И. А. Новосельский, Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в пространстве с двумя нормами, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 747–750

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

И. А. НОВОСЕЛЬСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ С ДВУМЯ НОРМАМИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 30 VI 1965)

В настоящей заметке (п. 1) устанавливаются некоторые теоремы о полноте системы корневых векторов вполне непрерывного оператора в пространстве с двумя нормами ([1]), т. е. в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, где введена также более слабая гильбертова норма. Указываются также некоторые условия n-кратной полноты ([2]) системы собственных и присоединенных векторов полиномиального операторного пучка в таком пространстве (п. 2). В третьем пункте приводится одно приложение результатов п. 2 к эллиптическим операторам. В последнем пункте установлены две теоремы о полноте системы обобщенных корневых векторов. Результаты заметки представляют собой в основном обобщения некоторых теорем о полноте в гильбертовом пространстве ([2–6]).

1. Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство, $\Omega(\mathfrak{B})$ — нормированное кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$ — двусторонний идеал вполне непрерывных операторов. Для оператора $A \in \Omega(\mathfrak{B})$ положим

$$s_{n+1}(A) = \inf \| A - K \| \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

где нижняя грань берется по всем n-мерным операторам $K \in \Omega(\mathfrak{B})$, и

$$d_n(A) = \inf_{L_n} \sup_{\|x\| \leqslant 1} \rho(Ax, L_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

где $\rho(z, L)$ — расстояние от z до L, а нижняя грань берется по всем n-мерным подпространствам $L_n \subset \mathfrak{B}$.

При $p > 0$ через $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{B})$ ($\mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$) обозначается множество всех операторов, для которых $\Sigma s_n{}^p(A) < \infty$ ($\Sigma d_n{}^p(A) < \infty$). Как известно, $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ $(p > 0)$. Через $\mathfrak{N}_p$ $(0 < p \leqslant 1)$ обозначим множество всех операторов $A \in \Omega(\mathfrak{B})$, представимых в виде

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j(x) y_j, \qquad (f_j \in \mathfrak{B}^*,\ y_j \in \mathfrak{B},\ \|f_j\| = \|y_j\| = 1,\ j = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

где $\Sigma |\alpha_j|^p < \infty$.

Будем называть оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$ **полным**, если система его корневых векторов, соответствующих ненулевым собственным значениям, полна в $\mathfrak{B}$. Через $\mathfrak{R}(A)$ далее обозначается множество значений оператора A.

Пусть в пространстве $\mathfrak{B}$ задано скалярное произведение (x, y), причем порождаемая им норма $|x| = \sqrt{(x, x)}$ слабее исходной нормы $\| x \|$. Пополняя пространство $\mathfrak{B}$ по норме $| \cdot |$, получим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$.

Оператор $A \in \Omega(\mathfrak{B})$ называется **эрмитовым**, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in \mathfrak{B}$. Будем говорить, что оператор A **$\mathfrak{H}\mathfrak{B}$-непрерывен** ([1]) и писать $A \in \Omega(\mathfrak{H}, \mathfrak{B})$, если существует число C такое, что $\| Ax \| \leqslant C|x|$ $(x \in \mathfrak{B})$. Оператор $A \in \Omega(\mathfrak{B})$ называется правильным [7], если существует оператор $A^+ \in \Omega(\mathfrak{B})$ такой, что $(Ax, y) = (x, A^+y)$ $(x, y \in \mathfrak{B})$. Множество всех правильных операторов обозначим через Π.

Теорема 1. *Пусть A есть $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$ — непрерывный эрмитов оператор и $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ при некотором $p > 0$. Если T — правильный оператор из $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$, $B = (I + T)A$ и $\overline{\mathfrak{R}(B)} = \mathfrak{B}$, то оператор B полный в $\mathfrak{B}$.*

Эта теорема доказывается на основании теоремы М. В. Келдыша [2] (см. также [3]) и следующих простых предложений.

1^0. *Если $A \in \Omega(\mathfrak{H}, \mathfrak{B})$, $\overline{\mathfrak{R}(A)} = \mathfrak{B}$ и оператор A полный в $\mathfrak{H}$, то A полный и в $\mathfrak{B}$.*

2^0. *Если оператор A эрмитов и $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$, то $A \in \mathfrak{S}_r(\mathfrak{H})$ при любом $r > p$.*

Замечание 1. Условие $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ в теореме 1 можно заменить одним из следующих: а) $A^n \in \mathfrak{R}_1(\mathfrak{B})$ для некоторого натурального n; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^p < \infty$, где $\{\lambda_k\}$ — полная система собственных чисел оператора A.

