

УДК 517.938

## О стохастической устойчивости показателей Ляпунова уравнений произвольного порядка

Нгуен Динь Конг

### Введение

В предлагаемой статье рассматриваются линейные уравнения произвольного порядка с ограниченными, равномерно непрерывными коэффициентами. Исследуются показатели Ляпунова таких уравнений при случайных возмущениях (см. [1, с. 26, 287]). Доказывается, что для почти всякого уравнения почти все близкие к нему уравнения имеют показатели, близкие к его показателям. Эта работа есть вариант работы В. М. Миллионщикова [2]. Статья есть развернутое изложение с доказательством результатов автора, анонсированных в [3], [4]. Эти результаты были сообщены автору В. М. Миллионщиковым в качестве гипотез.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение произвольного порядка

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0, \quad (1)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a_i(t) \in C(\mathbb{R})$ ,  $|a_i(t)| < \text{const} < +\infty$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Наряду с уравнением (1) будем рассматривать его случайные возмущения

$$y^{(n)} + (a_1(t) + c_{\xi,1}(t, \omega))y^{(n-1)} + \dots + (a_n(t) + c_{\xi,n}(t, \omega))y = 0, \quad (2)$$

где  $c_{\xi,i}(t, \omega)$  — случайные процессы с кусочно-непрерывными траекториями или белые шумы (см. [1, с. 26, 287]),  $\omega$  — точка пространства  $\Omega_{\xi}$  с мерой  $\mu_{\xi}$  ( $\mu_{\xi}(\Omega_{\xi}) = 1$ ), параметр  $\xi$  принадлежит множеству  $\mathbb{E}$ , в котором задан фильтр  $\mathcal{F}$ .

Уравнения (1) и (2) мы стандартным образом приводим к линейным системам

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (3)$$

$$\dot{y} = (A(t) + C_{\xi}(t, \omega))y, \quad (4)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

$$C_{\xi}(t, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_{\xi,n}(t, \omega) & -c_{\xi,n-1}(t, \omega) & \dots & -c_{\xi,1}(t, \omega) \end{pmatrix}.$$

Положим  $a = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n |a_i(t)| + 1 < +\infty$ . Тогда  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| < a$ . Обозначим

через  $X(t, \tau)$  и  $Y_{\xi}(t, \tau; \omega)$  матрицы Коши систем (3) и (4) соответственно, через  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  и  $\lambda_1(\xi, \omega) \geq \lambda_2(\xi, \omega) \geq \dots \geq \lambda_n(\xi, \omega)$  — показатели Ляпунова систем (3) и (4) соответственно (они называются и показателями Ляпунова уравнений (1) и (2) соответственно). В дальнейшем нас будут интересовать только абсолютно регулярные уравнения вида (1).

Определение 1 (см. [5]). Уравнение (1) называется абсолютно регулярным, если соответствующая ему линейная система (3) абсолютно регулярна, т. е. существует базис  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  пространства решений системы (3), обладающий свойствами:

$$1) \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x_i(t)\| = \lambda_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

2) для  $i=1, 2, \dots, n$  и для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $T(\varepsilon) > 0$ , что множество  $S(\varepsilon)$  тех  $\theta$ , для которых хотя бы для одного решения  $x(t)$  такого, что  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| = \lambda_i$ , хотя бы при одном  $\tau$ ,  $|\tau| \geq T(\varepsilon)$ , справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|x(\theta + \tau)\|}{\|x(\theta)\|} - \lambda_i \right| > \varepsilon,$$

имеет относительную меру на прямой  $< \varepsilon$ .

Известно, что почти все уравнения — в смысле всякой инвариантной относительно сдвигов аргумента  $t$  нормированной меры, заданной на множестве уравнений вида (1), — абсолютно регулярны [6] (см. также § 4 обзора [7]). Несколько менее сильная теорема (о том, что почти все — в том же смысле, что и выше, — уравнения бирегулярны) доказана в [8], [9]; определение бирегулярной системы см. в [8] (напомним, что из бирегулярности следует правильность). Отметим, что в условиях теорем настоящей работы абсолютную регулярность нельзя заменить бирегулярностью. Причина этого состоит в том, что лемма 1 перестает быть верной при замене в ее условии абсолютной регулярности бирегулярностью.

Ниже существенно используются рассуждения из [2], поэтому во введении мы приводим модификации некоторых определений и утверждений из [2]. Следующее определение близко к определению допустимого случайного возмущения в [2].

Определение 2. Уравнение (2) называется допустимым случайным возмущением уравнения (1), если соответствующая ему система (4) является допустимым случайным возмущением соответствующей уравнению (1) системы (3), т. е. если матрица Коши  $Y_{\xi}(t, \tau; \omega)$  системы (4) удовлетворяет следующим условиям: найдутся  $\Xi^0 \in \mathcal{F}$  и  $\theta^0 > 0$  такие, что для всякого  $T > 0$  и всякого  $\xi \in \Xi^0$  существует  $\theta = \theta(\xi, T) \in [T, T + \theta^0]$  такое, что

1) случайные величины  $Y_{\xi}((i+1)\theta, i\theta; \omega)$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) независимы,

$$2a) e_{\xi, i} = E_{\xi} \left( \left| \exp \left\{ D \left\| \int_{i\theta}^{(i+1)\theta} C_{\xi}(t, \omega) dt \right\| \right\} - 1 \right\| \right) \xrightarrow[\xi, \mathcal{F}]{} 0 \text{ равномерно по } i \in \mathbb{Z}$$

(здесь обозначено  $D = \exp(2a(T + \theta^0))$ ,  $E_{\xi}(f(\omega)) = \int_{\Omega_{\xi}} f(\omega) d\mu_{\xi}$ , а обозначение  $f(\xi) \xrightarrow[\xi, \mathcal{F}]{} y$  равносильно обозначению  $\lim_{\xi, \mathcal{F}} f(\xi) = y$ );

2б)  $\inf_{i \in \mathbb{Z}} e_{\xi, i} > c \sup_{i \in \mathbb{Z}} e_{\xi, i}$ , где положительная константа  $c$  не зависит от  $\xi$ .

3) для всякого  $\varepsilon > 0$  найдутся  $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ ,  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$  и  $\Xi(\varepsilon) \in \mathcal{F}$  такие, что для всякого  $\xi \in \Xi(\varepsilon)$ , для всяких  $\mathbf{R}^k$  и  $\mathbf{R}^{n-k}$  ( $k$ -мерного и  $(n-k)$ -мерного линейных подпространств в  $\mathbf{R}^n$ ) ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) и всякого  $\tau = i\theta$  ( $i \in \mathbf{Z}$ ) множество тех  $\omega \in \Omega_\xi$ , для которых

$$[Y_\xi(\tau + \theta, \tau; \omega) \mathbf{R}^k] \cap \hat{\mathbf{R}}^{n-k}(\delta e_{\xi, i}^n) \neq \{0\},$$

имеет  $\mu_\xi$ -меру  $< \varepsilon$ ;  $\hat{\mathbf{R}}^r(\rho)$  обозначает конус, состоящий из векторов, образующих угол  $\leq \rho$  с подпространством  $\mathbf{R}^r$ .

Для произвольной невырожденной  $(n \times n)$ -матрицы  $X$  обозначим через  $d_1(X) \geq d_2(X) \geq \dots \geq d_n(X) > 0$  положительные квадратные корни из собственных значений матрицы  $X^*X$ . Положим  $e_m(X) = \prod_{i=1}^m d_i(X)$  ( $m=1, 2, \dots, n$ ). Очевидно, при любом  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , имеем

$$d_k(X) = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \subset \mathbf{R}^n} \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^{n-k+1} \\ x \neq 0}} \frac{\|Xx\|}{\|x\|} = \sup_{\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n} \inf_{\substack{x \in \mathbf{R}^k \\ x \neq 0}} \frac{\|Xx\|}{\|x\|}. \quad (5)$$

Нетрудно вывести и следующие формулы

$$e_m(XY) \leq e_m(X)e_m(Y) \quad (m=1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

$$e_m(X) = \sup_{\substack{\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n \\ \{x_1, \dots, x_k\} \text{ базис в } \mathbf{R}^k}} \frac{\Gamma_{Xx_1, \dots, Xx_k}}{\Gamma_{x_1, \dots, x_k}}, \quad (7)$$

где  $\Gamma_{x_1, \dots, x_k}$  — грамов объем векторов  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .

Определение 3 ([2]). Числа ( $k=1, 2, \dots, n$ )

$$v_k = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X((i+1)T, iT)) \quad (8)$$

называются вспомогательными показателями системы (3). Если существуют точные пределы по  $T \rightarrow +\infty$  (а не верхние) в формуле (8), то вспомогательные показатели системы (3) называются точными.

