Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104

УДК 539.42

Дата: поступления статьи: 12.09.2022
после рецензирования: 08.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

Д.М. Петрова
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: petrova_darya96@mail.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0666-9878
А.В. Миронов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mironov.sv@ssau.ru. ORCID: http://orcid.org/000-0002-0666-9878
А.А. Буханько
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: abukhanko@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2074-7422
Р.М. Жаббаров
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: zhabbarov.rm@ssau.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9340-8512

К ВОПРОСУ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО И ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА М. УИЛЬЯМСА

АННОТАЦИЯ

В статье определяются поля напряжений вблизи кончиков математических разрезов в изотропной линейно-упругой пластине с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами, лежащими на одной прямой, разной длины с помощью двух подходов – экспериментального, основывающегося на методе цифровой фотомеханики, и численного, опирающегося на вычислениях методом конечных элементов. Для представления поля напряжений у кончика разреза применяется многочленный ряд Уильямса — каноническое представление поля у вершины математического разреза двумерной задачи теории упругости для изотропных сред. Главная идея исследования заключается в учете регулярных (неособых) слагаемых ряда и анализе их воздействия на целостное описание поля напряжений в непосредственной близости вершины разреза. В работе были сохранены и определены первые пятнадцать коэффициентов ряда Макса Уильямса в соответствии с экспериментальными картинами изохроматических полос и конечно-элементным моделированием. Для извлечения коэффициентов ряда М. Уильямса использовался переопределенный метод, предназначенный для решения систем алгебраических уравнений, число которых существенно больше неизвестных – амплитудных множителей. Продемонстрировано влияние неособых слагаемых ряда Уильямса при обработке экспериментальной картины интерференционных полос. Установлено, что сохранение слагаемых высокого порядка малости позволяет расширить область, примыкающую к кончику трещины, из которой можно выбирать экспериментальные точки. Конечно-элементное исследование проведено в системе инженерного анализа SIMULIA Abaqus, в которой воспроизведены экспериментальные образцы, испытанные в натурном эксперименте. Показано, что результаты, полученные двумя методами, хорошо согласуются друг с другом.

Ключевые слова: метод цифровой фотоупругости; изохроматические полосы; метод конечных элементов; многопараметрическое асимптотическое разложение Уильямса у кончика трещины; переопределенный метод.

Цитирование. Петрова Д.М., Миронов А.В., Буханько А.А., Жаббаров Р.М. К вопросу экспериментального и численного определения коэффициентов многопараметрического ряда М. Уильямса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 88–104. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Петрова Д.М., 2022
Дарья Михайловна Петрова — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
© Миронов А.В., 2022
Александр Владимирович Миронов — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
© Буханько А.А., 2022
Анастасия Андреевна Буханько — исполнительный директор Естественнонаучного института, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
© Жаббаров Р.М., 2022
Рамиль Муритович Жаббаров — ассистент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Количественные характеристики напряжений и перемещений в полном поле в конструкционных материалах имеют жизненно важное значение для решения различных инженерных задач, где распределения напряжений и деформаций определяют разрушение и нестабильность материалов и элементов конструкций [1–8]. Оценка и прогнозирование безопасности и срока службы металлических конструкций, таких как лопасти авиационных двигателей и ракетные снаряды, также требуют полного понимания распределения напряжений и деформаций вокруг внутренних дефектов в элементах конструкций. Кроме того, оптимальная конструкция фотоэлектрических компонентов, которая включает в себя уменьшение интерференции вызванного напряжением двулучепреломления в оптических волокнах, зависит от остаточного напряжения, на которое влияет распределение внутренних перемещений материалов. Для определения напряжений и смещений в полном поле были разработаны различные экспериментально-механические методы, такие как методы фотоупругости, муара, спекл-интерферометрии, голографической интерферометрии и корреляции цифровых изображений [5]. Основываясь на интерференционной полосе, вызванной временным двулучепреломлением прозрачных материалов, техника фотоупругости позволяет определять напряжение полного поля в тестируемых моделях. Методы муара, включая геометрический муар, муаровую интерференцию и методы выборки муара, были разработаны для измерения полей смещения путем анализа муаровых полос. Для корреляции цифровых изображений полное смещение поля может быть рассчитано путем отслеживания изменения пространственного положения спеклов. Для измерения полей напряжений была предложена фотоупругость, а для определения полей смещения были разработаны методы корреляции муара и цифровых изображений. Метод фотоупругости является одним из классических методов для исследования напряжений и деформаций в твердых деформируемых телах [1–17]. Исследования напряжений методом фотоупругости начались еще в прошлом веке [1–4]. Метод постоянно совершенствуется и не теряет своей актуальности [5–17]. Можно даже утверждать, что сегодня метод фотоупругости переживает этап возрождения, ибо количество работ, посвященных результатам, значительно увеличилось. Одна из последних работ К. Рамеша [5] посвящена современному применению фотоупругости в разных областях естествознания, инженерии, медицины и биологии, широким возможностям этого метода. В [5] автор показал, что метод фотоупругости дает простое решение задач, которые довольно сложно решить численно. Многие современные работы посвящены технологии проведения экспериментов на фотоупругость и распознаванию полученных картин изохром [9–11]. Более того, именно метод фотоупругости, по всей видимости, стал первым методом, который активно используется и апробируется при восстановлении интерференционных картин методами машинного обучения и в целом искусственноного интеллекта. Поэтому с точки зрения развития методов построения искусственных изображений изохроматических полос еще более важными и актуальными становятся задачи извлечения информации из экспериментальных изображений.

В механике хрупкого разрушения одним из направлений современных исследований является определение поля напряжений у вершины трещины, поскольку компоненты напряжений входят в критерии хрупкого разрушения, определяющие прочность, живучесть и целостность конструкций. Для воссоздания составляющих напряжений в теории и на практике особенно часто используется асимптотическое представление поля напряжений Макса Уильямса [12–17]:

$$\sigma_{ij}(r,\vartheta) = \sum_{m=1}^{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^m r^{\frac{l}{2}-1} \tilde{\sigma}_{m,ij}^{(l)}(\vartheta), \tag{1.1}$$

где r, θ – полярные координаты с полюсом в исследуемой вершине трещины (рис. 1.1).

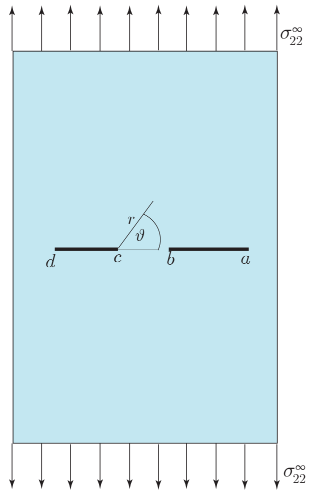

Рис. 1.1. Схематичное изображение исследуемого образца с двумя коллинеарными трещинами, лежащими на одной прямой
Fig. 1.1. Scheme of the studied specimen with two collinear cracks lying on one straight line

В вышеприведенном асимптотическом представлении Уильямса (1.1) необходимо определять неизвестные коэффициенты поля напряжений у вершины трещины. Даже нахождение первого коэффициента ряда – масштабного множителя многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса $a_1^1 = K_I/\sqrt{2\pi}$ — коэффициента интенсивности напряжений (КИН) является предметом широких исследований [12–13]. Многими авторами отмечается, что одной из важных задач при определении КИН посредством фотоупругости является установление подходящей области перед вершиной трещины для сбора данных. В [12] метод цифровой фотоупругости использовался для нахождения коэффициента интенсивности напряжений для упругого образца с жестким включением. Эксперименты проводятся с двумя конфигурациями образцов. В одном из образцов жесткое включение ориентировано вертикально, по направлению нагрузки, а в другом – под заданным углом, наклонно. Переопределенный метод (метод наименьших квадратов) использовался для решения уравнений относительно амплитудных (масштабных) коэффициентов разложения М. Уильямса. В исследовании [13] было выведено несколько зависимостей для коэффициента интенсивности напряжений. Данные зависимости были получены в результате эксперимента, где наблюдалось распространение гидравлической трещины через ортогональный разрыв в слоистых образованиях с использованием фотоупругих, прозрачных, деформируемых и вязкоупругих характеристик желатина.

