



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. V. Pavlov, A. V. Skorikov, $L_{\bar{p}}$ spaces with mixed norm on an infinite-dimensional torus, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1986, Number 2, 69–72

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

March 17, 2025, 16:43:43



5. Выберем некоторую точку $x_0 \in M$ и так же, как и в разделе 3, зафиксируем репер (e_i, e_α) векторного пространства E_n таким образом, чтобы $x_0 = L(e_i)$, $y_0 = f(x_0) = L(e_\alpha)$. Интерпретируем вектора пространства E_n как точки в проективном пространстве P_{n-1} . Рассмотрим множество плоскостей, проходящих через точки $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k$. Это множество есть поверхность в M , которую будем обозначать через U_i . Заметим, что в системе координат x_i^α поверхность U_i описывается так:

$$x_1^\alpha = 0, \dots, x_{i-1}^\alpha = 0, \quad x_{i+1}^\alpha = 0, \dots, x_k^\alpha = 0.$$

Но тогда очевидно, что локально $M \cong U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k$. Теперь определим ковектора $\overset{j}{p}$: в репере $\partial/\partial x_i^\alpha$ их координаты $\overset{j}{p} = (S_\beta^j, \dots, S_k^j)$, $S_\beta^j = y_\alpha^j A_\beta^\alpha$, $A_\alpha^\alpha = \delta_\alpha^\alpha - x_\alpha^i y_i^\alpha$. Следует отметить, что поверхности U_i так же, как и ковектора $\overset{j}{p}$, вообще говоря, зависят от точки x_0 и определены локально, поэтому, говоря об этих поверхностях и ковекторах, подразумеваем, что точка x_0 выбрана и зафиксирована. Тогда верна

Теорема 6. *Связность ∇ на M есть связность Нейфельда тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + \overset{j}{p}(X) Y + \overset{i}{p}(Y) X, \quad (*)$$

где $X \in T_p U_i$, $Y \in T_p U_j$; $p \in U_1 \times \dots \times U_k$, $\overset{0}{\nabla}$ — евклидова связность, характеризующаяся тем, что ее коэффициенты в репере $\partial/\partial x_i^\alpha$ равны нулю, поверхности U_i и ковектора $\overset{j}{p}$ выбраны вышеописанным образом.

Следствие. Поверхности U_i автопараллельны в связности Нейфельда, и связность, индуцированная стандартным образом на этих поверхностях, проективно-евклидова.

Таким образом, если на поверхностях U_i в окрестности некоторой точки $x_0 \in G_{n,k}$ задать проективно-евклидовы связности с ковекторами $\overset{j}{p}$ и по формуле (*) построить связность во всей окрестности, то и получится связность Нейфельда.

В заключение следует отметить, что термин „связность Нейфельда“ был предложен А. П. Норденом в [6].

Автор выражает глубокую благодарность А. П. Нордену за его внимание к работе и постоянные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейфельд Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. — Изв. вузов. Матем., 1976, № 11, с. 48—55.
2. Норден А. П. Проективные метрики на грассмановых многообразиях. — В сб.: Дифференц. геометрия. Уфа, 1982, с. 64—72.
3. Егизарян К. М. Аффинные связности на грассмановом многообразии. — Изв. вузов. Матем., 1980, № 5, с. 76—78.
4. Шапукон Б. Н. Связности на дифференцируемых расслоениях. — В сб.: Пробл. геометрии. Итоги науки и техн. М., ВИНТИ АН СССР, 1983, т. 15, с. 61—94.
5. Егизарян К. М. Спроектированные инвариантные аффинные связности. — Тр. геом. семина. Казань, 1980, вып. 12, с. 27—37.
6. Норден А. П. Теория композиций. — В сб.: Пробл. геометрии. Итоги науки и техн. М., ВИНТИ АН СССР, 1978, т. 10, с. 117—146.

г. Казань

Поступили
 первый вариант—15.10.1984
 окончательный вариант—23.05.1985

И. В. Павлов, А. В. Скориков

УДК 517.518

ПРОСТРАНСТВА L_p СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

1. *Введение.* Цель данной работы — введение и изучение пространств L_p со смешанной нормой, состоящих из функций, определенных на бесконечном декартовом произведении и тем самым зависящих от бесконечного числа переменных. В случае конечного декартового произведения пространства функций со смешанной нормой и их приложения к теоремам вложения

хорошо изучены ([1]—[4] и др.). Основные результаты данной работы устанавливают условия на поведение координат p_k при $k \rightarrow \infty$ вектора $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots)$, при которых справедливы обычные теоремы о сходимости монотонных последовательностей в пространствах L_p^- и равномерная выпуклость этих пространств.