Следующая лемма устанавливает одно свойство абсолютно регулярных систем, которое нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 1 ([2], [10]). Если система (3) абсолютно регулярна, то она имеет точные вспомогательные показатели и

$$v_i = \lambda_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. Фиксируем произвольное  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ . По значению  $\varepsilon^2 > 0$  найдем  $T(\varepsilon^2)$  и  $S(\varepsilon^2)$  как в определении 1. Фиксируем произвольное  $T > 2T(\varepsilon^2)$ . Введем обозначение

$$S_1 = \{i \in \mathbf{Z} \mid [iT, (i+\varepsilon)T] \subset S(\varepsilon^2)\}.$$

Из определения  $S(\varepsilon^2)$  следует, что

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \text{card}(S_1 \cap [-N, N]) < \varepsilon. \quad (9)$$

Из определения  $S_1$  вытекает, что при  $i \notin S_1$  найдется  $\theta \in [iT, (i+\varepsilon)T]$  такое, что  $\theta \notin S(\varepsilon^2)$ . Поэтому, в силу (5), имеем

$$\begin{aligned}
d_k(X((i+1)T, iT)) &= d_k(X((i+1)T, \theta)X(\theta, iT)) \leq \\
&\leq d_k(X((i+1)T, \theta)) \|X(\theta, iT)\| \leq \exp\{(\lambda_k + \varepsilon^2)((i+1)T - \theta)\} \exp(a\varepsilon T) \leq \\
&\leq \exp(\lambda_k T + (2a+1)\varepsilon T).
\end{aligned}$$

При  $i \in S_1$  имеем  $d_k(X((i+1)T, iT)) \leq \exp(aT)$ . Следовательно, в силу (9), имеем

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X((i+1)T, iT)) \leq \lambda_k + (5a+1)\varepsilon. \quad (10)$$

Аналогично, имеем

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X((i+1)T, iT)) \geq \lambda_k - (5a+1)\varepsilon. \quad (11)$$

Из (10) и (11), в силу произвольности  $\varepsilon$ , сразу вытекает утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

### § 1. Кусочно-постоянные случайные возмущения

В этом параграфе мы будем рассматривать случай, когда уравнение (2) имеет вид

$$y^{(n)} + (a_1(t) + c_{\sigma,1}(t, \omega))y^{(n-1)} + \dots + (a_n(t) + c_{\sigma,n}(t, \omega))y = 0, \quad (1.1)$$

где  $c_{\sigma,i}(t, \omega) = c_{\sigma,i}\left(\left[\frac{t}{h}\right]h, \omega\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h$  — фиксированное положительное число,  $i = 1, 2, \dots, n$ , случайные величины  $c_{\sigma,i}(kh, \omega)$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) независимы и распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями  $a_{i,h}(\sigma)$  и дисперсиями  $(v_{i,h}(\sigma))^2$ , причем

$$|a_{i,h}(\sigma)| \leq M_1 \sigma \quad (i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{Z}), \quad (1.2)$$

$$M_2 \sigma \leq v_{i,h}(\sigma) \leq M_3 \sigma \quad (i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{Z}), \quad (1.3)$$

где положительные константы  $M_1, M_2, M_3$  не зависят от  $i, k, \sigma$ . Здесь роль параметра  $\xi$  в уравнении (2) играет параметр  $\sigma > 0$ , фильтр  $\mathcal{F}$  состоит из интервалов  $(0, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ). Мы будем пользоваться обозначениями во введении с заменой  $\xi$  на  $\sigma$  (например, вместо  $\Omega_\xi, \mu_\xi, C_\xi(t, \omega)$  будем писать  $\Omega_\sigma, \mu_\sigma, C_\sigma(t, \omega)$  соответственно и т. д.). Соответствующей уравнению (1.1) линейной системой будет система

$$\dot{y} = (A(t) + C_\sigma(t, \omega))y \quad (y \in \mathbb{R}^n). \quad (1.4)$$

Покажем, что при этих условиях уравнение (1.1) является допустимым случайным возмущением уравнения (1). Затем, применяя метод доказательства теоремы 3 в [2], докажем теорему о стохастической устойчивости при кусочно-постоянных возмущениях.

**Лемма 2.** Уравнение (1.1) удовлетворяет условиям 1), 2а) и 2б) определения 2.

**Доказательство.** Возьмем  $\mathbb{E}^0 = (0, 1)$ ,  $\theta^0 = h$ . Тогда для всякого  $T > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{E}^0$  найдется такое натуральное число  $\bar{k} = \bar{k}(T)$ , что  $\bar{k}h \in [T, T+h]$ . Положим  $\theta = \theta(T, \sigma) = \bar{k}h$ . Условие 1) определения 2 выполняется в силу независимости случайных величин  $c_{\sigma,i}(kh, \omega)$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ). Проверим условия 2а) и 2б) определения 2. Имеем

$$e_{\sigma, l} = E_{\sigma} \left( \left| \exp \left\{ D \left\| \int_{i\bar{k}}^{(i+1)\bar{k}} c_{\sigma, l}(t, \omega) dt \right\| \right\} - 1 \right| \right) \leq \\ \leq \int_{\Omega_{\sigma}} \left( \exp \left\{ Dh \sum_{l=1}^n \left| \sum_{j=i\bar{k}}^{(i+1)\bar{k}-1} c_{\sigma, l}(jh, \omega) \right| \right\} \right) d\mu_{\sigma} - 1.$$

Из того, что случайные величины  $c_{\sigma, l}(jh, \omega)$  независимы и распределены по нормальному закону с параметрами  $(a_{l, j}(\sigma), v_{l, j}(\sigma))$ , вытекает

$$e_{\sigma, l} \leq \prod_{l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(Dh |x|) \frac{1}{\sqrt{2\pi v_l}} \exp\left(-\frac{1}{2v_l^2}(x - a_l)^2\right) dx - 1, \quad (1.5)$$

где  $a_l = \sum_{j=i\bar{k}}^{(i+1)\bar{k}-1} a_{l, j}(\sigma)$ ,  $v_l^2 = \sum_{j=i\bar{k}}^{(i+1)\bar{k}-1} (v_{l, j}(\sigma))^2$ . С другой стороны, имеем

$$e_{\sigma, l} \geq \int_{\Omega_{\sigma}} \left( Dh \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left| \sum_{j=i\bar{k}}^{(i+1)\bar{k}-1} c_{\sigma, l}(jh, \omega) \right| \right) d\mu_{\sigma} = \\ = Dh \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi v_l}} \exp\left(-\frac{1}{2v_l^2}(x - a_l)^2\right) dx. \quad (1.6)$$

Оценим в отдельности каждый интеграл в выражениях (1.5) и (1.6). Из условий (1.2) и (1.3) вытекает, что  $|a_l| \leq M_1 \bar{k} \sigma$  ( $l=1, 2, \dots, n$ ),  $\bar{k} M_2^2 \sigma^2 \leq v_l^2 \leq \bar{k} M_3^2 \sigma^2$  ( $l=1, 2, \dots, n$ ). Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(Dh |x|) \frac{1}{\sqrt{2\pi v_l}} \exp\left(-\frac{1}{2v_l^2}(x - a_l)^2\right) dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(Dh v_l |y|) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y - \frac{a_l}{v_l}\right)^2\right) dy = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-Dh v_l |y| - \frac{1}{2}\left(y - \frac{a_l}{v_l}\right)^2\right) dy + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(Dh v_l |y| - \frac{1}{2}\left(y - \frac{a_l}{v_l}\right)^2\right) dy \leq \\ \leq [\exp(h^2 D^2 \bar{k} M_3^2 \sigma + Dh \bar{k} M_1) \sigma] \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} Dh v_l\right). \quad (1.7)$$

И, также

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi v_l}} \exp\left(-\frac{1}{2v_l^2}\left(x - \frac{a_l}{v_l}\right)^2\right) dx = \\ = \frac{2v_l}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a_l^2}{v_l^2}\right) + a_l \int_{-\frac{a_l}{v_l}}^{+\frac{a_l}{v_l}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \geq \frac{1}{6} v_l \geq \frac{1}{6} \sqrt{\bar{k}} M_2 \sigma. \quad (1.8)$$

Из (1.5)–(1.8) вытекает, что существуют положительные константы

$L_1, L_2$ , не зависящие от  $\sigma, i$ , такие, что

$$L_1\sigma < e_{\sigma,i} < L_2\sigma. \quad (1.9)$$

Следовательно, условие 2а) определения 2 выполняется. Возьмем  $c = \frac{L_1}{2L_2}$ . Тогда

$$\inf_{i \in Z} e_{\sigma,i} \geq L_1\sigma > cL_2\sigma \geq c \sup_{i \in Z} e_{\sigma,i}.$$

Значит, и условие 2б) определения 2 выполняется. Лемма 2 доказана.

*Лемма 3. Уравнение (1.1) удовлетворяет условию 3 определения 2.*

*Доказательство.* Возьмем  $\Xi^0 = (0, 1)$ ,  $\theta^0 = h$  как в лемме 2. Пусть  $\tau = ih$ , где  $i$  — произвольное целое число. Для краткости записи обозначим через  $Y$  матрицу Коши  $Y_\sigma(\tau+h, \tau; \omega)$  системы (1.4). Фиксируем произвольные  $\mathbf{R}^k$  и  $\mathbf{R}^{n-k}$  ( $k$ -мерное и  $(n-k)$ -мерное линейные подпространства в  $\mathbf{R}^n$ ). Пусть  $\{f_1, \dots, f_k\}$  — ортонормированный базис в  $\mathbf{R}^k$ , а  $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$  — ортонормированный базис в  $\mathbf{R}^{n-k}$ . Через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  обозначим стандартный ортонормированный базис в  $\mathbf{R}^n$ . Пусть  $U$  — ортогональное преобразование, переводящее  $f_j$  в  $e_j$  ( $j = k+1, \dots, n$ ). Обозначим через  $\alpha$  угол между пространством  $Y\mathbf{R}^k$  и пространством  $\mathbf{R}^{n-k}$ . Имеем

$$\sin^2 \alpha = \inf_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in \mathbf{R}^k}} \frac{\sum_{j=1}^k (UYf, e_j)^2}{\sum_{j=1}^n (UYf, e_j)^2} \geq \frac{\inf_{f \in \mathbf{R}^k} \sum_{j=1}^k (UYf, e_j)^2}{\|UY\|^2} \geq \frac{\inf_{\|f\|=1} \sum_{j=1}^k (UYf, e_j)^2}{\|Y\|^2}.$$