Далее нам понадобится следующее предложение об оценке резольвенты $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$-непрерывного оператора в пространстве $\mathfrak{H}$.

Лемма 1. *Если A есть $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$-непрерывный оператор и $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ (соответственно $A \in \mathfrak{R}_q(\mathfrak{B})$), то*

$$\varlimsup_{\rho \to \infty} \{\rho^{-r} \ln \max_{|\lambda| = \rho} |(I - \lambda A)^{-1}|\} = 0$$

для любого $r > p$ (соответственно для любого $r > (1/q - 1/2)^{-1}$).

С помощью леммы 1 и результатов А. С. Маркуса [5] (лемма и теорема 8) устанавливается следующая

Теорема 2. *Пусть оператор $A \in \Omega(\mathfrak{H}, \mathfrak{B})$, $|\arg(Ax, x)| \leqslant \gamma\pi/2$ $(\gamma < 2)$ для всех $x \in \mathfrak{B}$ и выполнено хотя бы одно из условий:* а) $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ $(p < \gamma^{-1})$; б) $A \in \mathfrak{R}_q(\mathfrak{B})$ $(q < (\gamma + 1/2)^{-1})$. *Если T — правильный оператор из $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$, $B = (I + T)A$ и $\overline{\mathfrak{R}(B)} = \mathfrak{B}$, то оператор B полный в $\mathfrak{B}$.*

2. Оператор $A \in \Pi$ назовем нормальным, если $A^+A = AA^+$.

Теорема 3. *Пусть $A \in \Omega(\mathfrak{H}, \mathfrak{B})$ — нормальный оператор, причем A^n — эрмитов для некоторого натурального n. Если $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ $(p > 0)$ и $\overline{\mathfrak{R}(A)} = \mathfrak{B}$, то система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков*

$$L(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j A^j T_j - \lambda^n A^n, \qquad M(\lambda) = I - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j T_j A^j - \lambda^n A^n,$$

где T_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ — правильные операторы из $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{B})$, n-кратно полна в $\mathfrak{B}$.

Доказательство этой теоремы основано на предложениях 1^0, 2^0 и теореме М. В. Келдыша [2].

Замечание 2. С помощью теоремы Ю. А. Паланта [4] можно показать, что теорема 3 остается в силе для пучка $L(\lambda)$ при замене условия $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ следующими условиями: $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$; T_0A^n, $A^kT_k \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ $(k = 1, \ldots, n-1)$.

С помощью леммы 1 и результатов статьи [6] доказывается

Теорема 4. *Пусть оператор $A \in \Omega(\mathfrak{H}, \mathfrak{B})$, $|\arg(Ax, x)| \leqslant \gamma\pi/2$ $(\gamma < 2)$ для всех $x \in \mathfrak{B}$ и выполнено хотя бы одно из условий:* а) $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ $(p < \gamma^{-1})$; б) $A \in \mathfrak{R}_q(\mathfrak{B})$ $(q < (\gamma + 1/2)^{-1})$. *Если T_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ — правильные операторы из $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$ и $\overline{\mathfrak{R}(A)} = \mathfrak{B}$, то система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков $I - T_0 - \lambda A T_1 - \ldots - \lambda^{n-1} A T_{n-1} - \lambda^n A$, $I - T_0 - \lambda T_1 A - \ldots - \lambda^{n-1} T_{n-1} A - \lambda^n A$ n-кратно полна в $\mathfrak{B}$.*

3. Пусть D — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ в m-мерном эвклидовом пространстве и

$$M_\lambda(u) = \sum_{i,k=1}^{m} p_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (r_0 + \lambda r_1 + \ldots + \lambda^n r_n)\, u,$$

где p_{ik} $(i, k = 1, \ldots, m)$, q_i $(i = 1, \ldots, m)$ и r_j $(j = 1, \ldots, n)$ — дважды непрерывно дифференцирусмые в D функции, p_{ik} и r_n вещественны и $r_n(x) > \alpha$,

$$\sum_{i,k=1}^{m} p_{ik}\xi_i\xi_k > \beta \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \quad (x \in D,\ \alpha > 0,\ \beta > 0).$$

На основании теоремы 3 устанавливается

Теорема 5. *Система собственных и присоединенных функций операторного пучка $M_\lambda(u)$ при граничном условии $u|_\Gamma = 0$ n-кратно полна в пространстве $\mathring{W}_2^2(D)$.*

Отметим, что n-кратная полнота системы собственных и присоединенных функций указанного пучка в пространстве $L_2(D)$ установлена М. В. Келдышем (2).