Долгое время в критерий разрушения входил только коэффициент интенсивности напряжений, но в последние двадцать лет было определено, что его недостаточно на сравнительно больших расстояниях от вершины трещины (при расширении окрестности кончика трещины) [14–23]. В статье [14] метод фотоупругости использовался для оценки коэффициентов разложения М. Уильямса вблизи вершин вырезов и надрезов. Было изучено влияние размеров и углов раствора выреза на напряженое состояние элементов. В работе [17] были найдены коэффициенты разложения Уильямса методом фотоупругости и методом конечных элементов. Было показано, что полученные значения хорошо согласуются друг с другом и соотвествуют значениям, полученным с помощью аналитических методов. В [17] была исследована пластина с одной центральной горизонтальной трещиной. Для обработки изображений изохроматических полос, полученных в ходе эксперимента, было разработано приложение на языке Java, которое позволяет определить наиболее темные точки на изохромах и реализовать переопределенный метод для вычисления коэффициента интенсивности напряжений, Т-напряжения и коэффициентов более высокого порядка методом фотоупругости. Удержание высших приближений позволяет дать более аккуратную и строгую оценку полей напряжений, деформаций и смещений вблизи вершины трещины и сделать обширнее область применимости разложения в ряд М. Уильямса.

Наряду с методом фотоупругости для получения коэффициентов разложения М. Уильямса в работе [17] использован метод конечных элементов (МКЭ), который получил особое развитие и распространение среди методов численного анализа в настоящее время [18–23]. В [22] МКЭ применяется для определения коэффициентов асимптотического поля у вершины трещины в анизотропном теле. В данной работе дано точное решение задачи о нахождении параметров механики разрушения у вершины трещины для бесконечной пластины с центральной трещиной. В [23] предлагается алгоритм определения коэффициентов мультипараметрического асимптотического степенного ряда Уильямса в полудисках с надрезом. Исследовались образцы с разными углами надреза для моделирования смешанного нагружения. Алгоритм решения основан на технике метода конечных элементов и переопределенном методе, который также использовался для оценки масштабных множителей, полученных из фотоупругого эксперимента. В [24] МКЭ используется для нахождения коэффициента интенсивности напряжений и Т-напряжения. В [24] предлагается переопределенный метод для образцов с трещинами, находящихся в разных режимах нагрузки (нормальный отрыв, поперечный сдвиг или смешанное нагружение). Тело с трещиной подвергается воздействию статической или динамической нагрузки. В развитом методе координаты узлов и значения напряжений в узлах вокруг вершины трещины, полученные с помощью метода конечных элементов (FEM) или расширенного метода конечных элементов (XFEM), вводятся в асимптотическое разложение Уильямса. Затем составляется переопределенная система уравнений, и оптимальное решение достигается путем решения этих уравнений с использованием метода наименьших квадратов. Для проверки точности данного метода исследуются различные конфигурации тел с трещинами (плоские образцы с двумя боковыми надрезами). Полученные коэффициенты интенсивности напряжений и Т-напряжения зависят от количества и расположения узлов, выбранных вокруг вершины трещины, и сетки вокруг вершины трещины. Результаты показывают, что предложенный метод достаточно прост и удобен для получения первых двух коэффициентов ряда Уильямса при статическом или динамическом нагружении. Удовлетворительные результаты достигаются в том случае, когда координаты и компоненты напряжения узлов вокруг вершины трещины выбраны достаточно точно. Предложенный метод также может быть использован для расчета коэффициентов разложения Уильямса более высокого порядка. Несомненно, высшие приближения ряда Уильямса значительно влияют на содержательное описание полей у кончика дефекта.

В настоящей статье коэффициенты разложения М. Уильямса определялись методом фотоупругости и методом конечных элементов. В качестве объекта исследования была выбрана пластина с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами, лежащими на одной прямой, разной длины. Используемая техника вычисления амплитудных множителей решения, представляемого в рядах, базируется на подходе, описанном в [8] и [16], где дано описание разработанного приложения для автоматического извлечения экспериментальных точек из изображений, получаемых методом цифровой фотоупругости. Однако акцент в настоящей работе делается на сравнении теоретического, экспериментального и численного решения для тонкой пластины с двумя разрезами. Показано, что сочетание техники фотоупругости и конечно-элементного подхода позволяет реконструировать ряд Уильямса, дающий аналитическое описание полей напряжений вблизи кончика трещины. Особый фокус внимания сосредоточен на определении коэффициентов мультипараметрического ряда Уильямса и на эффекте влияния неособых членов ряда на целостное и содержательное описание полей у кончика разреза. На основе экспериментальных результатов с использованием программного обеспечения, осуществляющего метод конечных элементов, приводятся две численные модели. Численные результаты для поля напряжений хорошо согласуются с фотоупругим экспериментом, который подтверждает проведенный численный анализ.

2. Многопараметрическое асимптотическое разложение Уильямса вблизи вершины трещины

Все многообразие задач о трещинах отображается в коэффициентах a_l^m, определение которых составляет важную научную проблему. В настоящей работе определены коэффициенты полного асимптотического разложения М. Уильямса методом фотоупругости и МКЭ. В линейной механике разрушения широко известны канонические классические формальные асимптотические разложения составляющих тензора напряжений, ассоциированные с близлежащей окрестностью вершины трещины ($r \to 0$) в изотропной линейно-упругой среде [25]. Введем полярную систему координат с полюсом в вершине трещины. В полярных координатах решение многопараметрического асимптотического разложения Уильямса имеет вид [25]:

$$\sigma_{ij}(r,\vartheta) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{l=1}^{+\infty} a_l^m r^{l/2-1}\tilde{\sigma}_{m,ij}^{(l)}(\vartheta), \tag{2.1}$$

где индекс m связан с комбинированным типом деформирования, индекс m равен значению 1 для идеального нормального отрыва и значению 2 для совершенного поперечного сдвига; факторы a_l^m связаны с геометрической конфигурацией и нагрузками; $\tilde{\sigma}_{m,ij}^{(k)}(\vartheta)$ – угловые функции, зависящие от решения краевой задачи для тела с трещинами и вида нагружения. Коэффициенты ряда Уильямса a_1^1 и a_1^2 получили название коэффициентов интенсивности напряжений, второе слагаемое ряда $a_1^2\tilde{\sigma}_{1,11}^{(2)}$ носит название Т-напряжений и определяется соотношениями

$$a_1^1 = K_I/\sqrt{2\pi}, \qquad a_1^2 = -K_{II}/\sqrt{2\pi}, \qquad T = a_2^1\tilde{\sigma}_{1,11}^{(2)}. \tag{2.2}$$

Известны аналитические выражения для собственных функций, зависящих от полярного угла ϑ [26]:

