Ж. Божиро, Гармоническое решение обратной задачи ньютоновской теории потенциала, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1996, том 2, выпуск 4, 1195–1204

# Гармоническое решение обратной задачи ньютоновской теории потенциала

**Ж. БОЖИРО**
*Университет Париж 8, Франция*

УДК 517.95

**Ключевые слова:** обратная задача, воспроизводящее ядро, метод Бакуса–Джильберта.

**Аннотация**

Для случая ньютонова потенциала рассматривается метод Бакуса–Джильберта. Пусть распределение массы $m$ на открытом множестве $\Omega$ порождает ньютонов потенциал $U^m$, значения которого заданы на бесконечном множестве точек $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, лежащих вне замыкания $\overline{\Omega}$ множества $\Omega$. Назовем распределение масс $m_0$ решением, полученным методом Бакуса–Джильберта, если оно является проекцией распределения $m$ (относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$) на некоторое подпространство гармонических функций. Это подпространство может быть подпространством всех интегрируемых в квадрате гармонических функций (например, если $\Omega$ — звездообразная область). Мы изучаем воспроизводящее ядро $B$, соответствующее этой проекции, то есть

$$m_0(x) = \int\limits_{\Omega} B(x,y)m(y)\,dy,$$

для всех $m \in L_2(\Omega)$.

**Abstract**

*J. Bosgiraud, Harmonic solution for the inverse problem of the Newtonian potential theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* **2**(1996), 1195–1204.

We study from a theoretical point of view the Backus and Gilbert method in the case of Newtonian potential. If a mass distribution $m$ on a open set $\Omega$ creates a Newtonian potential $U^m$, which is known on an infinity of points $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ out of $\overline{\Omega}$, we characterize the solution $m_0$, obtained as a generalization of the Backus and Gilbert method, as the projection of $m$ (for the scalar product of $L_2(\Omega)$) on a subspace of harmonic functions; this subspace may be the subspace of all harmonic, square-integrable functions (for example, if $\Omega$ is a starlike domain). Then we study the reproducing kernel $B$ associated to this projection, which satisfies

$$m_0(x) = \int\limits_{\Omega} B(x,y)m(y)\,dy$$

for any $m \in L_2(\Omega)$.

*Фундаментальная и прикладная математика* 1996, **2**, № 4, 1195–1204.

# 1 Метод Бакуса-Джильберта, [Ba-Gi 1], [Ba-Gi 2], [Ba-Gi 3]

Пусть $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^3$ и $m\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — интегрируемая функция (соответствующая распределению массы). Введем потенциал

$$U^m(y) = \int\limits_\Omega \frac{1}{|x-y|} m(x)\,dx,$$

который определен для всех $y$ вне замыкания $\overline{\Omega}$ множества $\Omega$.

Пусть этот потенциал известен в конечном числе точек $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Метод Бакуса–Джильберта применяется для оценивания распределения массы $m$ при условии, что известны значения $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, где $d_i = U^m(y_i)$. Оценка $m_0$ этого распределения ищется в форме

$$m_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{|x-y_j|},$$

причем коэффициенты $\alpha_j$ подбираются таким образом, чтобы для каждого $i$ выполнялось $d_i = U^{m_0}(y_i)$. То есть необходимо решить систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot s_{i,j} = d_i,$$

где

$$s_{i,j} = \int\limits_\Omega \frac{1}{|x-y_i|\cdot|x-y_j|}\,dx.$$

Матрица $S = (s_{ij})$ является матрицей Грамма, порожденной системой линейно независимых функций $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ и скалярным произведением в $L^2(\Omega)$, где $g_i(x) = \dfrac{1}{x-y_i}$, а точки $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ предполагаются различными. Определитель этой матрицы отличен от нуля, поэтому, обозначая $S^{-1} = (\sigma_{ij})$, имеем

$$m_0(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j} \cdot d_j \cdot \frac{1}{|x-y_i|}.$$

Это выражение можно также переписать в виде

$$m_0(x) = \int\limits_\Omega m(y) \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j} \frac{1}{|x-y_i|} \cdot \frac{1}{|x-y_j|} \cdot dy,$$

или сокращенно

$$m_0(x) = \int\limits_\Omega R(x,y)\cdot m(y)\cdot dy.$$

Заметим, что поскольку матрицы $S$ и $S^{-1}$ симметричны, то $R(x,y) = R(y,x)$.