В качестве декартового произведения нами выбирается бесконечномерный тор $T^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} T_k$, где $T_k = T$ — единичная окружность. Этот случай является, на наш взгляд, одним из наиболее важных, т. к. на T^∞ естественно рассматривать вопросы об ограниченности в L_p^- векторного оператора Рисса (введенного впервые в [5]), о теоремах вложения (для обычных $L_p(T^\infty)$ некоторые результаты получены недавно А. Д. Бендиковым), о связи с вероятностными процессами (результаты в этом направлении докладывались авторами в марте 1984 г. на XVIII школе-коллоквиуме по теории вероятностей и математической статистике и составят предмет отдельной публикации).

2. *Определение пространства $L_p^-(T^\infty)$ и некоторые его свойства.* Пусть $T_k = T$ — единичная окружность, рассматриваемая как топологическая группа ($k = 1, 2, 3, \dots$), $T^n := \prod_{k=1}^n T_k$,

$T^\infty := \prod_{k=1}^{\infty} T_k$, $T^{\infty-n} := \prod_{k=n+1}^{\infty} T_k$, а $dx_k, \nu^n, \nu, \nu^{\infty-n}$ — меры Хаара соответственно на группах

$T_k, T^n, T^\infty, T^{\infty-n}$. Через $L_p(T^n)$ (либо $L_p(T^\infty)$) обозначим пространства функций на T^n (либо T^∞), интегрируемых с p -й степенью по мере ν^n (либо ν). Пусть ε^n — мера Дирака в нуле на T^n . Рассмотрим меры $\nu_n := \varepsilon^n \otimes \nu^{\infty-n}$ на T^∞ ($n = 1, 2, 3, \dots$), которые сингулярны относительно ν . Меры ν_n позволяют построить аппроксимацию функций от бесконечного числа переменных функциями, зависящими от конечного числа переменных.

Предложение 1. 1) Если $f \in L_p(T^\infty)$, то $f * \nu_n \in L_p(T^n) \subset L_p(T^\infty)$ ($1 \leq p \leq \infty$);

2) $\|f\|_p = \sup_n \|f * \nu_n\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \|f * \nu_n\|_p$ и $f * \nu_n \rightarrow f$ ν -почти всюду ($n. в.$);

3) $f * \nu_n \rightarrow f$ в $L_n(T^\infty)$, если $1 \leq p < \infty$.

Эти обстоятельства, а также результаты работы [1], приводят к следующему определению.

Определение. Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots)$ — бесконечномерный вектор, причем $1 \leq p_k \leq \infty$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Обозначим $\bar{p}^n = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и предположим, что $f \in L_1(T^\infty)$. Множество функций f таких, что $\|f\|_{\bar{p}} := \sup_n \|f * \nu_n\|_{\bar{p}^n} < \infty$, где

$$\|f * \nu_n\|_{\bar{p}^n} := \dots \| \|f * \nu_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\|_{p_n, x_n} \|_{p_{n-1}, x_{n-1}} \dots \|_{p_1, x_1},$$

а

$$\|g(x_1, \dots, x_k)\|_{p_k, x_k} := \begin{cases} \left(\int_{T_k} |g(x_1, \dots, x_k)|^{p_k} dx_k \right)^{1/p_k}, & p_k < \infty; \\ \text{ess sup}_{x_k \in T_k} |g(x_1, \dots, x_k)|, & p_k = \infty, \end{cases}$$

назовем пространством со смешанной нормой и обозначим через $L_{\bar{p}}^-(T^\infty) = L_{\bar{p}}^-$.

Имеет место

Предложение 2. 1) Если $p_k = p$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), то $L_{\bar{p}}^- = L_p(T^\infty)$;

2) при любом n справедливо неравенство $\|f * \nu_n\|_{\bar{p}^n} \leq \|f * \nu_{n+1}\|_{\bar{p}^{n+1}}$ и, следовательно,

$$\|f\|_{\bar{p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \|f * \nu_n\|_{\bar{p}^n};$$

3) пространство $L_{\bar{p}}^-$ является нормированным идеальным пространством (см. [6], с. 139), т. е. если $f \in L_{\bar{p}}^-$ и $|g| \leq |f|$, то $\|g\|_{\bar{p}} \leq \|f\|_{\bar{p}}$.

