Л. Г. Рыбников, Слабо коммутативные однородные пространства с редуктивным стабилизатором, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4, 199–200

DOI: 10.4213/rm766

СЛАБО КОММУТАТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С РЕДУКТИВНЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ

Л. Г. Рыбников

1. Пусть G – вещественная алгебраическая группа, $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$, H – редуктивная подгруппа в G, $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie} H$. На алгебре $D(X)$ дифференциальных операторов на однородном пространстве $X = G/H$ имеется естественная фильтрация по порядку дифференциального оператора. Коммутатор в алгебре $D(X)$ задает на ассоциированной градуированной алгебре $P(X) = \operatorname{gr} D(X)$ скобку Пуассона.

Пусть $D(X)^G$ и $P(X)^G$ – подалгебры G-инвариантов в $D(X)$ и $P(X)$ соответственно. Известно [1], что $D(X)^G \simeq (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$ как фильтрованные ассоциативные алгебры. На уровне пуассоновых алгебр имеется изоморфизм $P(X)^G \simeq (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$. Из этого описания, в силу редуктивности группы H, следует, что $\operatorname{gr} D(X)^G = P(X)^G$.

Однородное пространство X называется *коммутативным*, если алгебра $D(X)^G$ коммутативна, и *слабо коммутативным*, если алгебра Пуассона $P(X)^G$ коммутативна. Так как $\operatorname{gr} D(X)^G = P(X)^G$, то из коммутативности однородного пространства следует его слабая коммутативность. Мы докажем следующую теорему о структуре слабо коммутативных однородных пространств.

Теорема 1. *Для любого слабо коммутативного однородного пространства* $X = G/H$ *существует такое разложение Леви* $G = L \leftthreetimes N$, *что*

1) L *– редуктивная подгруппа Ли, содержащая* H;
2) $S(\mathfrak{n})^L = S(\mathfrak{n})^H$.

В [2] утверждение теоремы 1 доказано для римановых однородных пространств (т.е. для пространств G/H с компактной группой H). В этом случае степень нильпотентности группы N не превосходит 2. Мы покажем, что в общем случае группа N может иметь любую степень нильпотентности.

В [3] доказано, что любое слабо коммутативное *риманово* однородное пространство коммутативно. Мы докажем следующую теорему о коммутативности некоторых (вообще говоря, не римановых) слабо коммутативных однородных пространств.

Теорема 2. *Пусть* $X = G/H$ *– слабо коммутативное однородное пространство, причем*

1) *унипотентный радикал* N *группы* G *есть* $(2n-1)$*-мерная группа Гейзенберга*;
2) *группа* H *действует тривиально на* (*одномерном*) *центре группы* N.

Тогда пространство X *коммутативно.*

Автор благодарен Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Докажем теорему 1. Так как группа H редуктивна, то можно выбрать L так, что $H \subset L$. Так как группа L редуктивна, то на пространстве $\mathfrak{l}$ имеется невырожденная L-инвариантная квадратичная форма. Так как группа H редуктивна, то ограничение этой формы на подпространство $\mathfrak{h} \in \mathfrak{l}$ невырождено. Отсюда следует, что на пространстве $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$ имеется невырожденная H-инвариантная квадратичная форма. Эта форма определяет многочлен второй степени $\Phi \in (S^2(\mathfrak{l}/\mathfrak{h}))^H \subset (S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))^H$.

Для любого многочлена $\Psi \in S(\mathfrak{n})^H \subset (S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))^H$ условие $\{\Phi, \Psi\} = 0$ равносильно условию $\{x, \Psi\} = 0$ для любого $x \in \mathfrak{l}$ или, что то же самое, $\Psi \in S(\mathfrak{n})^L$. Так как пространство X слабо коммутативно, то для любого $\Psi \in S(\mathfrak{n})^H \subset (S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))^H$ выполнено условие $\{\Phi, \Psi\} = 0$. Следовательно, $S(\mathfrak{n})^L = S(\mathfrak{n})^H$.

Замечание 1. На степень нильпотентности группы N нет никаких ограничений. Пусть V и W – векторные пространства над $\mathbb{R}$, причем $\dim V = n+1$, $\dim W = n$. Рассмотрим n-ступенно нильпотентную группу $N = (\exp \mathrm{Id} \otimes \mathbb{R}J) \leftthreetimes (V \otimes W)$, где $J \in \mathrm{End}(W)$ – нильпотентный оператор ранга $n-1$. Однородное пространство $X = (SL(V) \leftthreetimes N)/SL(V)$ коммутативно: алгебра $D(X)^G = U(\mathfrak{n})^{SL(V)}$ есть алгебра многочленов от одного переменного.

3. Теперь докажем теорему 2. Выберем разложение Леви $G = L \leftthreetimes N$ как в теореме 1. Пусть $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{n}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}\, N$ и $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ – некоторое L-инвариантное дополнительное подпространство. Пусть z – ненулевой элемент в $\mathfrak{z}$. Из теоремы 1 следует, что $z \in \mathfrak{n}^G$. Это означает, что на пространстве $\mathfrak{a}$ имеется невырожденная L-инвариантная кососимметрическая форма ω такая, что для $v, w \in \mathfrak{a}$ имеем $[v, w] = \omega(v, w)z$.