Для того, чтобы можно было работать с бесконечным числом точек, мы заметим, что если $m$ принадлежит пространству $L^2(\Omega)$, то $m_0$ есть проекция $m$ на векторное подпространство, порожденное системой $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: $m_0$ принадлежит этому подпространству и для каждого $i$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{m(x) - m_0(x)}{|x - y_i|}\, dx = 0.$$

# 2 Гармоническое решение обратной задачи

## 2.1 Обозначения

Пусть $\Omega$ — внешне регулярная ([Br]) открытая ограниченная область, дополнение которой связно. Пусть $\Omega_0$ обладает этими же свойствами и, кроме того, содержит $\Omega$, обозначим через $T$ границу множества $\Omega_0$. Далее, пусть $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — плотное в $T$ множество точек. Это множество соответствует точкам $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ в вышеприведенном описании метода Бакуса–Джильберта, в которых потенциал известен. Положим $g_n(x) = \dfrac{1}{|x-y_n|}$ и обозначим $\Gamma$ векторное пространство, порожденное набором $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Через $\|\cdot\|$ будем обозначать гильбертову норму в $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Если $m$ принадлежит пространству $L^2(\Omega)$, то интеграл $U^m(y) = \displaystyle\int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} m(x)\cdot dx$ определен для всех $y \in \mathbb{R}^3$.

## 2.2 Пространство G

По аналогии с методом Бакуса-Джильберта мы будем проектировать $m$ на замыкание $\Gamma$, которое мы будем обозначать через $G$. Напомним некоторые результаты классической теории потенциала ([Br]). Пусть $H(G)$ — векторное пространство гармонических функций на $\Omega$, $H_C(G)$ — множество сужений на $\Omega$ всех непрерывных на $\overline{\Omega}$ и гармонических на $\Omega$ функций. Относительно равномерной метрики множество $\Gamma$ плотно в $H(\overline{\Omega})$, которое, в свою очередь, плотно в $H_C(\Omega)$ ($\Omega$ и $\Omega_0$ являются внешне регулярными множествами). Как мы увидим ниже, эти свойства плотности имеют место также и относительно $L^2$-норм, так что $H_C(\Omega)$ содержится в $G$.

С другой стороны, $H(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ замкнуто в $L^2(\Omega)$, так что

$$H(\Omega) \cap L^2(\Omega) \supseteq G \supseteq H_C(\Omega).$$

Пусть $m$ — некоторый элемент $L^2(\Omega)$, обозначим через $m_0$ проекцию $m$ на $G$, тогда $U^{m_0} = U^m$ вне $\overline{\Omega}$ и $m_0$ гармоническая. Мы будем называть $m_0$ гармоническим решением обратной задачи по данным $d_n = U^m(y_n)$.

## 2.3 Совпадают ли $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Omega}) \cap \mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})$?

В более общем виде этот вопрос рассмотрен в [Po] и [He]. Теорема 3 из [He] дает достаточные условия на границу $\partial G$ в глобальных терминах, а теорема 4 из этой же статьи — в локальных терминах. Доказательства даются на языке емкостей. Мы даем здесь прямое доказательство для звездных областей.

**Предложение 1.** *Пусть $\Omega$ — такая звездная область с центром в начале координат $O$, что $O \notin \partial G$ и что $\partial G$ «непрерывна», то есть существует непрерывное отображение $f$ из единичной сферы $S_2$ в $\mathbb{R}^+$, такое что*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}\colon\ |x| < f(x/|x|)\} \cup \{O\}.$$

*Тогда $H(\overline{\Omega})$ плотно в $H(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ относительно $L^2$-нормы.*

**Доказательство.** Для любого $\alpha > 1$ определим

$$h_\alpha\colon\ \alpha\Omega \to \mathbb{R} \text{ путем } h_\alpha(x) = h(x/\alpha).$$