для совершенного нормального отрыва

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{1,11}^{(l)}(\vartheta) &= l\left[\left(2+l/2+(-1)^l\right)\cos\left(l/2-1\right)\vartheta-\left(l/2-1\right)\cos\left(l/2-3\right)\vartheta\right]/2,\\
\tilde{\sigma}_{1,22}^{(l)}(\vartheta) &= l\left[\left(2-l/2-(-1)^l\right)\cos\left(l/2-1\right)\vartheta+\left(l/2-1\right)\cos\left(l/2-3\right)\vartheta\right]/2,\\
\tilde{\sigma}_{1,12}^{(l)}(\vartheta) &= l\left[-\left(2+l/2+(-1)^l\right)\sin\left(l/2-1\right)\vartheta-\left(l/2-1\right)\sin\left(l/2-3\right)\vartheta\right]/2;
\end{aligned} \tag{2.3}$$

для совершенного поперечного сдвига

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{2,11}^{(l)}(\vartheta) &= -l\left[\left(2+l/2-(-1)^l\right)\sin\left(l/2-1\right)\vartheta-\left(l/2-1\right)\sin\left(l/2-3\right)\vartheta\right]/2,\\
\tilde{\sigma}_{2,22}^{(l)}(\vartheta) &= -l\left[\left(2-l/2+(-1)^l\right)\sin\left(l/2-1\right)\vartheta+\left(l/2-1\right)\sin\left(l/2-3\right)\vartheta\right]/2,\\
\tilde{\sigma}_{2,12}^{(l)}(\vartheta) &= l\left[-\left(l/2-(-1)^l\right)\cos\left(l/2-1\right)\vartheta+\left(l/2-1\right)\cos\left(l/2-3\right)\vartheta\right]/2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В вышеупомянутых формулах l – порядковый номер слагаемого ряда Уильямса (1.1).

3. Определение коэффициентов ряда Уильямса методом фотоупругости

Полученное в эксперименте на полярископе изображение изохром связано с напряженным состоянием [27]:

$$n_1 - n_0 = C_1\sigma_1 + C_2(\sigma_2+\sigma_3), \tag{3.1}$$

$$n_2 - n_0 = C_1\sigma_2 + C_2(\sigma_3+\sigma_1), \tag{3.2}$$

$$n_3 - n_0 = C_1\sigma_3 + C_2(\sigma_1+\sigma_3), \tag{3.3}$$

где C_1 и C_2 – оптические коэффициенты напряжений; n_1, n_2 и n_3 — главные показатели преломления; n_0 — первоначальный показатель преломления в ненапряженном изотропном теле.

Из равенств (3.1) – (3.3) следует, что:

$$n_1 - n_2 = (C_1 - C_2)(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{3.4}$$

Поскольку справедливо равенство

$$n = (n_1-n_2)\,\frac{t}{\lambda} = (C_1-C_2)\,(\sigma_1-\sigma_2)\,\frac{t}{\lambda}, \tag{3.5}$$

где t – длина оптического пути, в некоторых случаях равная толщине образца. Качественная зависимость между разностью главных напряжений и порядком изохроматических полос, установленная эмпирически, предписывается общеизвестным законом Вертгейма:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_s}{t}, \tag{3.6}$$

где приняты классические обозначения N — порядок интерференционной полосы, t — толщина модели, а σ_1, σ_2 – главные напряжения в модели. Величина f_s носит название цены полосы материала.

Для плоской задачи главные напряжения равны:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \sigma_{12}^2}, \tag{3.7}$$

где σ_{11}, σ_{12} и σ_{22} — компоненты тензора напряжений.

Подставив выражения для главных напряжений (3.7) в закон Вертгейма, с использованием распределения Уильямса, в общем случае образуется переопределенная система нелинейных алгебраических уравнений относительно искомых амплитудных факторов (множителей) $a_1^1, a_2^1, \ldots, a_M^1$, где число уравнений, определяемое количеством взятых экспериментальных точек, в значительной степени больше, чем число факторов, подлежащих определению. Для нахождения приближенного решения этой системы уравнений использовался переопределенный метод, описанный в [28].

В соответствии с концепцией переопределенного метода вводится функция g_k, которая для k-й точки определяется следующим образом:

$$g_k = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})_k^2}{2} + (\sigma_{12})_k^2 - \left(\frac{N_k f_s}{h}\right)_k^2. \tag{3.8}$$

Далее функция g_k раскладывается в ряд Тейлора, в котором сохраняется только линейное относительно Δa_k^1 слагаемое:

$$(g_k)_{i+1} = \frac{\partial g_k}{\partial a_1^1}(\triangle a_1^1)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_2^1}(\triangle a_2^1)_i + ... + \frac{\partial g_k}{\partial a_M^1}(\triangle a_M^1)_i, \tag{3.9}$$

где i — номер текущей итерации, $\triangle(a_j^1)_i$ – разности между амплитудными (масштабными) множителями:

$$\left(\triangle a_j^1\right)_i = (a_j^1)_{i+1} - (a_j^1)_i. \tag{3.10}$$

Здесь учитываются M коэффициентов многопараметрического асимптотического ряда М. Уильямса. Итерации проводятся до выполнения условия $(g_k)_{i+1} = 0$ с наперед заданной точностью (в настоящей работе принимается, что это требование выполняется с точностью 10^{-6}).

Таким образом, линеаризация системы уравнений, следующей из закона Вертгейма, приводит к системе линейных уравнений:

$$-(g_k)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_1^1}(\triangle a_1^1)_i + \frac{\partial g_k}{\partial a_2^1}(\triangle a_2^1)_i + \ldots + \frac{\partial g_k}{\partial a_M^1}(\triangle a_M^1)_i = 0. \tag{3.11}$$

Решаением системы уравнений (3.11) являются необходимые масштабные множители. Частные производные, фигурирующие в системе, определяются из следующего уравнения:

$$\frac{\partial g_k}{\partial a_m^1} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)_k \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a_m^1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial a_m^1}\right)_k + 2\left(\sigma_{12}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial a_m^1}\right)_k. \tag{3.12}$$

Вычисления завершаются, когда каждый элемент матрицы поправок $(\triangle a_j^1)_i$ будет равен 0 с наперед заданной точностью.

При проведении вычислений был произведен тщательный анализ большой последовательности экспериментов на тарировочных дисках, с помощью которых определялась цена полосы материала, и на образцах прямоугольной формы с двумя горизонтальными трещинами, лежащими на одной прямой, путем техники метода цифровой фотоупругости, реализованной на проекционно-поляризационной установке ППУ-7 (рис. 3.1).

В процессе выполнения эксперимента образцы с двумя трещинами испытывались при разных амплитудах нагружения. На рис. 3.2–3.4 изображены полученные картины изохроматических полос.

Для проведения эксперимента на фотоупругость были выбраны 100 точек на изохроматической полосе четвертого порядка и 70 точек на изохроматической полосе пятого порядка при амплитуде нагружений 175 кг. На основании координат этих точек и номера изохроматических полос, которым принадлежат данные точки, были получены первые пятнадцать коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения Уильямса для образца с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами разной длины (табл. 3.1–3.4).

