, что существует такая константа $P_1 > 0$ (зависящая только от M), что

$$M\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2 / l}\right) \geqslant P_1/l. \qquad (13)$$

Сравнивая (11), (12), (13), получаем

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{l} u_{ij}^2\right) / (nl)}\right) \geqslant P_1/Pl$$

и, учитывая (6), можем написать $P_1/P \leqslant 4\varepsilon$. Отсюда следует, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то случай I) не имеет места.

II) Пусть теперь $\sum_{i=1}^{m} M(x_i) < 1$. Положим $\sum_{i=1}^{m} M(x_i) = t$. Так как $t > 0$, то можно подобрать такое натуральное число N, что $Nt < 1$, $(N+1)t \geqslant 1$. Следовательно, $1 \leqslant (N+1)t \leqslant 2$. Возьмем теперь семейство $(u_{ij})_{i\leqslant m, j\leqslant N+1}$, где $u_{ij} = x_i$ для любого $j \leqslant N+1$. Тогда

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N+1} u_{ij}^2\right) / (m(N+1))}\right) = M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)/m}\right) \qquad (14)$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N+1} M(u_{ij})/(m(N+1)) = \left(\sum_{i=1}^{m} M(x_i)\right)/m. \qquad (15)$$

Из (1) и равенств (14), (15) получаем

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N+1} u_{ij}^2\right)/(m(N+1))}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N+1} M(u_{ij})\right)/(m(N+1)) \leqslant 2\varepsilon/(m(N+1)),$$

что противоречит, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, предположение леммы и неравенствам

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N+1} M(u_{ij}) \leqslant 2.$$

Итак, лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть M — функция Орлича. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$,

2) *существует вещественное число $C > 0$ такое, что для любых натуральных чисел m, n и вещественных чисел λ_{ij} $(i \leqslant m,\ j \leqslant n)$, удовлетворяющих соотношениям*

$$0 \leqslant \lambda_{ij} \leqslant 1 \qquad (i \leqslant m,\ j \leqslant n), \qquad (16)$$

$$1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} M(\lambda_{ij}) \leqslant 2, \tag{17}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}^2)/m}\right) \geqslant C. \tag{18}$$

Доказательство. Докажем сначала, что условие 2) из предложения 1 эквивалентно следующему условию 2'):

2') Существует такое число $K > 0$, что для любых натуральных чисел m и n и для любых нормированных векторов $x_i \in X^n$ $(i = 1, \ldots, m)$ выполняется неравенство

$$\sqrt{m} \leqslant K \left\| \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} |e_j^*(x_i)|^2)^{1/2} e_j \right\|. \tag{19}$$

Очевидно, что в доказательстве нуждается лишь импликация 2') $\Rightarrow$ 2). Пусть справедливо 2'). Рассмотрим произвольные векторы

$$x_1, \ldots, x_m \in X^n, x_i \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Найдем натуральное число $i_0 \leqslant m$, для которого $a = \min \| x_i \| = \| x_{i_0} \|$, возьмем натуральные числа k_i $(i = 1, \ldots, m)$ такие, что

$$k_i a^2 \leqslant \| x_i \|^2 \leqslant 2k_i a^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

и положим $k_0 = 0$. Рассмотрим последовательность $y_j \in X^n$ $(i = 1, \ldots, J)$, $J = \sum_{i=0}^{m} k_i$, определяемую следующим образом:

$$y_j = x_i/(\sqrt{k_i} a), \text{ если } 1 + \sum_{l=0}^{i-1} k_l \leqslant j \leqslant \sum_{l=0}^{i} k_l.$$

Тогда $1 \leqslant \| y_j \| \leqslant \sqrt{2}$ $(j = 1, \ldots, J)$. Для векторов $y_j/ \| y_j \|$ $(j = 1, \ldots, J)$ справедливо неравенство (19). Отсюда очевидным образом вытекает, что

$$(\sum_{j=1}^{J} \| y_j \|^2)^{1/2} \leqslant \sqrt{2} K \left\| \sum_{j=1}^{n} (\sum_{l=1}^{J} |e_j^*(y_l)|^2)^{1/2} e_j \right\|.$$

Последнее неравенство, как легко заметить, переписывается таким образом:

$$(\sum_{i=1}^{m} \| x_i \|^2)^{1/2} \leqslant \sqrt{2} K \left\| \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} |e_j^*(x_i)|^2)^{1/2} e_j \right\|,$$

что и завершает доказательство импликации 2') $\Rightarrow$ 2)

Перейдем теперь собственно к доказательству леммы 2. Убедимся, что 2) $\Rightarrow$ 1). Докажем что справедливо 2'), а тогда из предложения 1 и эквивалентности 2') второму пункту предложения 1 будет сразу вытекать равенство $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$.