То есть $h_\alpha \in H(\alpha\Omega)$ и $h_\alpha$ гармоническая в окрестности $\overline{\Omega}$). Полагая $h$ равной нулю везде вне $\Omega$ и $h_\alpha$ равной нулю вне $\alpha\Omega$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} (h(x) - h_\alpha(x))^2\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (h(x) - h_\alpha(x))^2\,dx + \int\limits_{\alpha\Omega\setminus\Omega} h_\alpha(x)^2\,dx.$$

После замены $y = x/\alpha$ последний интеграл равен

$$\int\limits_{\alpha\Omega\setminus\Omega} h(x/\alpha)^2\,dx = \alpha^3 \int\limits_{\Omega\setminus\alpha^{-1}\Omega} h(y)^2\,dy.$$

Поскольку объем множества $\Omega - \alpha^{-1}\Omega$ убывает до нуля, когда $\alpha$ убывает до единицы, это выражение также убывает до нуля.

С другой стороны, мы можем показать, что второй интеграл сходится к 0 в силу мажорантной сходимости. Действительно, этот интеграл меньше, чем

$$4\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3} h(x)^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^3} h_\alpha(x)^2\,dx\Big) = 4\Big(||h||^2 + \alpha^3 \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)^2\,dy\Big),$$

где мы снова воспользовались заменой $y = x/\alpha$.

Если $\alpha < \alpha_0$, то это выражение меньше, чем $4(1 + \alpha_0^3)||h||^2$. Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ мы можем найти $\alpha > 1$, такое что $||h - h_\alpha|| < \varepsilon$, это доказывает, что $H(\overline{\Omega})$ плотно в $H(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

**Следствие 1.** *Пусть $\Omega$ — звездная область, как в предложении 1. Если $\Omega$ и $\Omega_0$ внешне регулярны, то $G = H(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Если $m \in L^2(\Omega)$, то существует единственная гармоническая интегрируемая в квадрате функция $m_0$, такая что $U^{m_0} = U^m$ вне множества $\overline{\Omega}$.*

## 2.4 Замечание

Пусть множество $\Omega_1$ обладает теми же свойствами, что и $\Omega$, и пусть $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — плотное в границе множества $\Omega_1$ множество точек. Тогда множество $G'$, являющееся замыканием векторного пространства, порожденного функциями $g'_n(x) = \dfrac{1}{|x-z_n|}$, равно $G$. При таком обобщении метода Бакуса–Джильберта решение $m_0$ не зависит от точек, в которых известен потенциал.

## 2.5 Неположительность: из неравенства $\mathbf{m} \geqslant \mathbf{0}$ не следует, что $\mathbf{m_0} \geqslant \mathbf{0}$

Рассмотрим контрпример. Пусть $\Omega$ — открытый единичный шар $b(O,1)$ и функция $f$ определена на единичной сфере $S_2$ следующим образом:

$$f(x) = a < 0 \text{ при } x \in A,$$
$$f(x) = b > 0 \text{ при } x \notin A,$$

где $A$, например, угловой сектор. Обозначим через $h = Hf$ решение задачи Дирихле для функции $f$. Поскольку $h$ ограничена, то она принадлежит $H(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, которое совпадает с $G$, поскольку $\Omega$ звездное.

Известно, что сферическая оболочка (с равномерной плотностью) и шар (с равномерной плотностью), имеющие общий центр и одинаковую общую массу вне этих масс, порождают один и тот же потенциал. Определим $m$ на $\Omega$ следующим образом:

$$m(x) = h(x) - \alpha, \text{ если } x \in b(O,r_1),$$
$b(O,r_1)$ — открытый шар радиуса $r_1$ с центром в начале координат,
$$m(x) = h(x), \text{ если } x \in b(O,r_2) - b(O,r_1),$$
$$m(x) = h(x) + \beta, \text{ если } x \in b(O,r_2),$$

где $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ такие, что

$$\alpha \cdot \text{Объем}(b(O,r_1)) = \beta \cdot \text{Объем}(\Omega \setminus b(O,r_2)).$$

Таким образом, $m$ и $h$ порождают один и тот же потенциал вне $\Omega$, и при подходящем выборе $A$, $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ функция $m$ положительна. Но $m_0$, которая есть не что иное как $h$, не является положительной.