4. Численный эксперимент

Численный эксперимент основан на конечно-элементном расчете напряженно-деформированного состояния и поля смещений в образце с трещиной с использованием переопределенного метода. Для нахождения коэффициентов мультипараметрического асимптотического разложения Уильямса проведен ряд

Рис. 3.1. Экспериментальная поляризационно-проекционная установка ППУ-7
Fig. 3.1. Experimental setup

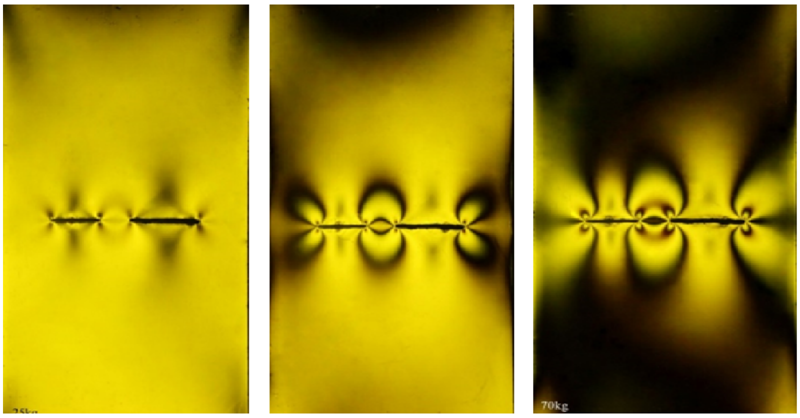

Рис. 3.2. Опытные результаты: снимки интерференционных (изохроматических) полос в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины (25, 50 и 70 кг)
Fig. 3.2. Patterns of isochromatic fringes in plates with two horizontal collinear cracks of different lengths (25, 50 and 70 kg)

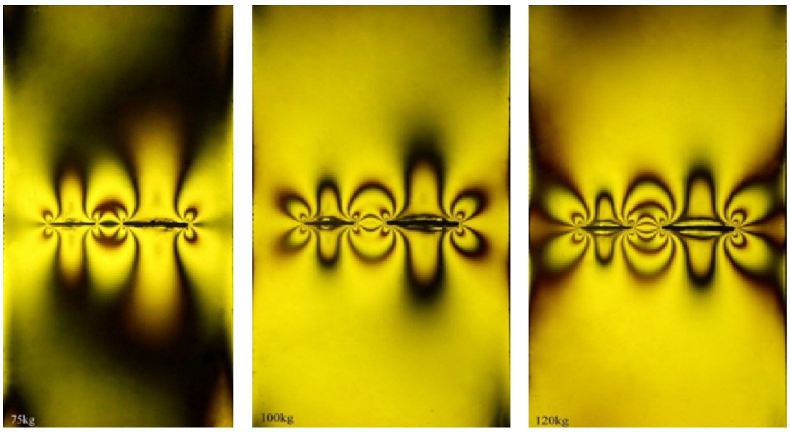

Рис. 3.3. Опытные результаты: снимки интерференционных (изохроматических) полос в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины (75, 100 и 120 кг)
Fig. 3.3. Patterns of isochromatic fringes in plates with two horizontal collinear cracks of different lengths (75, 100 and 120 kg)

вычислительных экспериментов с использованием пакета SIMULIA Abaqus для заданного образца. Модель пластины с трещинами была разбита на 6002 сингулярных элемента. Создание и моделирование трещины в конечно-элементном пакете проводилось методом контурного интеграла, что является более трудоемким по сравнению с расширенным методом конечного элемента и требует использования сингулярных конечных элементов, но позволяет получить в выходных данных наряду с распределением компонент тензора напряжений, полями перемещений и деформаций КИН и T-напряжения (T-stress).

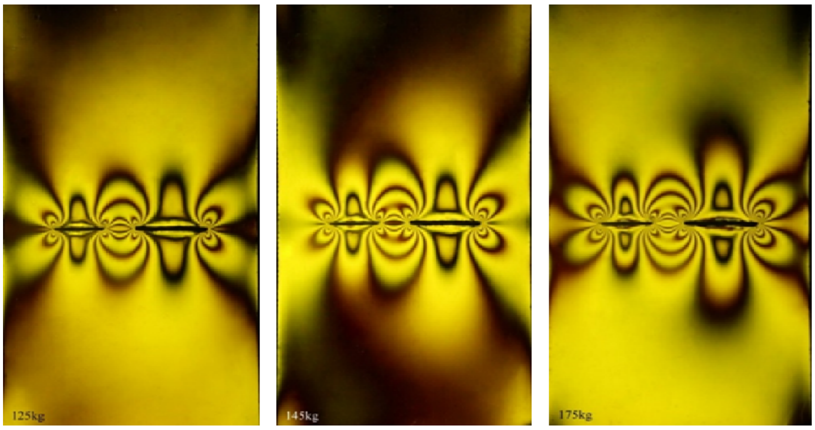

Рис. 3.4. Опытные результаты: снимки интерференционных (изохроматических) полос в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами различной длины (125, 145 и 175 кг)
Fig. 3.4. Patterns of isochromatic fringes in plates with two horizontal collinear cracks of different lengths (125, 145 and 175 kg)

Таблица 3.1

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = a$

Table 3.1

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near the crack tip $z = a$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	$4.4262\ MPa \cdot m^{1/2}$	$4.42629\ MPa \cdot m^{1/2}$	0
a_2^1	$-1.8067\ MPa$	$-1.80678\ MPa$	0
a_3^1	$1.5105\ MPa \cdot m^{-1/2}$	$1.51813\, MPa \cdot m^{-1/2}$	0.5
a_4^1	$-0.0863\ MPa \cdot m^{-1}$	$-0.08692\ MPa \cdot m^{-1}$	0.6
a_5^1	$-0.2761\ MPa \cdot m^{-3/2}$	$-0.27833\ MPa \cdot m^{-3/2}$	0.8
a_6^1	$-0.0026\, MPa \cdot m^{-2}$	$-0.00264\ MPa \cdot m^{-2}$	0.9
a_7^1	$-0.1020\ MPa \cdot m^{-5/2}$	$-0.10304\ MPa \cdot m^{-5/2}$	1.0
a_8^1	$0.0018\ MPa \cdot m^{-3}$	$0.00185\ MPa \cdot m^{-3}$	1.25
a_9^1	$-0.0466\ MPa \cdot m^{-7/2}$	$-0.04731\ MPa \cdot m^{-7/2}$	1.50
a_{10}^1	$0.0265\, MPa \cdot m^{-4}$	$0.02703\ MPa \cdot m^{-4}$	1.71
a_{11}^1	$0.0236\ MPa \cdot m^{-9/2}$	$0.02409\, MPa \cdot m^{-9/2}$	1.9
a_{12}^1	$-0.0023\ MPa \cdot m^{-5}$	$-0.00244\, MPa \cdot m^{-5}$	2.0
a_{13}^1	$-0.0127\, MPa \cdot m^{-11/2}$	$-0.01303\ MPa \cdot m^{-11/2}$	2.3
a_{14}^1	$0.0089\, MPa \cdot m^{-6}$	$0.009921\ MPa \cdot m^{-6}$	2.71
a_{15}^1	$0.0071\ MPa \cdot m^{-13/2}$	$0.00735\ MPa \cdot m^{-13/2}$	2.9

Для извлечения необходимых данных был смоделирован путь в виде окружности, вдоль которого выбирались значения компонент тензора напряжений. Начало координат было задано в вершине трещины.

Определение коэффициентов членов асимптотического ряда Уильямса выполнялось с использованием метода регрессии на основе наименьших квадратов, известного как переопределенный метод, для которого в качестве входных данных используются значения компонент тензора напряжений в узлах сетки, полученные численно в программном обеспечении SIMULIA Abaqus. Можно представить многопараметрическое асимптотическое решение Уильямса (1.1)–(2.4) в матричной форме как

$$\sigma = CA, \tag{4.1}$$

где σ — вектор-строка компонент тензора напряжений для каждой экспериментальной точки, A — вектор-столбец амплитудных масштабных множителей, которые необходимо найти.