Обозначим через  $(b_{1j}, \dots, b_{nj})$  вектор  $UYf_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Составим  $(k \times k)$ -матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица  $B$  невырождена. Тогда

$$\inf_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in \mathbf{R}^k}} \sum_{j=1}^k (UYf, e_j)^2 = \inf_{\sum_{j=1}^k g_j^2 = 1} \left\| B \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{\|B^{-1}\|^2} \geq \left( \frac{\text{def } B}{k! \max_{1 \leq l, m \leq k} |b_{lm}|^{k-1}} \right)^2.$$

(Здесь норма понимается в соответствующих евклидовых пространствах.) Из определения матрицы  $B$  вытекает, что  $\max_{1 \leq l, m \leq k} |b_{lm}| \leq \|Y\|$ . Поэтому

$$\sin^2 \alpha \geq \left( \frac{\text{det } B}{k! \|Y\|^{k-1}} \right)^2 \frac{1}{\|Y\|^2}.$$

Следовательно,

$$\alpha \geq \frac{|\text{det } B|}{n! \|Y\|^k}. \quad (1.10)$$

Заметим, что формула (1.10) верна и для случая вырожденной матрицы  $B$ . Напишем формулу для матрицы Коши  $Y = Y_\sigma(\tau+h, \tau; \omega)$  системы (1.4) (см. [11, с. 74])

$$Y = E + \int_{ih}^{(i+1)h} (A(t_1) + C_\sigma(ih, \omega)) dt_1 + \\ + \int_{ih}^{(i+1)h} (A(t_1) + C_\sigma(ih, \omega)) \int_{ih}^{t_1} (A(t_2) + C_\sigma(ih, \omega)) dt_2 dt_1 + \dots \quad (1.11)$$

Из (1.11) вытекает, что элементы матрицы  $Y$  являются аналитическими функциями от  $\{c_{\sigma,1}(ih, \omega), \dots, c_{\sigma,n}(ih, \omega)\}$  и  $\|Y\| \leq \exp^h(a + \|C_\sigma(ih, \omega)\|)$ . Поэтому, в силу (1.10), имеем

$$\alpha \geq \frac{|\det B|}{n! \exp nh(a + \|C_\sigma(ih, \omega)\|)} \quad (1.12)$$

Из определения матрицы  $B$  и формулы (1.11) вытекает, что  $\det B$  является аналитической функцией от переменных  $\{c_{\sigma,1}(ih, \omega), \dots, c_{\sigma,n}(ih, \omega)\}$  при любом фиксированном  $\bar{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ . Покажем, что функция  $\det B$  не является тождественно равной нулю функцией при любом фиксированном  $\bar{f}$ . На самом деле, пусть фиксирован  $\bar{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ , т. е. фиксированы подпространства  $\mathbf{R}^k = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  и  $\mathbf{R}^{n-k} = \langle f_{k+1}, \dots, f_n \rangle$ . Допустим, что при этом значении  $\bar{f}$  (т. е. при этих  $\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^{n-k}$ )  $\det B \equiv 0$ . По асимптотической формуле решений уравнения (1.1) (см. [12, с. 59]) при больших  $c_{\sigma,n}(ih, \omega)$  ( $=\rho^n$ ) и малых  $c_{\sigma,1}(ih, \omega), \dots, c_{\sigma,n-1}(ih, \omega)$  уравнение (1.1) имеет решения

$$\begin{cases} y_l = e^{\rho\omega_l(t-\tau)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right], \\ \dot{y}_l = \rho e^{\rho\omega_l(t-\tau)} \left[ \omega_l + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right], \\ \vdots \\ y_l^{(n-1)} = \rho^{n-1} e^{\rho\omega_l(t-\tau)} \left[ \omega_l^{n-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \quad (l=1, 2, \dots, n), \end{cases} \quad (1.13)$$

где  $\omega_l$  ( $l=1, 2, \dots, n$ ) — корни  $n$ -й степени из единицы. Из условия  $\det B = 0$  вытекает, что существует такое нетривиальное решение  $y(t)$  системы (1.4), что  $y(\tau) \in \mathbf{R}^k, y(\tau+h) \in \mathbf{R}^{n-k}$ . Это же решение удовлетворяет краевым условиям  $U_j(y) = 0$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), где условия  $U_j(y) = 0$  ( $j=1, \dots, n-k$ ) определяются из условия  $y(\tau) \in \mathbf{R}^k$ , а условия  $U_j(y) = 0$  ( $j=n-k+1, \dots, n$ ) определяются из условия  $y(\tau+h) \in \mathbf{R}^{n-k}$  (см. [12, с. 15, 16]). Легко видеть, что можно подобрать краевые условия так, чтобы они принимали вид

$$\begin{cases} U_j(y) = y_{l_j}(\tau) + \alpha_{j,l_{j+1}} y_{l_{j+1}}(\tau) + \dots + \alpha_{j,n} y_n(\tau), \\ j=1, 2, \dots, n-k, l_1 < l_2 < \dots < l_{n-k}, \\ U_m(y) = y_{l_m}(\tau+h) + \alpha_{m,l_{m+1}} y_{l_{m+1}}(\tau+h) + \dots + \alpha_{m,n} y_n(\tau+h), \\ m=n-k+1, \dots, n, l_{n-k+1} < l_{n-k+2} < \dots < l_n. \end{cases} \quad (1.14)$$

Из асимптотической формулы (1.13), существования нетривиального решения краевой задачи (1.14) вытекает (см. [12, с. 16]), что

$$\det U = \det \begin{pmatrix} (\rho\omega_1)^{l_1} & \dots & (\rho\omega_n)^{l_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (\rho\omega_1)^{l_{n-k}} & \dots & (\rho\omega_n)^{l_{n-k}} \\ (\rho\omega_1)^{l_{n-k+1}} e^{\rho\omega_1 h} & \dots & (\rho\omega_n)^{l_{n-k+1}} e^{\rho\omega_n h} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (\rho\omega_1)^{l_n} e^{\rho\omega_1 h} & \dots & (\rho\omega_n)^{l_n} e^{\rho\omega_n h} \end{pmatrix} = 0.$$

Раскрывая выражение для  $\det U$ , получим

$$\det U = \pm e^{\rho h(\omega_1 + \dots + \omega_k)} \rho^{\sum_{j=1}^n l_j} \omega_1^{\sum_{j=n-k+1}^n l_j} \times$$

$$\times \prod_{n-k+1 \leq m < j \leq n} (\omega_1^{l_j} - \omega_1^{l_m}) \prod_{1 \leq m < j \leq n-k} (\omega_1^{-l_j} - \omega_1^{-l_m}) + \dots \quad (1.15)$$

Знак плюс или минус ставится перед первым членом в выражении (1.15) в соответствии со значениями  $k$  и  $n$ . Из (1.15) вытекает, что  $\det U$  не является тождественно равной нулю функцией от  $\rho$ . Следовательно,  $\det B$  не является тождественно равной нулю функцией при любом фиксированном значении  $\bar{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ .

Напомним, что через  $X(t, \tau)$  мы обозначаем матрицу Коши системы (3). Система (1.4) преобразованием  $y(t) = X(t, \tau)z(t)$  приводится к виду

$$\dot{z} = X^{-1}(t, \tau)C_\sigma(t, \omega)X(t, \tau)z(t). \quad (1.16)$$

Обозначим через  $Z_\sigma(t, \tau; \omega)$  матрицу Коши системы (1.16). Тогда

$$Y = Y_\sigma(\tau+h, \tau; \omega) = X(\tau+h, \tau)Z_\sigma(\tau+h, \tau; \omega). \quad (1.17)$$

Напомним, что момент  $\tau = ih$  заранее зафиксирован. Обозначим через  $X_i(t)$  матрицу  $X(\tau+t, \tau)$  ( $t \in [0, h]$ ). Из (1.11), (1.16) и (1.17) вытекает, что элементы матрицы  $Y$  найдутся по значениям  $X_i(t)$ ,  $C_\sigma(ih, \omega)$ . Следовательно, функция  $\det B$  есть функция от  $X_i(t)$ ,  $\bar{f}$  и вектора  $c = \{c_{\sigma,1}(ih, \omega), \dots, c_{\sigma,n}(ih, \omega)\}$ . Поэтому обозначим функцию  $\det B$  через  $F(X_i(t), \bar{f}, c)$ . Точки  $X_i(t)$  рассматриваются в пространстве матричных функций на  $[0, h]$  с равномерной метрикой. Точки  $\bar{f}$  принадлежат пространству  $V_{n,h} \times V_{n,n-h}$ , где  $V_{n,r}$  — многообразие Штифеля (см. [13, с. 446]). Точки  $c \in \mathbb{R}^n$ . Из доказанного вытекает, что функция  $F(X_i(t), \bar{f}, c)$  ( $= \det B$ ) является аналитической функцией от  $c \in \mathbb{R}^n$ , нетождественно равной нулю при любом фиксированном значении  $(X_i(t), \bar{f})$ . А коэффициенты функции  $F(X_i(t), \bar{f}, c)$  при степенях вектора  $c \in \mathbb{R}^n$  непрерывно зависят от  $X_i(t)$ ,  $\bar{f}$ . Пусть  $M$  — произвольное положительное число. Из доказанного вытекает, что при любом значении  $(X_i(t), \bar{f})$  найдутся числа  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^+$  такие, что выполняется неравенство

$$\text{mes}(|F(X_i(t), \bar{f}, c)| < \gamma \cap \|c\| \leq M) < \delta \sqrt[m]{\gamma}$$

в некоторой окрестности точки  $(X_i(t), \bar{f})$ . Здесь через  $\text{mes}(A)$  обозначается объем множества  $A$  в  $\mathbb{R}^n$ . Следовательно, в силу компактности семейства  $\{X_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  в пространстве непрерывных матричных функций на  $[0, h]$  (так как  $X_i(0) = E$ ,  $\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|A(t)\| < a$ ) и компактности пространства  $V_{n,h} \times V_{n,n-h}$ , существуют числа  $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_i \in \mathbb{R}^+$ , зависящие от  $M$ , такие, что при любых  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $f \in V_{n,h} \times V_{n,n-h}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^+$

$$\text{mes}(|F(X_i(t), \bar{f}, c)| < \gamma \cap \|c\| \leq M) \leq \delta_i \sqrt[m_i]{\gamma}. \quad (1.18)$$