## 2.6

Эта неположительность препятствует распространению понятия гармонического решения обратной задачи на положительные интегрируемые функции $m$ и на положительные меры $\nu$, такие что $\overline{\Omega} \supseteq \operatorname{Supp}\nu$ и $\nu(\partial\Omega) = 0$.

Только если $\nu$ — ограниченная мера и такая, что $\Omega \supseteq \operatorname{Supp}\nu$, мы можем быть уверены в существовании такого гармонического решения $m_0$. В самом деле, в этом случае мы можем просто построить $m \in L^2(\Omega)$, такую что $U^m = U^\nu$ вне $\overline{\Omega}$. С этой целью обозначим $2\alpha = \operatorname{distance}(\operatorname{Supp}\nu, \partial\Omega) \neq 0$ и $r_x = \operatorname{distance}(x, \partial\Omega)/2$, $x \in \Omega$.

Известно, что вне множества $\overline{\Omega}$ дельта-функция Дирака $\delta_x$ порождает тот же потенциал, что и функция $\dfrac{3}{4\pi r_x^3}\mathbf{1}_{b(x,r_x)}$, где $\mathbf{1}_{b(x,r_x)}$ — характеристическая функция открытого шара радиуса $r_x$ с центром в точке $x$. Если

$$m(y) = \int_\Omega \frac{3}{4\pi r_x^2}\mathbf{1}_{b(x,r_x)}(y)\nu(dx),$$

тогда

$$|m(y)| \leqslant \int_\Omega \frac{3}{4\pi\alpha^3}|\nu|(dx),$$

то есть $m$ существует и ограничена (и, следовательно, принадлежит $L^2(\Omega)$ ). Кроме того, для каждого $z$ вне $\overline{\Omega}$ имеем

$$U^m(z) = \int_\Omega \frac{1}{|y-z|}m(y)\,dy =$$
$$= \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{3}{4\pi r_x^3}\cdot\frac{\mathbf{1}_{b(x,r_x)}(y)}{|y-z|}\,dy\right)\cdot\nu(dx) = \int_\Omega \frac{1}{|x-z|}\nu(dx) = U^\nu(z).$$

(Справедливость применения теоремы Фубини очевидна.)

# 3 Ядро Бакуса–Джильберта

## 3.1 Воспроизводящее ядро

Для любого $x \in \Omega$ отображение $m \to m_0(x)$ из $L^2(\Omega)$ в $\mathbb{R}$ непрерывно. Далее, $m_0$ гармоническая и

$$m_0(x) = \int_\Omega m_0(y)\frac{3}{4\pi r_x^3}\mathbf{1}_{b(x,r_x)}(y)\,dy \leqslant \|m_0\|\left(\frac{3}{4\pi r_x^3}\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{3}{4\pi r_x^3}\right)^{1/2}\|m\|.$$

Поэтому (см., например, [Ar] с полными доказательствами) существует воспроизводящее ядро $B\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$, такое что для любого $x \in \Omega$ функция $B(x,\cdot)$ и для любого $y \in \Omega$ функция $B(\cdot, y)$ лежат в $G$ и такое что для всех $m \in \mathrm{L}^2(\Omega)$

$$m_0(x) = \int_\Omega B(x,y)m(y)\,dy.$$

Напомним некоторые классические свойства таких ядер:

- $\forall\,(x,y)\in\Omega\times\Omega$: $B(x,y)=B(y,x)$;
- $\forall\,x\in\Omega$: $B(x,x)=\|B(x,\cdot)\|^2$;
- $\forall\,(x,y)\in\Omega\times\Omega$: $|B(x,y)|^2\leqslant B(x,x)B(y,y)$.

Заметим, что из неположительности в смысле п. 2.5 следует неположительность ядра $B$.

**Предложение 2.** *$B(\cdot,y)$ порождает вне $\overline{\Omega}$ тот же потенциал, что и $\delta_y$.*

**Доказательство.** Вне $\overline{\Omega}$ функция $\delta_y$ порождает тот же потенциал, что и функция $\dfrac{3}{4\pi r_x^3}\mathbf{1}_{b(y,r_y)}$, проекция в $G$ которой есть

$$x\to\int\limits_{\Omega}\frac{3}{4\pi r_x^3}\mathbf{1}_{b(y,r_y)}(u)B(x,u)\,du.$$

Поскольку $B(x,\cdot)$ — гармоническая функция, то последний интеграл равен $B(x,y)$, что завершает доказательство.