Для каждой экспериментальной точки записываются значения трех компонент тензора напряжений σ_{11},σ_{12} и σ_{22}. Если в конечно-элементном расчете были получены данные для N экспериментальных точек, то количество элементов матрицы σ будет равно $N \times 3$. Количество элементов матрицы A равно

Таблица 3.2

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = b$

Table 3.2

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near the crack tip $z = b$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	4.5500 $MPa \cdot m^{1/2}$	4.45500 $MPa \cdot m^{1/2}$	0
a_2^1	-1.7702 MPa	-1.77024 MPa	0
a_3^1	2.0081 $MPa \cdot m^{-1/2}$	2.01056 $MPa \cdot m^{-1/2}$	0.12
a_4^1	0.0116 $MPa \cdot m^{-1}$	0.01169 $MPa \cdot m^{-1}$	0.8
a_5^1	0.2820 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.28370 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.6
a_6^1	0.2832 $MPa \cdot m^{-2}$	0.28581 $MPa \cdot m^{-2}$	0.88
a_7^1	0.7477 $MPa \cdot m^{-5/2}$	0.75447 $MPa \cdot m^{-5/2}$	0.9
a_8^1	-0.3012 $MPa \cdot m^{-3}$	-0.30441 $MPa \cdot m^{-3}$	1.05
a_9^1	0.7587 $MPa \cdot m^{-7/2}$	0.76782 $MPa \cdot m^{-7/2}$	1.19
a_{10}^1	0.4395 $MPa \cdot m^{-4}$	0.44531 $MPa \cdot m^{-4}$	1.30
a_{11}^1	1.0493 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.06528 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.50
a_{12}^1	-1.1982 $MPa \cdot m^{-5}$	-1.22131 $MPa \cdot m^{-5}$	1.89
a_{13}^1	1.3450 $MPa \cdot m^{-11/2}$	1.37393 $MPa \cdot m^{-11/2}$	2.1
a_{14}^1	1.6348 $MPa \cdot m^{-6}$	1.68021 $MPa \cdot m^{-6}$	2.70
a_{15}^1	1.8398 $MPa \cdot m^{-13/2}$	1.89672 $MPa \cdot m^{-13/2}$	2.9

Таблица 3.3

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = c$

Table 3.3

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near the crack tip $z = c$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	4.0036 $MPa \cdot m^{1/2}$	4.00364 $MPa \cdot m^{1/2}$	0
a_2^1	-1.7544 MPa	-1.75448 MPa	0
a_3^1	2.4757 $MPa \cdot m^{-1/2}$	2.48688 $MPa \cdot m^{-1/2}$	0.45
a_4^1	0.00094 $MPa \cdot m^{-1}$	0.000095 $MPa \cdot m^{-1}$	0.55
a_5^1	0.2568 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.25916 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.9
a_6^1	0.0836 $MPa \cdot m^{-2}$	0.08445 $MPa \cdot m^{-2}$	0.92
a_7^1	1.0292 $MPa \cdot m^{-5/2}$	1.04073 $MPa \cdot m^{-5/2}$	1.0
a_8^1	-0.2580 $MPa \cdot m^{-3}$	-0.26106 $MPa \cdot m^{-3}$	1.15
a_9^1	0.0.8143 $MPa \cdot m^{-7/2}$	0.82621 $MPa \cdot m^{-7/2}$	1.43
a_{10}^1	0.4723 $MPa \cdot m^{-4}$	0.48034 $MPa \cdot m^{-4}$	1.66
a_{11}^1	1.3023 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.32765 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.91
a_{12}^1	-1.3962 $MPa \cdot m^{-5}$	-1.42471 $MPa \cdot m^{-5}$	2.0
a_{13}^1	1.4984 $MPa \cdot m^{-11/2}$	1.53212 $MPa \cdot m^{-11/2}$	2.2
a_{14}^1	1.6262 $MPa \cdot m^{-6}$	1.67113 $MPa \cdot m^{-6}$	2.69
a_{15}^1	2.1748 $MPa \cdot m^{-13/2}$	2.23745 $MPa \cdot m^{-13/2}$	2.8

количеству коэффициентов ряда Уильямса, которые необходимо найти (K), тогда матрица C будет иметь размерность $3N \times K$.

Решение (4.1) в замкнутой форме для неизвестного вектора-строки параметров механики разрушения A может быть записано как псевдообразная матрица C:

$$A = (C^T C)^{-1} C^T \sigma. \tag{4.2}$$

В работа проведен двумерный конечно-элементный анализ для пластины размером 80×80 см. Длина левой трещины равна 1 см, а правой — 2 см, расстояние между трещинами равно 1.5 см (рис. 1.1).

Таблица 3.4

Амплитудные множители, определенные из фотомеханического эксперимента и конечно-элементного решения у вершины трещины $z = d$

Table 3.4

Amplitude factors obtained from the photoelasticity method and FEM computation near the crack tip $z = d$

Коэффициент	Фотоупругость	МКЭ-решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	3.7689 $MPa \cdot m^{1/2}$	3.76892 $MPa \cdot m^{1/2}$	0
a_2^1	-1.7567 MPa	-1.75677 MPa	0
a_3^1	1.7574 $MPa \cdot m^{-1/2}$	1.76345 $MPa \cdot m^{-1/2}$	0.34
a_4^1	-0.0060 $MPa \cdot m^{-1}$	-0.00611 $MPa \cdot m^{-1}$	0.52
a_5^1	-0.4694 $MPa \cdot m^{-3/2}$	-0.47290 $MPa \cdot m^{-3/2}$	0.73
a_6^1	-0.0021 $MPa \cdot m^{-2}$	-0.00221 $MPa \cdot m^{-2}$	0.91
a_7^1	0.2481 $MPa \cdot m^{-5/2}$	0.25090 $MPa \cdot m^{-5/2}$	1.1
a_8^1	0.00529 $MPa \cdot m^{-3}$	0.00536 $MPa \cdot m^{-3}$	1.22
a_9^1	-0.1596 $MPa \cdot m^{-7/2}$	-0.16193 $MPa \cdot m^{-7/2}$	1.44
a_{10}^1	0.0200 $MPa \cdot m^{-4}$	0.02044 $MPa \cdot m^{-4}$	1.67
a_{11}^1	0.1126 $MPa \cdot m^{-9/2}$	0.11485 $MPa \cdot m^{-9/2}$	1.88
a_{12}^1	-0.0013 $MPa \cdot m^{-5}$	-0.00133 $MPa \cdot m^{-5}$	2.1
a_{13}^1	-0.0844 $MPa \cdot m^{-11/2}$	-0.08637 $MPa \cdot m^{-11/2}$	2.2
a_{14}^1	0.00812 $MPa \cdot m^{-6}$	0.00831 $MPa \cdot m^{-6}$	2.28
a_{15}^1	0.0065 $MPa \cdot m^{-13/2}$	0.00677 $MPa \cdot m^{-13/2}$	2.7

Размеры пластины много больше размеров дефектов, значит влиянием границ пластины на параметры механики разрушения вблизи вершины трещины можно пренебречь. Рекомендуется достигать сходимости сетки вблизи вершин трещин с помощью 73 или 146 элементов по окружности. Вблизи вершин трещин сетка разбивалась на 20 элементов по радиальному направлению и 73 элемента по окружности (рис. 4.1). На рис. 4.2–4.4 показаны распределения компонент напряжений при расчете пластины с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами разной длины.