Из (1.18) вытекает, что при  $\sigma \in (0, 1)$

$$\text{mes}(|F(X_i(t), \bar{f}, \sigma c)| < \gamma \cap \|c\| \leq M) < \delta_i \frac{\sqrt[m_i]{\gamma}}{\sigma^n}$$

или, что то же самое, при любых  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\bar{f} \in V_{n,h} \times V_{n,n-h}$ ,  $\gamma > 0$

$$\text{mes}(|F(X_i(t), \bar{f}, c)| < \gamma \cap \|\sigma^{-1}c\| \leq M) < \delta_1 \frac{m_1 \sqrt{\gamma}}{\sigma^n}. \quad (1.19)$$

Пусть дано число  $\varepsilon > 0$ . Из (1.2), (1.3) вытекает, что найдется положительное число  $M$  такое, что

$$\mu_\sigma(\|\sigma^{-1}c\| > M) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\sigma \in (0, 1)).$$

По значению  $M$  найдем  $\delta_1, m_1$ , удовлетворяющие (1.19). Возьмем  $\sigma_1 \in (0, 1)$  настолько малым, чтобы было выполнено неравенство  $\delta_1 \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{2} (\sqrt{2\pi} M_2)^n$ . Положим в (1.19) значение  $\gamma = \sigma^{(n+1)m_1}$ . Из выбора  $M, \sigma_1$  и формул (1.3), (1.12) вытекает, что при  $\sigma \in (0, \sigma_1)$  множество тех  $\omega$ , для которых при любых  $\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^{n-k}$  угол  $\alpha$  между  $Y\mathbf{R}^k$  и  $\mathbf{R}^{n-k}$  при любом  $\tau = ih$  удовлетворяет неравенству

$$\alpha \geq \frac{\sigma^{(n+1)m_1}}{n! \exp\{nh(a+nM)\}}, \quad (1.20)$$

имеет  $\mu_\sigma$ -меру  $< \varepsilon$ . Из (1.20) и леммы 2 вытекает утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

*З а м е ч а н и е 1.* Из доказательств лемм 2 и 3 видно, что в случае отсутствия возмущений коэффициентов  $a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ , т. е.  $c_{\sigma_i}(t, \omega) \equiv 0$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ), а  $c_{\sigma_n}(t, \omega)$  удовлетворяет тем же условиям, как в начале параграфа, то уравнение (1.1) остается допустимым случайным возмущением уравнения (1).

*Т е о р е м а 1.* Если уравнение (1) абсолютно регулярно, то для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\sigma(\varepsilon) > 0$  такое, что для всякого  $\sigma \in (0, \sigma(\varepsilon))$  для почти всех  $\omega \in \Omega_\sigma$  (в смысле меры  $\mu_\sigma$ ) характеристические показатели Ляпунова  $\lambda_1(\sigma, \omega) \geq \dots \geq \lambda_n(\sigma, \omega)$  уравнения (1.1) удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_i(\sigma, \omega) - \lambda_i| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* 1. Пусть дано  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Из лемм 2 и 3 вытекает, что уравнение (1.1) является допустимым случайным возмущением уравнения (1). По значению  $\varepsilon$ , в силу леммы 3, найдем значение  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ . Возьмем  $T_1 > \frac{8n_0}{\varepsilon}$  такое, что при  $T > T_1$  выполняются неравенства

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X((i+1)T, iT)) \leq \lambda_k + \varepsilon^2 (4n)^{-2} n_0^{-1},$$

$$\underline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X((i+1)T, iT)) \geq \lambda_k - \varepsilon^2 (4n)^{-2} n_0^{-1}.$$

Такое  $T_1$  найдется в силу (10) и (11). По значениям  $\varepsilon$  и  $T_1$  мы найдем значения  $\theta^0, \theta = \theta(\sigma, T_1) \in [T_1, T_1 + \theta^0]$ ,  $e_{\sigma, i}, c, \delta = \delta(\varepsilon, T_1), \Xi(\varepsilon)$  как в определении 2. Возьмем число  $\eta \in (0, 1)$  такое, что из неравенств  $|t - \tau| \leq \leq T_1 + \theta^0, \sin \sphericalangle(x, y) < \eta$  вытекает

$$\|X(t, \tau)y\| \|x\| \leq \exp\left(\frac{\varepsilon}{8n_0} T_1\right) \|X(t, \tau)x\| \|y\|.$$

Из формул (1.16) и (1.17), при  $t_i, \tau_i \in [i\theta, (i+1)\theta]$  имеем

$$\begin{aligned}
e_\sigma &= \sup_{i \in \mathbb{Z}} E_\sigma (\|E - X^{-1}(t_i, \tau_i) Y_\sigma(t_i, \tau_i; \omega)\|) \leq \\
&\leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} E_\sigma (\|E - Z_\sigma(t_i, \tau_i; \omega)\|) \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} e_{\sigma, i}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Возьмем  $T_2 > 2(T_1 + \theta^0)$  такое, что

$$\delta(c\varepsilon\eta)^{n_0} \exp\left(\frac{\varepsilon}{4} T_2\right) > 2 \tag{1.22}$$

и из  $T \geq T_2$  следует  $T \leq T_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{8n_0} T\right)$ . Возьмем  $\sigma_1 \in \Xi(\varepsilon)$  такое, что при  $\sigma \in (0, \sigma_1)$

$$\delta(\sup_{i \in \mathbb{Z}} e_{\sigma, i})^{n_0} \exp(\varepsilon T_2) < 2.$$

Фиксируем произвольное  $\sigma \in (0, \sigma_1)$ . Берем  $S > T_2$  такое, что

$$\delta(\inf_{i \in \mathbb{Z}} e_{\sigma, i})^{n_0} \exp(\varepsilon S) = 2. \tag{1.23}$$

Пусть  $T = N\theta$  — наименьшее целое кратное  $\theta$ , большее  $S$ . Из (1.21) — (1.23), выбора  $T_2$  и условия 2б) определения 2 следует

$$\frac{e_\sigma}{\varepsilon} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2n_0} T\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} (\sup_{i \in \mathbb{Z}} e_{\sigma, i}) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2n_0} T\right) < \eta, \tag{1.24}$$

$$\delta(\inf_{i \in \mathbb{Z}} e_{\sigma, i})^{n_0} \exp(\varepsilon T) \geq 2. \tag{1.25}$$

2. Обозначим  $X_{i, s+1, s} = X_{i, s+1} X_{i, s}^{-1}$ ,  $X_i = X((i+1)T, iT)$ ,  $X_{i, s} = X(iT + s\theta, iT)$  и аналогично для  $Y_\sigma$ , например,  $Y_{\sigma, i}(\omega) = Y_\sigma((i+1)T, iT; \omega)$ . Из выбора  $T_1$  и соотношения  $T = N\theta \geq NT_1$  вытекает, что для всякого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \left( \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{N-1} \ln e_k(X_{i, s+1, s}) - \frac{1}{lT} \sum_{i=0}^{l-1} \ln e_k(X_i) \right) \leq \\
&\leq \overline{\lim}_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{lN\theta} \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{s=0}^{N-1} \ln e_k(X_{i, s+1, s}) - \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{lT} \sum_{i=0}^{l-1} \ln e_k(X_i) \leq \\
&\leq \left( \lambda_1 + \dots + \lambda_k + \frac{k\varepsilon^2}{16n^2n_0} \right) - \left( \lambda_1 + \dots + \lambda_k - \frac{k\varepsilon^2}{16n^2n_0} \right) \leq \frac{\varepsilon^2}{8nn_0}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, из (6) вытекает, что

$$\sum_{s=0}^{N-1} \ln e_k(X_{i, s+1, s}) - \ln e_k(X_i) \geq 0.$$

Следовательно, объединение  $\Sigma$  тех полуинтервалов  $[iT, (i+1)T]$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ), для которых не выполнено хоть одно из неравенств

$$\frac{1}{T} \sum_{s=0}^{N-1} \ln e_k(X_{i, s+1, s}) - \frac{1}{T} \ln e_k(X_i) < \frac{\varepsilon}{8n_0}$$

( $k=1, \dots, n$ ), имеет относительную меру  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \text{mes } \Sigma \cap [0, t] < \varepsilon$ .