Так как $z \in \mathfrak{n}^G$, то имеется естественное вложение алгебры $\mathbb{R}[z]$ в центр алгебры $D(X)^G \simeq (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h})^H$. Это означает, что алгебру $D(X)^G$ можно рассматривать как алгебру регулярных сечений расслоения над $\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}[z] = \mathfrak{z}^*$, слой которого над точкой $z = t$ есть алгебра $D(X)^G_t = D(X)^G/D(X)^G(z-t)$. Аналогично, алгебру Пуассона $P(X)^G$ можно рассматривать как алгебру регулярных сечений расслоения над $\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}[z] = \mathfrak{z}^*$, слой которого над точкой $z = t$ есть алгебра $P(X)^G_t = P(X)^G/P(X)^G(z-t)$.

Пусть $W(\mathfrak{a})$ – алгебра Вейля с пространством образующих $\mathfrak{a}$ и определяющими соотношениями $vw - wv = \omega(v, w)$ для любых $v, w \in \mathfrak{a}$. На алгебре $W(\mathfrak{a})$ имеется фильтрация по степени выражения через образующие, причем ассоциированная градуированная (пуассонова) алгебра изоморфна $S(\mathfrak{a})$. Группа L действует на пространстве $\mathfrak{a}$ преобразованиями, сохраняющими форму ω. Определим “полупрямое тензорное произведение” $U(\mathfrak{l}) \oslash W(\mathfrak{a})$: это алгебра, порожденная $U(\mathfrak{l})$ и $W(\mathfrak{a})$ с определяющими соотношениями $xa - ax = x(a)$ $\forall\, x \in \mathfrak{l}$, $a \in \mathfrak{a}$. Рассмотрим подалгебру H-инвариантов в алгебре $U(\mathfrak{g}) \oslash W(\mathfrak{a})$. Очевидно, что $(U(\mathfrak{l})\mathfrak{h} \oslash W(\mathfrak{a}))^H$ – двусторонний идеал в $U(\mathfrak{l}) \oslash W(\mathfrak{a}))^H$. Обозначим соответствующую факторалгебру через $B(L, H, \mathfrak{a})$. Ассоциированная алгебра Пуассона изоморфна $(S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes S(\mathfrak{a}))^H = \mathbb{R}[(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times \mathfrak{a}^*]^H$.

Лемма 1 [3]. *При $t \neq 0$ имеет место изоморфизм ассоциативных алгебр $D(X)^G_t \simeq B(L, H, \mathfrak{a})$, а также изоморфизм алгебр Пуассона $P(X)^G_t \simeq S((\mathfrak{l}/\mathfrak{h}) \times \mathfrak{a})^H$.*

Так как пространство X слабо коммутативно, то алгебра Пуассона $P(X)^G_t \simeq S((\mathfrak{l}/\mathfrak{h}) \times \mathfrak{a})^H$ коммутативна. На пространстве $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times \mathfrak{a}^*$ имеется невырожденная H-инвариантная билинейная форма (симметрическая на $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^*$ и кососимметрическая на $\mathfrak{a}^*$), поэтому представление редуктивной группы H в пространстве $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times \mathfrak{a}^*$ самосопряжено. Отсюда следует, что H-орбиты общего положения в $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times \mathfrak{a}^*$ разделяются полиномиальными инвариантами.

Лемма 2 [3]. *Пусть L – редуктивная группа, действующая симплектическими преобразованиями на пространстве $\mathfrak{a}$ с невырожденной 2-формой ω, H – подгруппа в L. Пусть H-орбиты общего положения в $(\mathfrak{l}/\mathfrak{h})^* \times \mathfrak{a}^*$ разделяются полиномиальными инвариантами. Тогда из коммутативности алгебры Пуассона $S((\mathfrak{l}/\mathfrak{h}) \times \mathfrak{a})^H$ следует коммутативность ассоциативной алгебры $B(L, H, \mathfrak{a})$.*

Доказательство основано на построении гомоморфизма центра универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{sp}(\mathfrak{a}, \omega))$ в алгебру $B(L, H, \mathfrak{a})$, образ которого является “достаточно большой” коммутативной подалгеброй в $B(L, H, \mathfrak{a})$ в том смысле, что алгебра $B(L, H, \mathfrak{a})$ является ее алгебраическим расширением.

Из леммы 2 следует коммутативность алгебры $D(X)^G_t$ при всех $t \neq 0$, а значит, и коммутативность алгебры $D(X)^G$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] S. Helgason // Acta Math. 1959. V. 102. P. 239–299. [**2**] Э. Б. Винберг // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 3–62. [**3**] Л. Г. Рыбников // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37. №2. С. 41–51.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.05.2004