Нетрудно вычислить лапласиан функции $B(x,y)$ в $\mathbb{R}^6$, он равен нулю, то есть $B(x,y)$ гармоническая, однако она не является ограниченной.

**Предложение 3.** *Если $\xi_0\in\partial(\Omega)$, то $B(x,x)\to\infty$ при $x\to\xi_0$.*

**Лемма 2.** *Функция $h(x)=\dfrac{1}{|x-\xi_0|}$ лежит в $G$.*

**Доказательство леммы.** Пусть $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ — точки, лежащие вне $\overline{\Omega}$ и такие, что $|\xi_n-\xi_0|<1/n$. Обозначим $h_n(x)=\dfrac{1}{|x-\xi_n|}$, очевидно, $h_n\in H(\overline{\Omega}$, а значит, $h_n\in G$. Отсюда заключаем, что $\|h-h_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Возьмем $\varepsilon>0$, тогда найдется $r>0$, такое что

$$\int\limits_{b(\xi_0,r)}(h(x))^2\,dx<\varepsilon/4.$$

Для достаточно больших $n$ и

$$\int\limits_{b(\xi_0,r)}(h_n(x))^2\,dx<\varepsilon/4,$$

следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}(h(x)-h_n(x))^2\,dx<\varepsilon/2+\int\limits_{\Omega\setminus b(\xi_0,r)}(h(x)-h_n(x))^2\,dx$$

и

$$|h(x)-h_n(x)| = \left|\frac{1}{|x-\xi_0|} - \frac{1}{|x-\xi_n|}\right| \leqslant \frac{|\xi_n-\xi_0|}{|x-\xi_0|\cdot|x-\xi_n|}.$$

Для некоторого достаточно большого $N$ и всех $n > N$ имеем $|\xi_n - \xi_0| < r/2$, поэтому $|x-\xi_n| > r/2$ для всех $x \in \Omega \setminus b(\xi_0, r)$. Кроме того, для всех таких $x$ имеет место неравенство

$$|h(x)-h_n(x)|^2 < \left(\frac{1/n}{r\cdot r/2}\right)^2.$$

Итак,

$$\int\limits_{\Omega\setminus b(\xi_0,r)} (h(x)-h_n(x))^2\,dx \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

что доказывает лемму.

**Доказательство предложения 3.** Поскольку $h \in G$, то можно написать

$$|h(x)| = \left|\int\limits_{\Omega} B(x,y)h(y)\,dy\right| \leqslant \|B(x,\cdot)\|\cdot\|h\| = B(x,x)^{1/2}\|h\|.$$

Поскольку $h(x)\to\infty$ при $x\to\xi_0$, то $B(x,x)\to\infty$ при $x\to\xi_0$, что и требовалось доказать.

## 3.2 Связь с ядром Пуассона

Как и ранее, для непрерывной функции $f$, заданной на границе $\partial\Omega$ области $\Omega$, обозначим через $Hf$ решение соответствующей задачи Дирихле. Известно, что существует положительная ограниченная мера $\rho_x$ на $\partial\Omega$, такая что для любой непрерывной функции $f$ имеет место равенство

$$Hf(x) = \int\limits_{\partial\Omega} f(\xi)\rho_x(d\xi).$$

Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и обозначим $\rho = \rho_{x_0}$. Известно, что существует положительная $\rho$-интегрируемая функция $\varphi\colon \Omega\times\partial\Omega\to\mathbb{R}$, такая что $\rho_x = \varphi(x,\cdot)\rho$. Например, если $\Omega$ — единичный шар и $x_0$ — начало координат, то $\rho$ представляет собой нормированную меру Лебега на единичной сфере $S_2$ и $\varphi$ — соответствующее ядро Пуассона. При этом пишут

$$Hf(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x,\xi)f(\xi)\rho(d\xi).$$