3. Обозначим через  $\bar{\mathbf{R}}_i^k$  подпространство, натянутое на  $k$  первых (в порядке убывания собственных значений) собственных векторов матрицы  $X_i^* X_i$ . При каждом фиксированном  $s$  фиксируем в  $\mathbf{R}^n$  ортонорми-

рованный базис  $x_{i,s,1}, \dots, x_{i,s,n}$  такой, что  $x_{i,s,h} \in X_{i,s} \bar{\mathbf{R}}_i^h$  ( $k=1, \dots, n$ ). Обозначим через  $X_{i,s+1,s}^{(k)}$  матрицу, с помощью которой записывается в базисах  $x_{i,s,j}$  ( $j \leq k$ ),  $x_{i,s+1,j}$  ( $j \leq k$ ) сужение на  $X_{i,s} \bar{\mathbf{R}}_i^k$  отображения, задаваемого в стандартном базисе в  $\mathbf{R}^n$  матрицей  $X_{i,s+1,s}$ . Очевидно, при  $m \leq k$

$$e_m(X_{i,s-1,s}^{(k)}) \leq e_m(X_{i,s+1,s}). \quad (1.26)$$

Фиксируем произвольное  $i$ . При  $m \leq k$ , в силу определений  $\bar{\mathbf{R}}_i^k$ ,  $X_{i,s+1,s}^{(k)}$  и формулы (6), имеем

$$\prod_{s=0}^{N-1} e_m(X_{i,s+1,s}^{(k)}) \geq e_m\left(\prod_{s=0}^{N-1} X_{i,s+1,s}^{(k)}\right) = e_m(X_i).$$

Из определения множества  $\Sigma$  вытекает, что для  $iT \notin \Sigma$  имеет место неравенство

$$e_m(X_i) \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8n_0} T\right) \prod_{s=0}^{N-1} e_m(X_{i,s+1,s}).$$

Следовательно, при  $m \leq k$ ,  $iT \notin \Sigma$  имеем

$$\prod_{s=0}^{N-1} e_m(X_{i,s+1,s}^{(k)}) \geq e_m(X_i) \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8n_0} T\right) \prod_{s=0}^{N-1} e_m(X_{i,s+1,s}). \quad (1.27)$$

Из (1.27) при  $m=k$  и (1.26) при  $m=k-1$  имеем

$$\prod_{s=0}^{N-1} d_k(X_{i,s+1,s}^{(k)}) \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8n_0} T\right) \prod_{s=0}^{N-1} d_k(X_{i,s+1,s}). \quad (1.28)$$

Пусть  $M_{\sigma,i}$  — множество тех  $\omega \in \Omega_\sigma$ , для которых

$$\sum_{s=0}^{N-1} \|E - X_{i,s+1,s} Y_{\sigma,i,s+1,s}^{-2}(\omega)\| \leq e_\sigma \varepsilon^{-1} N.$$

Применив (1.21) при  $t_i = i\theta$ ,  $\tau_i = (i+1)\theta$ , получим  $\mu_\sigma(M_{\sigma,i}) > 1 - \varepsilon$ . Фиксируем произвольное  $\omega \in M_{\sigma,i}$  и обозначим  $\varkappa_s = \|E - X_{i,s+1,s} Y_{\sigma,i,s+1,s}^{-1}(\omega)\|$ . Из выбора  $T_1, T_2, T_3$  и формулы (1.24) следует

$$e_\sigma \varepsilon^{-1} N < \eta \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2n_0} T\right) N < \eta \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{8n_0} T\right) \frac{T_1}{T} N < \eta \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{8n_0} T\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{s=0}^{N-1} \varkappa_s < \eta \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{8n_0} T\right). \quad (1.29)$$

Пусть  $\bar{x} \in \bar{\mathbf{R}}_i^h$ . Обозначим через  $\beta_s$  синус угла между вектором  $y_s = Y_{\sigma,t,s}(\omega) \bar{x}$  и подпространством  $X_{i,s} \bar{\mathbf{R}}_i^h$ ,  $\beta_0 = 0$ . Пусть  $\beta_s < \eta$  при  $s < \bar{s}$ . Имеем  $\beta_{s+1} \leq \alpha_{s+1} + \gamma_{s+1}$ , где

$$\alpha_{s+1} = \sin \angle (Y_{\sigma,t,s+1,s}(\omega) y_s, X_{i,s+1,s} y_s) \leq \varkappa_s,$$

$$\gamma_{s+1} = \sin \angle (X_{i,s+1,s} y_s, X_{i,s+1} \bar{\mathbf{R}}_i^h).$$

Оценим величину  $\gamma_{s+1}$ . Обозначим через  $x_l$  вектор  $X_{i,s+1,s} x_{i,s,l}$  ( $l=1, 2, \dots, k$ ). Из определений  $x_{i,s,l}$ ,  $X_{i,s+1,s}^{(k)}$  и формулы (7) вытекает, что  $\Gamma_{x_1, \dots, x_k} = e_k(X_{i,s+1,s}^{(k)})$ . Обозначим через  $y_s^1$  такой вектор, что  $y_s^1 \perp X_{i,s} \mathbf{R}_i^h$  и  $y_s - y_s^1 \in X_{i,s} \mathbf{R}_i^h$ , через  $y_s^2$  — такой вектор, что  $y_s^2 \perp X_{i,s+1} \bar{\mathbf{R}}_i^h$ ,  $X_{i,s+1,s} y_s - y_s^2 \in$

$\in X_{i,s+1} \bar{R}_i^k$ . Тогда  $\beta_s = \frac{\|y_s^1\|}{\|y_s\|}$  и  $\gamma_{s+1} = \frac{\|y_s^2\|}{\|X_{i,s+1,s} y_s\|}$ . В силу (7) имеем

$$e_{k+1}(X_{i,s+1,s}) \geq \frac{\Gamma_{X_{i,s+1,s} y_s, x_1, \dots, x_k}}{\Gamma_{y_s, x_1, s, 1, \dots, x_1, s, k}} = \frac{\|y_s^2\| \Gamma_{x_1, \dots, x_k}}{\|y_s^1\| \cdot 1} = \frac{\gamma_{s+1} \|X_{i,s+1,s} y_s\| e_k(X_{i,s+1,s}^{(k)})}{\beta_s \|y_s\|}.$$

Следовательно,  $\gamma_{s+1} \leq \beta_s e_{k+1}(X_{i,s+1,s}) \|y_s\| \|X_{i,s+1,s} y_s\|^{-1} [e_k(X_{i,s+1,s}^{(k)})]^{-1}$ . Из выбора  $\eta$ , предложения  $\beta_s < \eta$ , формулы (5) вытекает, что

$$\|X_{i,s+1,s} y_s\| \|y_s\|^{-1} \geq d_k(X_{i,s+1,s}^{(k)}) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8n_0} \theta\right).$$

Поэтому, в силу неравенства  $e_{k+1}(X) \leq e_k(X) d_k(X)$ , имеем  $\beta_{s+1} \leq \kappa_s + \lambda_s \beta_s$ , где  $\lambda_s = e_k(X_{i,s+1,s}) d_k(X_{i,s+1,s}) [e_k(X_{i,s+1,s}^{(k)}) d_k(X_{i,s+1,s}^{(k)})]^{-1} \exp\left(\frac{\varepsilon}{8n_0} \theta\right)$ ,  $\lambda_s > 1$  ( $s = 0, 1, \dots, N-1$ ). Отсюда, при  $s < \bar{s}$  в силу (1.27)–(1.29) имеем

$$\begin{aligned} \beta_{s+1} &\leq \left(\sum_{j=0}^s \kappa_j\right) \prod_{j=1}^s \lambda_j \leq \eta \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{8n_0} T\right) \times \\ &\times \prod_{s=0}^{N-1} e_k(X_{i,s+1,s}) d_k(X_{i,s+1,s}) [e_k(X_{i,s+1,s}^{(k)}) d_k(X_{i,s+1,s}^{(k)})]^{-1} \exp\left(\frac{\varepsilon}{8n_0} \theta\right) \leq \\ &\leq \eta \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{8n_0} T\right) \exp\left(\frac{\varepsilon}{8n_0} T\right) \exp\left(\frac{\varepsilon}{8n_0} T\right) \exp\left(N \frac{\varepsilon}{8n_0} \theta\right) = \eta. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\beta_s < \eta$  при любом  $s \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Отсюда, используя свойство числа  $\eta$  и неравенства (1.26)–(1.28), получаем для всякого  $\bar{x} \in \bar{R}_i^k$

$$\begin{aligned} \|Y_{\sigma,i}(\omega) \bar{x}\| \|\bar{x}\|^{-1} &= \prod_{s=0}^{N-1} \|Y_{\sigma,i,s+1,s}(\omega) y_s\| \|y_s\|^{-1} = \prod_{s=0}^{N-1} \frac{\|X_{i,s+1,s} y_s\|}{\|y_s\|} \times \\ &\times \frac{\|Y_{\sigma,i,s+1,s}(\omega) y_s\|}{\|X_{i,s+1,s} y_s\|} \geq \prod_{s=0}^{N-1} d_k(X_{i,s+1,s}^{(k)}) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8n_0} \theta\right) \frac{1}{\|X_{i,s+1,s} Y_{\sigma,i,s+1,s}^{-1}(\omega)\|} \geq \\ &\geq \prod_{s=0}^{N-1} d_k(X_{i,s+1,s}^{(k)}) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8n_0} \theta\right) (1 + \kappa_s)^{-1} \geq \exp\left(-\sum_{s=0}^{N-1} \kappa_s - \frac{2\varepsilon}{8n_0} T\right) \times \\ &\times \prod_{s=0}^{N-1} d_k(X_{i,s+1,s}) \geq \exp\left(-\eta \exp\left(-\frac{3\varepsilon}{8n_0} T\right) - \frac{\varepsilon}{4n_0} T\right) \prod_{s=0}^{N-1} e_k(X_{i,s+1,s}) \times \\ &\times [e_{k-1}(X_{i,s+1,s})]^{-1} \geq \exp\left(-1 - \frac{\varepsilon}{4n_0} T\right) e_k(X_i) \left[e_{k-1}(X_i) \exp\left(\frac{\varepsilon}{8n_0} T\right)\right]^{-1} \geq \\ &\geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8n_0} T - \frac{\varepsilon}{4n_0} T - \frac{\varepsilon}{8n_0} T\right) d_k(X_i). \end{aligned}$$

Следовательно, при  $\bar{x} \in \bar{R}_i^k$ ,  $iT \in \Sigma$ , имеем

$$\|Y_{\sigma,i}(\omega) \bar{x}\| \|\bar{x}\|^{-1} \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2n_0} T\right) d_k(X_i) \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} T\right) d_k(X_i).$$

Поэтому, в силу (5), при  $iT \in \Sigma$

$$d_k(Y_{\sigma,i}(\omega)) \geq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} T\right) d_k(X_i). \quad (1.30)$$