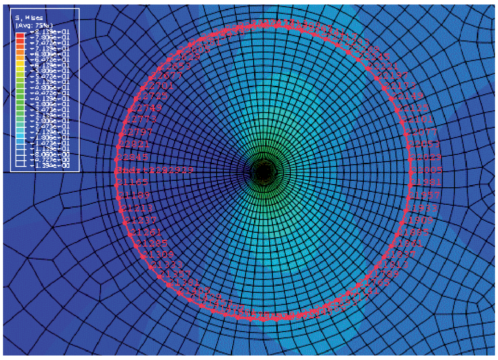

Рис. 4.1. Распределение напряжений по Мизесу
Fig. 4.1. Fon Mises stress distribution

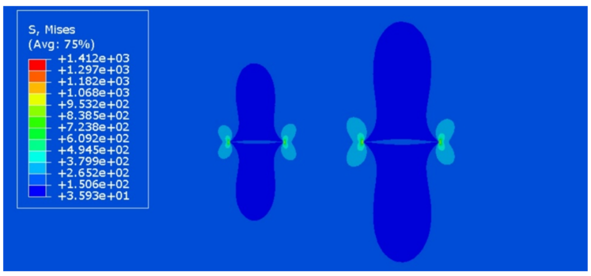

Рис. 4.2. Распределение напряжений по Мизесу
Fig. 4.2. Fon Mises stress distribution

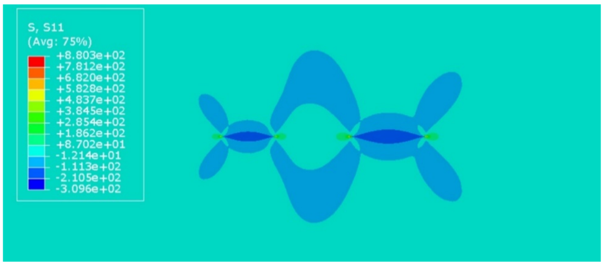

Рис. 4.3. Распределение компоненты напряжений σ_{11}
Fig. 4.3. Distribution of stress components σ_{11}

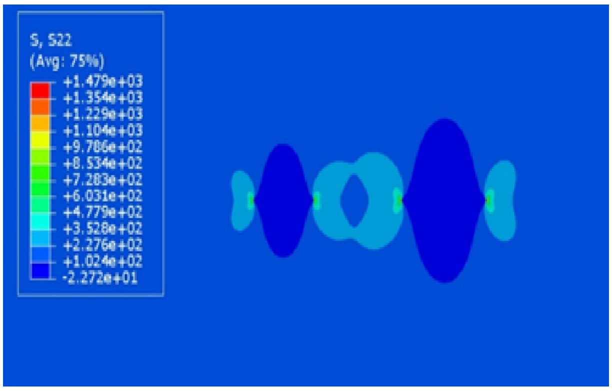

Рис. 4.4. Распределение компоненты напряжений σ_{22}
Fig. 4.4. Distribution of stress components σ_{22}

Проведена серия численных экспериментов с различным числом концентрических окружностей, на каждой из которых выбирались 73 точки. Радиусы окружностей, на которых расположены экспериментальные точки, варьировались от 0.05 до 0.25 см. Из конечно-элементного анализа получены значения трех компонент тензора напряжений для каждой точки, принадлежащей концентрическим окружностям. Далее, полученный большой массив данных (от 219 до 1095) использовался для вычисления пятнадцати коэффициентов слагаемых более высокого порядка малости в мультипараметрическом асимптотическом разложении М. Уильямса. Основным принципом переопределенного метода является использование большого количества данных для расчета параметров в окрестности каждой вершины трещины. Для этого формируется алгебраическая система уравнений, в которой количество уравнений существенно больше, чем количество неизвестных. В этом случае полученная система уравнений является переопределенной. В большинстве численных экспериментов использовалась одна концентрическая окружность, для которой были записаны по 3 компоненты тензора напряжений для каждой из 73 экспериментальных точек. В системе (4.1) решалось 219 уравнений относительно 15 неизвестных. Полученные значения показаны в табл. 4.1–4.4.

Таблица 4.1

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = a$

Table 4.1

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = a$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	71.55840 $MPa \cdot cm^{1/2}$	71.55840 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	17.67463 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	17.62161 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.3
a_5^1	-2.23521 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-2.21733 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.8
a_7^1	0.56546 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.55924 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	1.1
a_9^1	-0.17800 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	-0.17533 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	1.5
a_{11}^1	0.06251 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.06138 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.8
a_{13}^1	-0.02346 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	-0.02294 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	2.2
a_{15}^1	0.009212 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.00898 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	2.8

Таблица 4.2

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = b$

Table 4.2

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = b$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	72.43794 $MPa \cdot cm^{1/2}$	72.43794 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	19.01297 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	18.99396 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.3
a_5^1	-1.55756 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-1.55336 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.10
a_7^1	0.91703 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.91245 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.27
a_9^1	0.02212 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	0.02195 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	0.50
a_{11}^1	0.16985 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.16816 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.77
a_{13}^1	0.03820 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	0.03767 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	1.4
a_{15}^1	0.043733 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.04285 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	2.0

Таблица 4.3

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = c$

Table 4.3

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = c$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	53.84721 $MPa \cdot cm^{1/2}$	53.84721 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	28.66835 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	28.61102 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.2
a_5^1	-5.03256 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-5.00740 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.5
a_7^1	3.96717 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	3.92750 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	1
a_9^1	-1.68655 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	-1.66293 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	1.4
a_{11}^1	1.61810 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.59059 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.7
a_{13}^1	-0.97566 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	-0.95615 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	2.0
a_{15}^1	0.90005 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.87935 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	2.3

Таблица 4.4

Сравнение аналитического и численного решений у вершины $z = d$

Table 4.4

Comparison of analytic and numeric solutions near the crack tip $z = d$

Коэффициент ряда	Аналитическое решение	МКЭ решение	Относительная погрешность, %
a_1^1	52.65806 $MPa \cdot cm^{1/2}$	52.65806 $MPa \cdot cm^{1/2}$	0
a_2^1	-25.00000 MPa	-25.00000 MPa	0
a_3^1	25.51513 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	25.47176 $MPa \cdot cm^{-1/2}$	0.17
a_5^1	-6.73471 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	-6.71855 $MPa \cdot cm^{-3/2}$	0.24
a_7^1	3.43893 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	3.42138 $MPa \cdot cm^{-5/2}$	0.51
a_9^1	-2.15383 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	-2.13833 $MPa \cdot cm^{-7/2}$	0.72
a_{11}^1	1.50218 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	1.48791 $MPa \cdot cm^{-9/2}$	0.95
a_{13}^1	-1.12190 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	-1.10922 $MPa \cdot cm^{-11/2}$	1.13
a_{15}^1	0.87852 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	0.86183 $MPa \cdot cm^{-13/2}$	1.9

Заключение

В настоящей статье посредством техники метода цифровой фотоупругости и конечно-элементного моделирования вычислены коэффициенты мультипараметрического асимптотического степенного разложения Макса Уильямса поля напряжений в вершинах двух горизонтальных трещин в поле одноосного растяжения. В решении Макса Уильямса сохранены регулярные (неособые в окрестности кончика трещины) слагаемые, что способствует:

1) получению более точной оценки составляющих тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений и целостному описанию полей в зоне, охватывающей кончик трещины;

2) расширению области, в которой работает асимптотическое представление М. Уильямса. Сохранение неособых слагаемых дает возможность выбирать больше точек из экспериментальной картины и использовать их для вычисления параметров механики хрупкого разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений для обеих мод деформирования, T-напряжений и коэффициентов регулярных вблизи кончика разреза слагаемых ряда Уильямса).