В силу п. 3) этого предложения естественно считать, что если $f \notin L_1$, то $\|f\|_{\bar{p}} = \| |f| \|_{\bar{p}} = \infty$.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p_k \leq \infty$, $k = 1, 2, 3, \dots$, и вектор $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots)$ таков, что $1/p_k + 1/q_k = 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Тогда

$$\|f\|_{\bar{p}} = \sup_{g \in M_{\bar{q}}} \int_{T^\infty} |fg| d\nu = \sup_{g \in M_{\bar{q}}} \int_{T^\infty} fg d\nu,$$

где f — измеримая функция на T^∞ , а M_q — множество конечнозначных функций g , зависящих от конечного числа переменных и таких, что $\|g\|_q = 1$.

Из теоремы 1, применяя результаты [6] (см. теорему IV.1.7 и лемму IV.3.4), получаем

Следствие 1. В пространстве L_p^- выполнено условие (B) (см. [6], с. 143): если последовательность $(f_n) \subset L_p^-$, $f_n \geq 0$, монотонно возрастает почти всюду и $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, то существует $f \in L_p^-$ такая, что $f_n \uparrow f$ п. в.

Следствие 2. В пространстве L_p^- выполнено условие (C) (см. [6], с. 142): если $0 \leq f_n \uparrow f$ п. в. и $f \in L_p^-$, то $\|f_n\|_p \uparrow \|f\|_p$.

Следствие 3. В пространстве L_p^- выполняется свойство Фату: если $f_n, f \in L_p^-$ и $f_n \rightarrow f$ по мере ν , то $\|f\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p$.

Кроме того, из [6] (теорема VI.3.4) вытекает, что L_p^- — банахово пространство.

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда в пространстве L_p^- выполняется условие (A), т. е. когда из $f_n \downarrow 0$ п. в., $f_n \in L_p^-$ следует $\|f_n\|_p \downarrow 0$ (см. [6], с. 142).

Теорема 2. Условие (A) выполняется в каждом из следующих случаев:

$$1) \prod_{k=1}^{\infty} p_k < \infty; \quad 2) \sup_k p_k < \infty \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} p_k > 1.$$

Покажем, что если $\sup_k p_k = \infty$, то в L_p^- свойство (A) не выполняется. Это тривиально, если существует k такое, что $p_k = \infty$. Пусть $p_k < \infty$ при любом $k = 1, 2, 3, \dots$. Не нарушая общности, можно считать, что $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - 1/p_k) > 0$. Рассмотрим подмножества $A_k \subset T_k$, меры

Хаара которых равны $a_k = (1 - 1/p_k)^{p_k}$. Пусть $B_n := \prod_{k=1}^n A_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} T_k$ и положим $f_n = I_{B_n}$.

С одной стороны, $\nu(B_n) = \prod_{k=1}^n a_k \downarrow 0$, т. к. $a_k \rightarrow e^{-1} < 1$, и поэтому $f_n \downarrow 0$ п. в. А с другой стороны,

$$\|f_n\|_p = \prod_{k=1}^n a_k^{1/p_k} = \prod_{k=1}^n (1 - 1/p_k) > \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 1/p_k) > 0.$$

Следствие 4. Если выполнено одно из условий теоремы 2, то пространство L_p^- имеет следующие свойства:

- 1) L_p^- сепарабельно;
- 2) если $f \in L_p^-$, то $f * \nu_n \rightarrow f$ в L_p^- ;
- 3) $L_p^* = L_q^-$ (вектор \bar{q} такой же, как в теореме 1).

3. Дальнейшие результаты. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. Пространство L_p^- равномерно выпукло тогда и только тогда, когда $\sup_k p_k < \infty$ и $\inf_k p_k > 1$.

Теорема 4. Пусть $f_n, f \in L_p^-$ и $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $f_n \rightarrow f$ слабо, $\sup_k p_k < \infty$ и $\inf_k p_k > 1$;
- 2) $f_n \rightarrow f$ п. в., $\sup_k p_k < \infty$ и $\inf_k p_k > 1$;
- 3) $f_n \rightarrow f$ п. в., $\prod_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$.

Тогда $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$.