Заранее не известно, принадлежит ли $\varphi(x,\cdot)$ пространству $L^2(\Omega)$, например, если $\Omega$ — единичный шар, однако имеет место следующее

**Предложение 4.**

$$\varphi(x,\xi) = \int\limits_{\Omega} B(x,y)\varphi(y,\xi)\,dy.$$

**Доказательство.** Так как $H_C(\Omega)$ содержится в $G$, для каждой непрерывной на $\partial\Omega$ функции $f$ можно записать

$$Hf(x) = \int\limits_{\Omega} B(x,y)Hf(y)\,dy = \int\limits_{\Omega} B(x,y)\biggl(\int\limits_{\partial\Omega} \varphi(y,\xi)f(\xi)\rho(d\xi)\biggr)\,dy.$$

Если $M$ такое, что $|f| \leqslant M$, то в силу теоремы Фубини

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} |B(x,y)|\cdot|\varphi(y,\xi)|\cdot|f(\xi)|\rho(d\xi)\,dy \leqslant M\int\limits_{\Omega}|B(x,y)|\biggl(\int\limits_{\partial\Omega}\varphi(y,\xi)\rho(d\xi)\biggr)\,dy =$$
$$= M\int\limits_{\Omega}|B(x,y)|\,dy \leqslant M\|B(x,\cdot)\|\cdot\|\mathbf{1}_{\Omega}\|$$

и правая часть конечна. Итак, для каждой непрерывной $f$ на $\partial\Omega$

$$Hf(x) = \int\limits_{\partial\Omega}\biggl(\int\limits_{\Omega}\varphi(y,\xi)B(x,y)\,dy\biggr)f(\xi)\rho(d\xi),$$

а поскольку мы знаем, что

$$Hf(x) = \int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x,\xi)f(\xi)\rho(d\xi),$$

то это завершает доказательство.

## 3.3 Замечание

Если $f$ — $\rho$-интегрируемая функция на $\partial\Omega$, то

$$Hf(x) = \int\limits_{\partial\Omega}\varphi(x,\xi)f(\xi)\rho(d\xi)\ —$$

гармоническая функция на $\Omega$. Обозначим через $H_1(\Omega)$ множество всех таких функций. Тогда $H_1(\Omega)$ содержится в $G$.

Докажем это. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется непрерывная функция $g$ на $\partial\Omega$, такая что

$$\int\limits_{\partial\Omega}|b(\xi) - g(\xi)|\rho(d\xi) \leqslant \varepsilon,$$

и поэтому для каждого $x \in \Omega$ имеем

$$|Hb(x) - Hg(x)| \leqslant \int\limits_{\partial\Omega} |b(\xi) - g(\xi)|\varphi(x,\xi)\rho(d\xi) \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x,\xi)\rho(d\xi) = \varepsilon.$$

Итак, $H_C(\Omega)$ плотно в $H_1(\Omega)$ в равномерной метрике, и следовательно, в метрике $L^2$. То есть $H_1(\Omega) \subset G$.

## Литература

[Ar] Aronszajn N. Theory of reproducting kernels // Am. Math. Soc. Transaction. — 1950. — V. 68. — P. 337–404.

[Ba-Gi 1] Backus G. E. and Gilbert J. F. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems // Geophys. J. R. astr. Soc. — 1967. — V. 13. — P. 247–276.

[Ba-Gi 2] Backus G. E. and Gilbert J. F. The resolving power of gross Earth data // Geophys. J. R. astr. Soc. — 1968. — V. 16. — P. 169–205.

[Ba-Gi 3] Backus G. E. and Gilbert J. F. Uniquiness in the inversion of inaccurate gross Earth data // Phylos. Trans. R. Soc. London. — A-1970. — V. 266. — P. 123–192.

[Br] Brelot M. Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes // Bull. Soc. Math. France. — 1945. — V. 73. — P. 55–70.

[He] Hedberg L. I. Approximation in the mean by solutions of elliptic equations // Duke Math. J. — 1973. — V. 40. — P. 9–16.

[Po] Polking J. Approximation in $L^p$ by solutions of elliptic partial differencial equations // Amer. J. Math. — 1972. — V. 94. — P. 1231–1244.

*Статья поступила в редакцию в марте 1995 г.*