Ценность данного исследования заключается в сопоставлении аналитического решения задачи и конечно-элементного расчета для достаточно большой пластины по сравнению с длинами трещины. Расчет показал, что коэффициенты ряда Уильямса, полученные с помощью двух различных подходов, находятся в хорошем соответствии друг с другом. Поэтому конечно-элементное решение может быть использовано для восстановления коэффициентов ряда, представляющего поля у вершины трещины.

В высокофункциональном и многоцелевом пакете SIMULIA Abaqus осуществлен широкий цикл конечно-элементных вычислений механических полей в пластинах с двумя горизонтальными коллинеарными трещинами разной длины, лежащих на одной прямой, разных конфигураций – для пластины большего размера по сравнению с длинами трещин и пластины, идентичной использованной в натурном эксперименте. Рассчитав напряженно-деформированное состояние, можно определить коэффициенты мультипараметрического асимптотического разложения М. Уильямса, в котором сохранены пятнадцать слагаемых. Иными словами, из конечно-элементного решения извлечены коэффициенты регулярных слагаемых мультипараметрического асимптотического разложения.

Произведена обработка данных эксперимента, проведенного с помощью метода фотоупругости. В статье показано, что разработанный алгоритм позволяет найти факторы асимптотического разложения с высокой точностью, включая коэффициенты неособых слагаемых. Цифровая фотоупругость в сочетании с аналитическими математическими моделями, описывающими поля вершин трещин, позволила экспериментально определить характеризующие параметры, включая коэффициент интенсивности напряжений, T-напряжение и амплитудные множители слагаемых более высокого порядка малости и лучше понять их роль в механизмах, приводящих к росту трещин.

Для целостного описания полей напряжений у кончика трещины в рассмотренной конфигурации необходимо всестороннее изучение влияния геометрических параметров модели на коэффициенты ряда Уильямса. Поэтому направлениями дальнейших исследований будут рассмотрение взаимного изменения длин трещины и расстояния между ними, а также анализ наклонных коллинеарных трещин, лежащих на одной прямой и не принадлежащих одной прямой.

Литература

[1] Александров А.Я, Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. Москва: Наука, 1973. 576 с. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35626697. EDN: https://www.elibrary.ru/xzsbsp.

[2] Дюрелли А., Райли У. Введение в фотомеханику: Поляризац.-оптич. методы. Москва: Мир, 1970, 484 с.

[3] Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1948, Т. 1, 432 с. URL: https://vk.com/doc323168506_508549622?hash=uRSNaqnVAT2qYzY5KbEUPHArR2TkrIL6YBrYXQg40KP&dl=uXdZJQ3zOJ8S06w9fC70jUa9kfWqV7BKlOBa0EwMz4w.

[4] Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Москва; Ленинглад: Гостехиздат, 1950, Т. 2. 432 с.

[5] Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 135. P. 106186. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106186.

[6] Belova O.N., Stepanova L.V. Photoelastic evaluation of stress fields and coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field // Procedia Structural Integrity. 2021. Vol. 32. P. 32–41. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.09.006.

[7] Stepanova L., Belova O.N. An Over-deterministic Method Based on Atomistic Stress Fields: Higher Order Terms of the Williams power expansion // Procedia Structural Integrity. 2021. Vol. 39. P. 748–760. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.149.

[8] Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического

университета. Механика. 2021. № 1. С. 72–85. DOI: http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08. EDN: https://www.elibrary.ru/lezlhq.

[9] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2018. Vol. 109. Pp. 7–16. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2018.05.004.

[10] Sasikumar S., Ramesh K. Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP) // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 127. P. 105963. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105963.

[11] Ren Z., Xie H., Ju Y. Quantification of photoelastic fringe orders using polarized light camera and continuous loading // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 134. P. 106263. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106263.

[12] Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2020. Vol. 126. P. 105855. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105855.

[13] Ham S., Kwon T. Photoelastic observation of toughness-dominant hydraulic fracture propagation across an orthogonal discontinuity in soft, viscoelastic layered formations // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2020. Vol. 134. P. 104438. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104438.

[14] Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts) // Key Engineersing Material. 2020. Vol. 827. Pp. 330–335. DOI: http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330.

[15] Жаббаров Р.М., Степанова Л.В. Сравнительный анализ полей напряжений у вершины трещины и боковых надрезов, полученных с помощью усеченных разложений Уильямса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 4. С. 30–67. DOI 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67.

[16] Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 4. С. 237–249. DOI: http://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.20. EDN: https://www.elibrary.ru/edwnlr.

[17] Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Experimental evaluation of coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field using digital photoelasticity // Procedia Structural Integrity. 2020. Vol. 28. Pp. 1774–1780. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.154.

[18] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic field and K-dominant region for anisotropic semi-circular bend specimen // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2020. Vol. 109. P. 102640. DOI: http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640.

[19] Степанова Л.В., Белова О.Н., Туркова В.А. Определение коэффициентов разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины с помощью метода цифровой фотоупругости и метода конечных элементов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25, № 3. С. 62–82. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82. EDN: https://www.elibrary.ru/bogzpu. % – EDN BOGZPU.Stepanova L.V., Belova O.N., Turkova V.A. Determination of the expansion coefficients of M. Williams of the stress field at the crack tip using the digital photoelasticity method and the finite element method // Bulletin of Samara University. Natural science series. 2019. Vol. 25. №. 3. Pp. 62 – 82.(in Russian)

[20] Stepanova L.V., Dolgihk V.S. Assessment of the SIF, T-stress and higher-order coefficient values of the cracked specimens with two interacting cracks or notches under mixed mode loadings by digital photoelasticity method // AIP Conference Proceedings, 2021. Vol. 2371. P. 020013. DOI: http://doi.org/10.1063/5.0059578. EDN: https://www.elibrary.ru/sgyupt.

[21] Li Y., Zheng K. Crack tip asymptotic field coefficients analyses based on extended finite element method using over-deterministic displacement field fitting method // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2021. Vol. 113. P. 102971. DOI: http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.102971.

[22] Aytollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes // Engineering Fracture Mechanics. 2020. Vol. 2371. P. 106982. DOI: http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982.

[23] Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidiscs using the photoelasticity method and finite element method // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2216. P. 020013. DOI: http://doi.org/10.1063/5.0003506.

[24] Hou C., Wang Z., Jin X., Ji X., Fan X. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 242. P. 107455. DOI: http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455.

[25] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24. P. 109—114. URL: https://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf.

[26] Hello G., Mabrouk B., Roelandt J. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 49. Issues (3—4). P. 556—566. DOI: http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024.

[27] Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2 т. Т. II. Москва: Наука, 1989, 434 с. URL: https://libcats.org/book/505217.

[28] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A. A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited // Engineering Fracture Mechanics. 1997. Vol. 56. № 1. Pp. 25—41, 43–45. DOI: http://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7.