Пусть  $R_{\sigma,i,\omega}^{n-k}$  — подпространство, натянутое на  $n-k$  последних (в порядке убывания собственных значений) собственных векторов матрицы

$Y_{\sigma,i}^*(\omega) Y_{\sigma,i}(\omega)$ . При  $iT \notin \Sigma$ ,  $\omega \in M_{\sigma,i}$ ,  $y \in \hat{R}_{\sigma,i,\omega}^{n-k}(\delta e_{\sigma,i}^{n_0})$ , в силу (1.25), (1.30), имеем

$$\begin{aligned} & \|Y_{\sigma,i}(\omega) y\| \|y\|^{-1} \geq d_k(Y_{\sigma,i}(\omega)) \sin(\delta e_{\sigma,i}^{n_0}) \geq \\ & \geq d_k(Y_{\sigma,i}(\omega)) \frac{\delta e_{\sigma,i}^{n_0}}{2} \geq d_k(X_i) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} T\right) \exp(-\varepsilon T). \end{aligned}$$

Следовательно, для всякого  $iT \notin \Sigma$ ,  $\omega \in M_{\sigma,i}$ ,  $y \in \hat{R}_{\sigma,i,\omega}^{n-k}(\delta e_{\sigma,i}^{n_0})$  имеет место неравенство

$$\|Y_{\sigma,i}(\omega) y\| \|y\|^{-1} \geq d_k(X_i) \exp(-2\varepsilon T). \quad (1.31)$$

4. Пусть теперь  $\sigma$  и  $T$  фиксированы как указано раньше, а  $\omega$  и  $i$  — произвольные. Введем обозначение

$$\eta_i(\omega) = \frac{1}{T} \ln \|Y_{\sigma,i}(\omega)\|.$$

Фиксируем произвольное  $k$ -мерное линейное подпространство  $\mathbf{R}^k$  в  $\mathbf{R}^n$ . Обозначим через  $Q_i$  ( $i \in \mathbf{Z}$ ) множество тех  $\omega \in \Omega_\sigma$ , для которых

$$[Y_\sigma(iT, 0; \omega) \mathbf{R}^k] \cap \hat{R}_{\sigma,i,\omega}^{n-k}(\delta e_{\sigma,i}^{n_0}) \neq \{0\}.$$

В силу леммы 3 имеем  $\mu_\sigma(Q_i) \leq \varepsilon$  ( $i \in \mathbf{Z}$ ). Обозначим через  $\chi_i^{(1)}(\omega)$ ,  $\chi_i^{(2)}(\omega)$  характеристические функции множеств  $\Omega_\sigma \setminus M_{\sigma,i}$  и  $Q_i$  соответственно. Из условий теоремы вытекает, что при каждой фиксации всех значений  $\chi_j^{(2)}(\omega)$ ,  $\eta_j(\omega)$  ( $j=0, 1, \dots, i-2$ ) условная вероятность  $\chi_i^{(2)}(\omega)$  не больше  $\varepsilon$ . По индукции можно строить случайные величины  $\bar{\chi}_i^{(2)}(\omega)$  такие, что  $\bar{\chi}_i^{(2)}(\omega) \geq \chi_i^{(2)}(\omega)$ ,  $\mu_\sigma(\bar{\chi}_i^{(2)}(\omega) = 1) = \varepsilon$ ,  $\mu_\sigma(\bar{\chi}_i^{(2)}(\omega) = 0) = 1 - \varepsilon$  ( $i=1, 2, \dots$ ) и случайная величина  $\bar{\chi}_{2s}^{(2)}(\omega)$  не зависит от случайных величин  $\bar{\chi}_{2j}^{(2)}(\omega)$ ,  $\eta_{2j}(\omega)$  ( $j=0, 1, \dots, s-1$ ), а случайная величина  $\bar{\chi}_{2s+1}^{(2)}(\omega)$  не зависит от случайных величин  $\bar{\chi}_{2j+1}^{(2)}(\omega)$ ,  $\eta_{2j+1}(\omega)$  ( $j=0, 1, \dots, s-1$ ). Положим

$$\begin{aligned} \zeta_i(\omega) = \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^k \\ y \neq 0}} & \left\{ \frac{1}{T} \ln \|Y_\sigma((i+1)T, 0; \omega) y\| - \frac{1}{T} \ln \|Y_\sigma(iT, 0; \omega) y\| \right\} - \\ & - \frac{1}{T} \ln d_k(X_i). \end{aligned}$$

Из (1.31), определений  $M_{\sigma,i}$ ,  $Q_i$  вытекает, что

- а) при  $\omega \in M_{\sigma,i} \setminus Q_i$ ,  $iT \notin \Sigma$   $\zeta_j(\omega) \geq -2\varepsilon$ ;
- б) при  $\omega \in (\Omega_\sigma \setminus M_{\sigma,i}) \cup Q_i$  или  $iT \in \Sigma$   $\zeta_j(\omega) \geq -\eta_i(\omega) - a$ .

Следовательно, при  $iT \notin \Sigma$

$$\zeta_i(\omega) \geq -2\varepsilon - (\eta_i(\omega) + a)(\chi_i^{(1)}(\omega) + \chi_i^{(2)}(\omega)).$$

Вводим обозначение

$$\bar{\eta}_i(\omega) = -(\eta_i(\omega) + a)\chi_i^{(1)}(\omega) - (\eta_i(\omega) + a)\bar{\chi}_i^{(2)}(\omega). \quad (1.32)$$

Тогда, при любом  $\omega \in \Omega_\sigma$ ,  $i=0, 1, \dots$

$$\zeta_i(\omega) \geq \bar{\eta}_i(\omega) - 2\varepsilon, \quad \text{если } iT \notin \Sigma; \quad (1.33)$$

$$\zeta_i(\omega) \geq -\eta_i(\omega) - a, \quad \text{если } iT \in \Sigma.$$

Из определения уравнения (1.1), неравенств (1.2), (1.3) вытекает, что

$$\mathbf{M}\eta_i^4(\omega) \leq c_1, \quad (1.34)$$

$$\mathbf{M} |\eta_i(\omega)| \leq c_2, \quad (1.35)$$

где константы  $c_1$  и  $c_2$  не зависят от  $\sigma, i, T$ . Поэтому, в силу определений  $\chi_s^{(1)}(\omega), \bar{\chi}_s^{(2)}(\omega)$ , можно применить усиленный закон больших чисел Кантелли (см. [14, с. 376—377]) к последовательностям случайных величин

$$\{(\eta_s(\omega) + a)\chi_s^{(1)}(\omega)\}, \{(\eta_{2s}(\omega) + a)\bar{\chi}_{2s}^{(2)}(\omega)\}, \{(\eta_{2s+1}(\omega) + a)\bar{\chi}_{2s+1}^{(2)}(\omega)\}$$

( $s=0, 1, 2, \dots$ ). В результате найдем множество  $\Omega_{\sigma,h}$  такое, что  $\mu_\sigma(\Omega_{\sigma,h}) = 1$  и для всякого  $\omega \in \Omega_{\sigma,h}$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{\eta}_i(\omega) - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mathbf{M} \bar{\eta}_i(\omega) \right) = 0. \quad (1.36)$$

Из определения  $\bar{\eta}_i(\omega)$  вытекает, что для любого  $i \in \{1, 2, \dots\}$

$$|\mathbf{M} \bar{\eta}_i(\omega)| \leq \mathbf{M} |\bar{\eta}_i(\omega)| \leq 2a\varepsilon + \sqrt{\sqrt{c_1} 4\varepsilon} \leq c_3 \sqrt{\varepsilon},$$

где константа  $c_3$  не зависит от  $\sigma, i, T, \varepsilon$ . Поэтому, в силу (1.36), для всякого  $\omega \in \Omega_{\sigma,h}$ , имеем

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \bar{\eta}_s(\omega) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \mathbf{M} \bar{\eta}_s(\omega) \geq -c_3 \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.37)$$

Из (1.33), (1.37) и свойства множества  $\Sigma$  вытекает, что найдется множество  $\tilde{\Omega}_{\sigma,h} \subset \Omega_\sigma$  такое, что  $\mu_\sigma(\tilde{\Omega}_{\sigma,h}) = 1$  и для всякого  $\omega \in \tilde{\Omega}_{\sigma,h}$  имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \xi_s(\omega) \geq -c_3 \sqrt{\varepsilon} - 2\varepsilon - (c_2 + a)\varepsilon \geq -c_4 \sqrt{\varepsilon},$$

где константа  $c_4$  не зависит от  $\sigma, i, T, \varepsilon$ . Следовательно, для всякого  $\omega \in \tilde{\Omega}_{\sigma,h}$  имеем

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^k \\ y \neq 0}} \left\{ \frac{1}{T} \ln \|Y_\sigma((s+1)T, 0; \omega)y\| - \frac{1}{T} \ln \|Y_\sigma(sT, 0; \omega)y\| \right\} \geq \\ & \geq \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \frac{1}{T} \ln d_k(X_s) - c_4 \sqrt{\varepsilon} \geq \lambda_k - \varepsilon^2 (4n)^{-2} n_0^{-1} - c_4 \sqrt{\varepsilon} \geq \\ & \geq \lambda_k - (c_4 + 1) \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Поэтому, для любого  $\omega \in \tilde{\Omega}_{\sigma,h}$  ( $\mu_\sigma(\Omega_{\sigma,h}) = 1$ ) имеем

$$\inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^k \\ y \neq 0}} \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{pT} \ln \frac{\|Y_\sigma((p+1)T, 0; \omega)y\|}{\|Y_\sigma(T, 0; \omega)y\|} \geq \lambda_k - (c_4 + 1) \sqrt{\varepsilon}.$$

Следовательно, для любого  $\omega \in \tilde{\Omega}_{\sigma,h}$  имеем

$$\lambda_k(\sigma, \omega) \geq \lambda_k - (c_4 + 1) \sqrt{\varepsilon}, \quad (1.38)$$

где константа  $c_4$  не зависит от  $\sigma, \varepsilon, \omega$ .