Рассмотрим произвольные натуральные m, n и нормированные векторы $x_i \in X^n$ ($i = 1, \ldots, m$). Докажем, что

$$\sqrt{m} \leqslant C_1 \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |e_j^*(x_i)|^2\right)^{1/2} e_j \right\|,$$

где $C = 1/C_1$ — число, фигурирующее в лемме 2. Это эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(C_1 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} |e_j^*(x_i)|^2\right)/m}\right) \geqslant 1. \tag{20}$$

Если мы докажем, что

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} |e_j^*(x_i)|\,/m}\right) \geqslant C, \tag{21}$$

то, воспользовавшись выпуклостью M, сразу получим (20). Так как $\| x_i \| = 1$ ($i = 1, \ldots, m$), то для любого $i \leqslant m$

$$\sum_{j=1}^{n} M(|e_j^*(x_i)|) = 1.$$

Теперь для доказательства (21) достаточно воспользоваться утверждением 2) из леммы 2.

Обратно, пусть $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$. Тогда для доказательства п. 2) леммы 2 остается воспользоваться предложением 1, взяв $x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$ ($i = 1, \ldots, m$). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. 1) Пусть $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$. Докажем, что тогда функция $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ квазивогнута. Пусть это не так. Тогда по лемме 1 для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число m и $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ ($i = 1, \ldots, m$), удовлетворяющие неравенству $1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} M(x_i) \leqslant 2$, для которых $M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)/m}\right) \leqslant \varepsilon/m$. Рассмотрим теперь матрицу вещественных чисел $(\lambda_{ij})_{i \leqslant m,\, j \leqslant m}$, положив $\lambda_{i1} = x_j$, а остальные строки в которой образуются циклической перестановкой первой строки. Тогда

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} M(\lambda_{ij}) \leqslant 2 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} M\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij}^2)/m}\right) \leqslant (\varepsilon/m) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} M(\lambda_{ij}) \leqslant 2\varepsilon,$$

что противоречит лемме 2, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

2) Пусть теперь $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ квазивогнута. Для доказательства равенства $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$ воспользуемся леммой 2.

Рассмотрим m, n и набор чисел $(\lambda_{ij})_{i \leqslant m, j \leqslant n}$, удовлетворяющий неравенствам (16) и (17). Докажем (18). Пусть $C > 0$ — константа из определения квазивогнутости функции M_1. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} M\left(\sqrt{(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij}^2)/m}\right) \geqslant (C/m) \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} M(\lambda_{ij}) \geqslant C,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть M — дифференцируемая функция Орлича с Δ_2-условием и $N(x) = M'(x)/x$ — убывающая функция на* $(0, 1]$. *Тогда* $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$.

Доказательство. Рассмотрим $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ $(x \in (0,1])$. Тогда функция $M_1'(x) = M'(\sqrt{x})/(2\sqrt{x})$ монотонно убывает. Отсюда следует, что функция M_1 вогнута на $(0,1]$, а поэтому и квазивогнута на этом интервале, и нам остается только применить теорему. Для доказательства дальнейших следствий потребуются некоторые определения и результаты.

Определение. Пусть $p \geqslant 2$, X — банахово пространство. Говорят, что X удовлетворяет p-свойству Орлича, если для любого безусловно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в X сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^p$.

Определение. Пусть $p \geqslant 2$. Банахово пространство X называется пространством котипа p, если существует число $C > 0$ такое, что для любого натурального n и для любых $x_j \in X$ $(j = 1, \ldots, n)$ справедливо неравенство

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\|^2 dt\right)^{1/2} \geqslant C \left(\sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^p\right)^{1/p}. \qquad (22)$$

Здесь $r_j(t) = \operatorname{sign} \sin (2^{j-1} 2\pi t)$ — функция Радемахера. Иначе неравенство (22) можно переписать так:

$$\left((1/2^n) \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right\|^2\right)^{1/2} \geqslant C \left(\sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^p\right)^{1/p}.$$

Хорошо известно (см., например, [2]), что если для банахова пространства X справедливо равенство $\Pi_2(c_2, X) = L(c_0, X)$, то X удовлетворяет 2-свойству Орлича. Справедливо также следующее утверждение (см. [3]).

Предложение. *Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом. Тогда равенство $\Pi_2(c_0, X) = L(c_0, X)$ справедливо тогда и только тогда, когда X — пространство котипа 2.*

С помощью этих фактов можно получить дальнейшие следствия теоремы.

Следствие 2. *Пусть M — функция Орлича, удовлетворяющая Δ_2-условию, $M_1(x) = M(\sqrt{x})$. Если M_1 квазивогнута, то пространство l_M удовлетворяет 2-свойству Орлича.*

Следствие 3. *Пусть M — функция Орлича с Δ_2-условием. Тогда пространство l_M является пространством котипа 2 тогда и только тогда, когда функция M_1 квазивогнута.*

Автор благодарит Б. М. Макарова за помощь в работе.

Ленинградский государственный
университет

Поступило
24.I.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Pietsch A., Absolute p-summierende Abbildungen in normierten Raumen, Studia Math., 28 (1967), 333—353.

[2] Dubinsky E., Pełczyncki A., Rosenthal H. P., On Banach spaces X for which $\Pi_2(L_\infty, X) = B(L_\infty, X)$, Studia Math; **44** (1972), 617—648.

[3] Maurey B., Theorems de factorisation pour les operateurs lineaires á valeurs dans fes espaces L_p, Asterisque, 11 (1974), 1 — 194.