[29] Belova O.N., Stepanova L.V. Computational and experimental identification of coefficients of the Williams series expansion by considering higher order terms in the cracked specimens through digital image analysis // Procedia Structural Integrity. 2022. Vol. 40, Pp. 46–60. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.006.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104

Submited: 12.09.2022
Revised: 08.11.2022
Accepted: 05.12.2022

D.M. Petrova
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: petrova_darya96@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0666-9878
A.V. Mironov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: mironov.sv@ssau.ru ORCID: http://orcid.org/000-0002-0666-9878
A.A. Buchanko
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: abukhanko@mail.ru ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2074-7422
R.M. Zhabbarov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: zhabbarov.rm@ssau.ru ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9340-8512

TO THE SCRUTINY OF THE EXPERIENTIAL AND COMPUTATIONAL ELICITATION OF FACTORS OF THE WILLIAMS MULTI-PARAMETER EXPANSION

ABSTRACT

The article defines stress fields near the tips of mathematical cracks in an isotropic linearly elastic plate with two horizontal collinear cracks lying on a straight line of different lengths under the uniaxial tensile condition, using two approaches - experimental, based on the method of digital photomechanics, and numerical, based on finite element calculations. To represent the stress field at the tip of the section, the Williams polynomial series is used - the canonical representation of the field at the top of the mathematical section of a two-dimensional problem of elasticity theory for isotropic media. The main idea of the current study is to take into consideration the regular (non-singular) terms of the series and analyze their impact on the holistic description of the stress field in the immediate vicinity of the top of the section. The first fifteen coefficients of the Max Williams series were preserved and determined in accordance with experimental patterns of isochromatic bands and finite element modeling. To extract the coefficients of the Williams series used a redefined method designed to solve systems of algebraic equations, the number of which is significantly greater than the unknown - amplitude multipliers. The influence of the non-singular terms of the Williams series on the processing of the experimental pattern of interference fringes is demonstrated. It is validated that the preservation of the terms of a high order of smallness makes it possible to expand the area adjacent to the tip of the crack, from which experimental points can be selected. The finite element study was carried out in the SIMULIA Abaqus engineering analysis system, in which experimental samples tested in a full-scale experiment were reproduced. It is revealed that the results obtained by the two methods are in good agreement with each other.

Key words: digital photoelasticity; finite element method; Williams multiparameter asymptotic expansion; over-deterministic method.

Citation. Petrova D.M., Mironov A.V., Buchanko A.A., Zhabbarov R.M. To the scrutiny of the experiential and computational elicitation of factors of the Williams multi-parameter expansion. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 88–104. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-88-104. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Petrova D.M., 2022
Darya M. Petrova — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Mironov A.V., 2022
Alexandr V. Mironov — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Buchanko A.A., 2022
Anastasiya A. Buchanko — executive director of Natural Sciences' Institute, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Zhabbarov R.M., 2022
Ramil M. Zhabbarov – assistant professor of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Aleksandrov A.Y., Akhmetzyanov M.K. Polarization-optical methods of deformable body mechanics. Moscow: Nauka, 1973, 576 p. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35626697. EDN: https://www.elibrary.ru/xzsbsp. (In Russ.)

[2] Durelli A., Riley W. Introduction to photomechanics: Polarization-optical methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Publ., 1965, 402 p.

[3] Frocht M.M. Photoelasticity. Polarization-optical method for studying stresses. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1948, Vol. 1, 432 p. Available at: https://vk.com/doc323168506_508549622?hash=uRSNaqnVAT2qYzY5KbEUPHAr R2TkrIL6YBrYXQg40KP&dl=uXdZJQ3zOJ8S06w9fC70jUa9kfWqV7BKlOBa0EwMz4w. (In Russ.)

[4] Frocht M.M. Photoelasticity. Polarization-optical method for studying stresses. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1950, vol. 2, 432 p. (In Russ.)

[5] Ramesh K., Sasikumar S. Digital photoelasticity: Recent developments and diverse applications. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 135, p. 106186. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106186.

[6] Belova O.N., Stepanova L.V. Photoelastic evaluation of stress fields and coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field. *Procedia Structural Integrity*, 2021, vol. 32, pp. 32–41. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.09.006.

[7] Stepanova L., Belova O. An Over-deterministic Method Based on Atomistic Stress Fields: Higher Order Terms of the Williams power expansion. *Procedia Structural Integrity*, 2021, vol. 39, pp. 748–760. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.149.

[8] Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part II. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, №1, pp. 72–85. DOI: http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08. EDN: https://www.elibrary.ru/lezlhq. (In Russ.)

[9] Ramesh K., Pandey A. An improved normalization technique for white light photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, vol. 109, pp. 7–16. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2018.05.004.

[10] Sasikumar S., Ramesh K. Applicability of colour transfer techniques in Twelve fringe photoelasticity (TFP). *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 127, p. 105963. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105963.

[11] Ren Z., Xie H., Ju Y. Quantification of photoelastic fringe orders using polarized light camera and continuous loading. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 134, p. 106263. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2020.106263.

[12] Jobin T.M., Khaderi S.N., Ramji M. Experimental evaluation of the strain intensity factor at the inclusion tip using digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, vol. 126, p. 105855. DOI: http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2019.105855.

[13] Ham S., Kwon T. Photoelastic observation of toughness-dominant hydraulic fracture propagation across an orthogonal discontinuity in soft, viscoelastic layered formations. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2020, vol. 134, p. 104438. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104438.

[14] Tabanyukhova M.V. Photoelastic analysis of the stressed state of a flat element with geometrical stress concentrators (cutout and cuts). *Key Engineersing Material*, 2020, vol. 827, pp. 330–335. DOI: http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.827.330.

[15] Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Comparative analysis of stress state in the vicinity of the crack-tips and notches using truncated Williams series expansion. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 30—67. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67. (In Russ.)

[16] Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part I. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 4, pp. 237–249. DOI: http://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.20. EDN: https://www.elibrary.ru/edwnlr. (In Russ.)

[17] Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Experimental evaluation of coefficients of multi-parameter asymptotic expansion of the crack-tip stress field using digital photoelasticity. *Procedia Structural Integrity*, 2020, vol. 28, pp. 1774–1780. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.154.

[18] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic field and K-dominant region for anisotropic semi-circular bend specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 109, p. 102640. DOI: http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640.

[19] Stepanova L.V., Belova O.N., Turkova V.A. Determination of the Williams series expansion's coefficients using digital photoelasticity method and finite element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, №3, pp. 62–82. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82. EDN: https://www.elibrary.ru/bogzpu. (In Russ.)

[20] Stepanova L.V., Dolgihk V.S. Assessment of the SIF, T-stress and higher-order coefficient values of the cracked specimens with two interacting cracks or notches under mixed mode loadings by digital photoelasticity method. *AIP Conference Proceedings*, 2021, vol. 2371, p. 020013. DOI: http://doi.org/10.1063/5.0059578. EDN: https://www.elibrary.ru/sgyupt.

[21] Li Y., Zheng K. Crack tip asymptotic field coefficients analyses based on extended finite element method using over-deterministic displacement field fitting method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, vol. 113, p. 102971. DOI: http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.102971.

[22] Aytollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields. in anisotropic planes. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 231, p. 106982. DOI: http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982.

[23] Stepanova L.V. The algorithm for the determination of the Williams asymptotic expansion coefficients for notched semidiscs using the photoelasticity method and finite element method. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2216, issue 1, p. 020013. DOI: http://doi.org/10.1063/5.0003506.

[24] Hou C., Wang Z., Jin X., Ji X., Fan X. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, vol. 242, p. 107455. DOI: http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455.

[25] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, pp. 109—114. Available at: https://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf.

[26] Hello G., Mabrouk B., Roelandt J. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 49, issues (3—4), pp. 556—566. DOI: http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024.

[27] Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism. In two volumes. Volume II. Moscow: Nauka, 1989, 434 p. Available at: https://libcats.org/book/505217. (In Russ.)

[28] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, vol. 56, issue 1, pp. 25—41, 43–45. DOI: http://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7.

[29] Belova O.N., Stepanova L.V. Computational and experimental identification of coefficients of the Williams series expansion by considering higher order terms in the cracked specimens through digital image analysis. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 40, pp. 46–60. DOI: http://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.006.