Теорема 5. Пусть K — некоторое подмножество функций из L_p^- и выполнены условия:

1) $\sup_{f \in K} \|f\|_p < \infty$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность v нуля в T^∞ , что $\|f(x+y) - f(x)\|_{p,x} < \varepsilon$ для всех $f \in K, u \in v$.

Тогда множество K относительно компактно в L_p^- .

Обратное утверждение получается при выполнении одного из условий теоремы 2.

В заключение авторы выражают благодарность С. Г. Самко и А. Н. Ширяеву за внимание к работе, а также А. Д. Бендикову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benedek A., Panzone R. The spaces L^p with mixed norm.—Duke Math. J., 1961, v. 28, № 3, p. 301—324.
2. Бесов О. В. Классы функций с обобщенным смешанным условием Гельдера.—Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1969, т. 105, с. 21—29.
3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975. 480 с.
4. Бухвалов А. В. О пространствах со смешанной нормой.—Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр., 1973, № 19, с. 5—12.
5. Bendikov A. D., Pavlov I. V. Spaces H^p and BMO on the infinite dimensional torus.—III Международн. конф. по теории вероятностей и матем. статистике. Тезисы докл. Вильнюс, 1981, т. 3, с. 26—27.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. 2-е изд. М., 1977. 741 с.

г. Ростов-на-Дону

Поступила
07.06.1984

И. А. Печников

УДК 514.754

КЛАССИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ Δ_{n-1} НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ПРЯМЫХ n -МЕРНОГО АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Отнесем $(2n-2)$ -мерное многообразие $\text{Gr}(1, n)$ всех прямых в A_n к подвижному реперу $\{A, m_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$), относительно которого произвольная прямая (луч) $L_1 \in \text{Gr}(1, n)$ имеет локальные уравнения $x^\alpha = 0$ ($\alpha=1, 2, \dots, n-1$), вследствие чего формы ω_n^α и ω^α , стоящие в деривационных формулах указанного репера, образуют базис кокасательного расслоения T^* к $\text{Gr}(1, n)$.

Произвольное поле направлений ξ в касательном расслоении T определяется (локально) системой $\omega_n^1 : \omega_n^2 : \dots : \omega_n^{n-1} : \omega^{n-1} : \omega^{n-2} : \dots : \omega^1 = a^1 : a^2 : \dots : a^{2n-2}$, где $a^1, a^2, \dots, a^{2n-2}$ — аналитические функции, заданные на $\text{Gr}(1, n)$. Для любого элемента $L_1 \in \text{Gr}(1, n)$ отношение $a^1 : a^2 : \dots : a^{2n-2}$ интерпретируется как некоторая точка $M \in P_{2n-3}$ (проективизация касательного пространства T_L [1] или диаграмма Циндлера [2]). При этом асимптотическому конусу $B_L(2) \subset T_L$, возникающему при погружении многообразия $\text{Gr}(1, n)$ в проективное пространство, сопоставляется в P_{2n-3} алгебраическая $(n-1)$ -поверхность $S_{n-1} : a^{2n-2}/a^1 = a^{2n-3}/a^2 = \dots = a^n/a^{n-1}$, через каждую точку которой проходят $(n-2)$ -мерная и неинцидентная ей одномерная образующие этой поверхности.

Если точка M принадлежит поверхности S_{n-1} , то ей соответствует в A_n пучок прямых $\{F, L_2\}$, центр F и 2-плоскость L_2 которого инцидентны лучу L_1 , и в то же время — интегральный для поля направлений ξ торс $L_1({}^t\Phi_1) \supset L_1$, для которого F — фокус, а L_2 — касательная 2-плоскость. Произвольной $(n-2)$ -мерной образующей ${}^tI_{n-2} \subset S_{n-1}$ соответствует гиперсвязка прямых с центром в точке $F \in L_1$, и одновременно — совокупность всех тех торсов, для которых эта точка является фокусом. Одномерная же образующая ${}^tI_1 \subset S_{n-1}$ изображает множество всех прямых, заполняющих некоторую 2-плоскость, а также все торсы, для которых эта плоскость касательная. Инвариантная образующая

$${}^zI_{n-2} : a^\alpha = 0 \quad (1)$$

есть образ гиперсвязки прямых в A_n с центром в несобственной точке луча, и в то же время — совокупности всех цилиндров, проходящих через луч L_1 .