4. В этом пункте мы покажем, что при отказе от условия $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$-непрерывности рассматриваемых операторов можно в некоторых случаях установить полноту системы обобщенных корневых векторов.

Функционал $f \in \mathfrak{B}^*$ назовем обобщенным корневым вектором оператора $A \in \Omega(\mathfrak{B})$, соответствующим собственному значению λ, если $f((A - \lambda I)^n x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{B}$ при некотором натуральном n. Будем говорить, что система обобщенных корневых векторов оператора A полна, если $f(x_0) = 0$ для всех обобщенных корневых векторов f оператора A лишь при $x_0 = 0$ (ср. (8), гл. I, § 4).

Теорема 6. *Если эрмитов оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$, то система обобщенных корневых векторов оператора A полна.*

Эта теорема доказывается на основании результатов М. Г. Крейна (1). Отметим, что всякий обобщенный корневой вектор эрмитова оператора A, соответствующий ненулевому собственному значению, является обобщенным собственным вектором.

Лемма 2. *Если для оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$ $(A \neq 0)$ выполнены условия:*

1) $|\arg(Ax, x)| \leqslant \gamma\pi / 2$ $(\gamma < 2)$ *для всех* $x \in \mathfrak{B}$;

2) $\varliminf\limits_{\rho\to\infty} \{\rho^{-l} \ln \max\limits_{|\lambda|=\rho} \|(I - \lambda A)^{-1} x\|\} = 0$ $(l < \gamma^{-1})$ *для всех* $x \in \mathfrak{B}$, *то* A *имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение.*

С помощью леммы 2 доказывается следующая теорема (ср. (3), стр. 107).

Теорема 7. *Если оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{B})$, $|\arg(Ax, x)| \leqslant \gamma\pi / 2$ $(\gamma < 2)$ для всех $x \in \mathfrak{B}$ и выполнено хотя бы одно из условий:* а) $A \in \mathfrak{D}_p(\mathfrak{B})$ $(p < \gamma^{-1})$; б) $A \in \mathfrak{R}_q(\mathfrak{B})$ $(q = (\gamma + 1/2)^{-1})$, *то система обобщенных корневых векторов оператора A полна.*

Отметим, что условие б) теоремы 7 можно заменить следующим: оператор A допускает представление (1), где $\alpha_j = o(j^{-1/q})$.

Замечание 3. В условиях теоремы 6 (теоремы 7) можно утверждать также, что если $f(x_0) = 0$ для всех обобщенных собственных (корневых) векторов f оператора A, отвечающих ненулевым собственным значениям, то $Ax_0 = 0$.

Замечание 4. Если пространство $\mathfrak{B}$ рефлексивно, то в условиях теорем 6 и 7 система корневых векторов оператора A^* полна в $\mathfrak{B}^*$, а система его корневых (в теореме 6-собственных) векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям, полна в $\mathfrak{R}(A^*)$. Отметим, что в то же время система корневых векторов самого оператора A, вообще говоря, не будет полной даже в $\mathfrak{R}(A)$ (ср. пример в ([9])).

Автор выражает благодарность А. С. Маркусу за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР

Поступило
24 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Сборн. тр. Инст. матем. АН УССР, № 9 (1947). [2] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [3] М. В. Келдыш, В. Б. Лидский, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, 1, Л., 1963. [4] Ю. А. Палант, ДАН, 141, № 3 (1961). [5] А. С. Маркус, ДАН, 155, № 4 (1964). [6] А. С. Маркус, ДАН, 163, № 4 (1965). [7] И. Ц. Гохберг, М. К. Замбицкий, Изв. АН МССР, № 6 (1964). [8] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, в. 4, М., 1961. [9] И. А. Новосельский, Изв. АН МССР, № 7 (1965).