5. Повторим рассуждения пп. 3 и 4, но в сторону уменьшения аргумента  $t$  от  $mT$  до  $-\infty$ . Фиксируем произвольное  $(n-k+1)$ -мерное линейное подпространство  $\mathbb{R}^{n-k+1}$  в  $\mathbb{R}^n$ . Введем обозначение

$$\zeta_i^{(m)}(\omega) = \inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^{n-k+1} \\ y \neq 0}} \frac{1}{T} \{ \ln \| Y_\sigma((m-i+1)T, mT; \omega) y \| - \\ - \ln \| Y_\sigma((m-i)T, mT; \omega) y \| \} - \frac{1}{T} \ln d_{n-k+1}(X((m-i-1)T, mT)).$$

Обозначим через  $A_s^{(m)}$  множество тех  $\omega \in \Omega_\sigma$ , для которых имеет место неравенство

$$\frac{1}{s} \sum_{i=m-s}^{m-1} \zeta_i^{(m)}(\omega) \geq -(c_4 + 2) \sqrt{\varepsilon}.$$

Заметим, что случайные величины  $\eta_i(\omega)$ ,  $\eta_i(\omega)\chi_i^{(1)}(\omega)$ ,  $\eta_i(\omega)\chi_i^{(2)}(\omega)$  в п. 4 имеют четвертые моменты, ограниченные константой. Следовательно, по неравенству Чебышева (см. [14, с. 366—367]) имеем

$$\mu_\sigma(A_s^{(m)}) \geq 1 - \frac{c_5}{s^2}, \quad (1.39)$$

где константа  $c_5$  не зависит от  $m, s$ . Пусть  $\alpha$  — произвольное положительное число. Положим  $s_\alpha = \left[ \frac{c_5}{\alpha} \right] + 2$ ,  $A_{(\alpha)}^{(m)} = \bigcap_{s=s_\alpha}^m A_s^{(m)}$  ( $m = s_\alpha, s_\alpha + 1, \dots$ ).

Из (1.39) вытекает, что

$$\mu_\sigma(A_{(\alpha)}^{(m)}) \geq 1 - \sum_{s=s_\alpha}^{+\infty} \frac{c_5}{s^2} > 1 - \frac{c_5}{s_\alpha - 1} > 1 - \alpha. \quad (1.40)$$

Положим  $A_\alpha = \bigcap_{i=s_\alpha}^{+\infty} \bigcup_{m \geq i} A_{(\alpha)}^{(m)}$ . Из (1.40) вытекает, что  $\mu_\sigma(A_\alpha) \geq 1 - \alpha$ . Пусть  $\omega \in A_\alpha$  — произвольное. Тогда, из определения  $A_\alpha$ , существует бесконечное множество  $P_\omega = \{m_i\}$  такое, что  $\omega \in A_{(\alpha)}^{(m_i)}$ . Следовательно, для всех  $m_i \in P_\omega$ ,  $s \in \{s_\alpha, s_\alpha + 1, \dots, m_i\}$  имеем  $\omega \in A_s^{(m_i)}$ . Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $Y_\sigma(mT, 0; \omega) \mathbb{R}^k \cap \mathbb{R}^{n-k+1} \neq \{0\}$ . (Подпространство  $\mathbb{R}^k$  зафиксировано в п. 4, а подпространство  $\mathbb{R}^{n-k+1}$  введено в п. 5.) Поэтому для любого натурального числа  $m$  существуют векторы  $z_m$  и  $y_m$  такие, что  $\|z_m\| = 1$ ,  $z_m \in \mathbb{R}^k$ ,  $y_m = Y_\sigma(mT, 0; \omega) z_m$ ,  $y_m \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ . Из последовательности  $\{z_{m_i}\}$  ( $m_i \in P_\omega$ ) можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для простоты обозначения будем считать, что сама последовательность  $\{z_{m_i}\}$  ( $m_i \in P_\omega$ ) сходится к некоторому вектору  $z \in \mathbb{R}^k$ ,  $\|z\| = 1$ . Из определения множеств  $A_s^{(m)}$ , для любого  $m_i \in P_\omega$ ,  $s \in \{s_\alpha, s_\alpha + 1, \dots, m_i\}$ , в силу выбора  $y_{m_i}$  имеем

$$\frac{1}{sT} [\ln \| Y_\sigma(0, m_i T; \omega) y_{m_i} \| - \ln \| Y_\sigma(sT, m_i T; \omega) y_{m_i} \|] - \\ - \frac{1}{sT} \sum_{i=m_i-s}^{m_i-1} \ln d_{n-k+1}(X((m_i-i-1)T, (m_i-i)T)) \geq -(c_4 + 2) \sqrt{\varepsilon}.$$

Заметим, что  $d_{n-k+1}(X^{-1}) = [d_k(X)]^{-1}$ . Поэтому, в силу выбора  $y_{m_i}$ , имеем

$$\frac{1}{sT} [\ln \| Y_\sigma(sT, 0; \omega) z_{m_i} \| \ln \| z_{m_i} \|] \leq \frac{1}{sT} \sum_{j=0}^s \ln d_k(X_j) + (c_4 + 2) \sqrt{\varepsilon}.$$

Следовательно, в силу выбора  $z_{m_l}$ , для любого  $s_\alpha \leq s \leq m_l$  имеем

$$\frac{1}{sT} \ln \|Y_\sigma(sT, 0; \omega) z_{m_l}\| \leq \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X_i) + (c_2 + 2) \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.41)$$

Из (1.41), выбора  $T_1$  в п. 1, условия  $\lim_{l \rightarrow +\infty} z_{m_l} = z, \|z_{m_l}\| = 1, \|z\| = 1$  вытекает

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} \ln \|Y_\sigma(sT, 0; \omega) z\| &\leq \lambda_k + \varepsilon^2 (4n)^{-2} n_0^{-1} + (c_4 + 2) \sqrt{\varepsilon} \leq \\ &\leq \lambda_k + (c_4 + 3) \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Возьмем  $\tilde{\Omega}_k = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$ . Тогда  $\mu_\sigma(\tilde{\Omega}_k) = 1$  и для любого  $\omega \in \tilde{\Omega}_k$  найдется  $\alpha \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$  такое, что  $\omega \in A_\alpha$ . Следовательно, найдется ненулевой вектор  $z_\omega \in \mathbb{R}^h$  такой, что

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{sT} [\ln \|Y_\sigma(sT, 0; \omega) z_\omega\| - \ln \|z_\omega\|] \leq \lambda_k + (c_4 + 3) \sqrt{\varepsilon}. \quad (1.42)$$

Возьмем  $\tilde{\Omega} = \bigcap_{k=1}^n (\tilde{\Omega}_{\sigma, k} \cap \tilde{\Omega}_k)$ . Тогда  $\mu_\sigma(\tilde{\Omega}) = 1$  и для всякого  $\omega \in \tilde{\Omega}$ , в силу (1.38) и (1.42), показатель  $\lambda_k(\sigma, \omega)$  ( $\sigma \in (0, \sigma_1)$ ,  $\sigma_1$  определено в п. 1) уравнения (1.1) отличается от  $\lambda_k$  меньше, чем на величину  $(c_4 + 3) \sqrt{\varepsilon}$ . Теорема 1 доказана.

## § 2. Возмущение белым шумом

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение 2 имеет вид

$$y^{(n)} + (a_1(t) + \sigma \dot{\eta}_1(t)) y^{(n-1)} + \dots + (a_n(t) + \sigma \dot{\eta}_n(t)) y = 0, \quad (2.1)$$

где  $\dot{\eta}_1(t), \dots, \dot{\eta}_n(t)$  — независимые гауссовские белые шумы (см. [1, с. 287]),  $M \dot{\eta}_i(s) \dot{\eta}_j(t) = d_i^2 \delta(t-s)$ ,  $d^2 < d_i^2 < \frac{1}{d^2}$  ( $d < 1$ ) ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Роль параметра  $\xi$  во введении здесь играет параметр  $\sigma > 0$ , а фильтр  $\mathcal{F}$  состоит из интервалов  $(0, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ). Соответствующей уравнению (2.1) будет система

$$\dot{y} = (A(t) + \sigma C(t, \omega)), \quad (2.2)$$

где

$$C(t, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\dot{\eta}_n(t) & -\dot{\eta}_{n-1}(t) & \dots & -\dot{\eta}_1(t) \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}^n.$$

Как в § 1, мы будем в этом параграфе пользоваться обозначениями, принятыми во введении с заменой  $\xi$  на  $\sigma$ . При этом заметим, что все вероятностные пространства совпадают и мы будем обозначать их через  $\Omega$ , а вероятностную меру на  $\Omega$  обозначим через  $\mu$ . Роль  $C_\xi(t, \omega)$  в этом параграфе играет  $\sigma C(t, \omega)$ .

*Лемма 4. Уравнение (2.1) является допустимым случайным возмущением уравнения (1).*

Доказательство. Возьмем  $\Xi^0 = (0, 1)$ ,  $\theta^0 = \frac{d^3}{48n^3a}$ . Условие 1)

определения 2 выполняется в силу определения белых шумов  $\dot{\eta}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Заметим, что при любом фиксированном  $T$  случайные величины

$$\int_{iT}^{(i+1)T} \sigma \dot{\eta}_j(t) dt = \sigma (\eta_j((i+1)T) - \eta_j(iT))$$

( $i \in \mathbf{Z}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ) независимы, нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями  $\sigma^2 T^2 d_j^2$ . Следовательно, аналогично доказательству леммы 2, имеем  $L_1 \sigma \leq e_{\sigma, i} \leq L_2 \sigma$  ( $i \in \mathbf{Z}$ ), где константы  $L_1, L_2$  не зависят от  $\sigma, i$ . Поэтому условия 2а) и 2б) определения 2 выполняются.

Приступим к доказательству выполнения условия 3 определения 2. Пусть дано  $\epsilon \in (0, 1)$ . Положим  $\theta = \frac{d^3}{48n^3a}$ . Пусть  $\tau$  — произвольное целое кратное  $\theta$ . Рассмотрим матрицу Коши  $Y_\sigma(\tau + \theta, \tau; \omega) = (y_i^j(\tau + \theta))_{i, j=1, \dots, n}$  системы (2.2),  $y_i^j(\tau) = \delta_{ij}$  (см. [15, с. 480]). Покажем, что совместное распределение случайных величин  $y_i^j(\tau + \theta)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) имеет плотность, которая меньше  $\text{const } \sigma^{-n}$ . Для этого перепишем фундаментальную матрицу  $Y_\sigma(t, \tau; \omega)$  в виде вектора

$$\bar{y}(t) = (y_1^1(t), \dots, y_n^1(t), y_1^2(t), \dots, y_n^2(t), \dots, y_n^n(t)) \in \mathbf{R}^{n^2}.$$

Легко видеть, что вектор  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} dy_1^1(t) = y_2^1(t) dt, \\ dy_2^1(t) = y_3^1(t) dt, \\ \vdots \\ dy_{n-1}^1(t) = y_n^1(t) dt, \\ dy_n^j(t) = - \sum_{i=1}^n a_i(t) y_{n-i+1}^j(t) dt - \sum_{r=1}^n \sigma d_r y_{n-r+1}^j(t) d\eta_r(t), \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.3)$$

с начальным условием

$$y_i^j(\tau) = \delta_{ij}. \quad (2.4)$$

Поэтому производящий дифференциальный оператор процесса  $\bar{y}(t)$  имеет вид (см. [1, с. 109, 287])

$$\begin{aligned} L = & \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} y_{i+1}^j \frac{\partial}{\partial y_i^j} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i(t) y_{n-i+1}^j \frac{\partial}{\partial y_n^j} + \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{r=1}^n d_r^2 \sum_{j, m=1}^n y_{n-r+1}^j y_{n-r+1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_n^j \partial y_n^m}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим через  $S$  шар в пространстве  $\mathbf{R}^{n^2}$  векторов  $\bar{y}(t)$  с центром в точке  $\bar{y}(\tau)$ , определяемой формулой (2.4), и радиусом  $\frac{d^3}{6n^3}$ . Тогда, в силу выбора  $\theta$ , существует число  $\sigma_1 > 0$  такое, что при  $\sigma \in (0, \sigma_1)$  вероятность того, что  $\bar{y}(t) \in S$  при всех  $t \in [\tau, \tau + \theta]$ , больше  $1 - \frac{\epsilon}{2}$ . В силу (2.5) и выбора  $S$ , в области  $Q = [\tau, \tau + \theta] \times S$  коэффициенты оператора

$L$  при старших производных удовлетворяют следующему условию: для всякого вектора  $\{\xi_i\} \in \mathbf{R}^n$  в области  $Q$  имеет место неравенство

$$\sum_{j,m=1}^n \sigma^2 \left( \sum_{r=1}^n d_r^2 y_{n-r+1}^j y_{n-r+1}^m \right) \xi_j \xi_m > \frac{1}{2} \sigma^2 d^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Поэтому к оператору  $L$  в области  $Q$  применимы результаты работы И. М. Сониной [16] (условия ограниченности и гладкости легко проверяются). Следовательно, для оператора  $L$  в области  $Q$  существует функция Грина, которая по модулю меньше  $M_4 \sigma^{-n}$ , где константа  $M_4$  не зависит от  $\sigma$ . Поэтому плотность вероятности перехода процесса  $y(t)$  от  $\tau$  до  $\tau + \theta$  при условии  $\{\bar{y}(t) \in S$  при всех  $t \in [\tau, \tau + \theta]\}$  существует и меньше  $M_4 \sigma^{-n}$ . Пусть  $\mathbf{R}^k$  и  $\mathbf{R}^{n-k}$  — произвольные  $k$ -мерное и  $(n-k)$ -мерное линейные подпространства в  $\mathbf{R}^n$ . Вводим матрицу  $B$  как в лемме 3 и оценим угол  $\alpha$  между  $Y_\omega(\tau + \theta, \tau; \omega) \mathbf{R}^k$  и  $\mathbf{R}^{n-k}$  как в лемме 3 (см. формулу (1.10))

$$\alpha \geq \frac{|\det B|}{n! \|Y\|^k}. \quad (2.6)$$

Заметим, что  $\det B$  есть ненулевой многочлен  $k$ -й степени от компонентов вектора  $\bar{y}(\tau + \theta)$ , которые рассматриваются как независимые переменные. Повторив рассуждения леммы 3 перед формулой (1.18), аналогично формуле (1.18) получим

$$\text{mes}(|\det B| < \gamma \cap \bar{y}(\tau + \theta) \in S) < M_5 \sqrt[k]{\gamma}, \quad (2.7)$$

где  $\text{mes}$  понимается как мера Лебега в пространстве  $\mathbf{R}^{n^2}$  векторов  $\bar{y}(\tau + \theta)$ , константа  $M_5$  не зависит от  $\sigma, \tau, \gamma$ . Возьмем в (2.7) значение  $\gamma = \sigma^{n^2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n (M_4 M_5)^{-n}$ . Из доказанного и теоремы 1 в книге И. И. Гихмана, А. В. Скорохода (см. [15, с. 493]) следует, что

$$\mathbf{P}\{|\det B| < \gamma \cap \{\bar{y}(t) \in S \text{ при всех } t \in [\tau, \tau + \theta]\}\} \leq M_4 \sigma^{-n} M_5 \sqrt[k]{\gamma} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через  $\Omega^*$  множество тех  $\omega$ , для которых  $|\det B| \geq \gamma$  и  $\bar{y}(t + \tau) \in S$ . Тогда, при  $\sigma \in (0, \sigma_1)$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega^*) &\geq 1 - \mathbf{P}\{|\det B| < \gamma \cap \{\bar{y}(t) \in S \mid \forall t \in [\tau, \tau + \theta]\}\} - \\ &- \mathbf{P}\{\bar{y}(t) \notin S \mid \exists t \in [\tau, \tau + \theta]\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

При  $\omega \in \Omega^*$  в силу выбора  $\gamma, S$  и (2.6) имеем

$$\alpha \geq \frac{|\det B|}{n! \left(1 + \frac{d^3}{6n^3}\right)^n} \geq \frac{\sigma^{n^2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n (M_4 M_5)^{-n}}{n! \left(1 + \frac{d^3}{6n^3}\right)^n} = \frac{\varepsilon^n \sigma^{n^2}}{n! \left[2M_4 M_5 \left(1 + \frac{d^3}{6n^3}\right)\right]^n}.$$

Положим  $n_0(\varepsilon) = n^2 (\forall \varepsilon > 0)$ ,  $\delta = \frac{\varepsilon^n}{n! \left[2M_4 M_5 \left(1 + \frac{d^3}{6n^3}\right)\right]^n}$ . Мы доказали

выполнение условия 3) определения 2. Лемма 4 доказана.

Замечание 2. При доказательстве леммы 4 мы использовали условие о том, что все белые шумы ненулевые.

Теорема 2. Если уравнение (1) абсолютно регулярно, то для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\sigma(\varepsilon) > 0$  такое, что для всякого  $\sigma \in (0, \sigma(\varepsilon))$ , для почти всех  $\omega \in \Omega$  (в смысле меры  $\mu$ ) характеристические показатели Ляпунова  $\lambda_1(\sigma, \omega) \geq \dots \geq \lambda_n(\sigma, \omega)$  уравнения (2.1) удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_i(\sigma, \omega) - \lambda_i| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 1 мы использовали только условие о том, что уравнение (1.1) является допустимым случайным возмущением уравнения (1), и ограниченность четвертых моментов у случайных величин  $\frac{1}{T} \ln \|Y_{\sigma, t}(\omega)\|$ . Но, в силу леммы 4 и оценки четвертых моментов решений стохастического уравнения (см. [15, с. 480]), все эти условия выполнены и в условиях § 2. Следовательно, доказательство теоремы 1 является также и доказательством теоремы 2. Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность В. М. Миллионщикову за постоянное внимание к работе.

#### Литература

1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1970.
2. Миллионщиков В. М. К теории характеристических показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 503—513.
3. Нгуен Динь Конг. О стохастической устойчивости показателей Ляпунова уравнений любого порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 914.
4. Нгуен Динь Конг. О стохастической устойчивости показателей Ляпунова уравнений произвольного порядка. УМН. 1985. Т. 40, № 5. С. 230.
5. Миллионщиков В. М. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. М.: Наука. 1972. С. 207—211.
6. Миллионщиков В. М. Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами // Матем. сб. 1969. Т. 78 (120). С. 179—201.
7. Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 12. М.: Изд-во ВИНТИ, 1974. С. 71—146.
8. Миллионщиков В. М. Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1968. Т. 77 (119). С. 163—173.
9. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. ММО. 1968. Т. 19. С. 179—210.
10. Миллионщиков В. М. О стохастической устойчивости характеристических показателей Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 3. С. 581—583.
11. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
12. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
13. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
14. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
15. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
16. Сонин И. М. Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12. № 3. С. 540—547.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
10.IX.1985