Я. В. Татаринов, Уравнения классической механики в новой форме, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2003, номер 3, 67–76

20. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
21. *Мартыненко М.Д., Абу-Изрейк Амджад.* Сингулярные решения задачи теории упругости в напряжениях // Весцi нац. АН Беларусi. Сер. фiз.-тэхн. н. 1995. № 4. 25–28.
22. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.
23. *Кренер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965.
24. *Блох В.И.* Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964.
25. *Крутков Ю.А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1949.
26. *Остросаблин Н.И.* Условия совместности малых деформаций и функции напряжения // Прикл. матем. и теор. физ. 1997. **38**, № 5. 136–146.
27. *Остросаблин Н.И.* Общее решение уравнений движения сплошной среды // Динамика сплошной среды. 1999. № 114. 188–191.
28. *Остросаблин Н.И.* Об уравнениях Бельтрами–Мичела и операторе Сен-Венана // Динамика сплошной среды. 2000. № 116. 211–217.
29. *Власов Б.Ф.* Об интегрировании уравнений неразрывности деформаций в форме Сен-Венана // Прикл. механика. 1969. **5**, № 12. 35–38.
30. *Розин Л.А.* О новых постановках задач теории упругости в напряжениях // Изв. ВНИИ гидротехн. 1985. **180**. 75–84.
31. *Малый В.И.* Независимые условия совместности напряжений для упругого изотропного тела // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 7. 43–46.
32. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* К задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1996. № 2. 82–92.
33. *Победря Б.Е.* О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. **XL**, № 4. 15–26.
34. *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. матем. журн. 1959. **18**. 87–136.
35. *Вишик М.И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. матем. о-ва. 1952. **1**. 187–246.
36. *Agmon S., Douglis A., Nierenberg Z.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions // Communs Pure and Appl. Math. 1964. **17**, N 1.
37. *Победря Б.Е.* О задаче в напряжениях // Докл. АН СССР. 1978. **240**, № 3. 564–567.
38. *Победря Б.Е.* Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях // Докл. АН СССР. 1980. **253**, № 2. 295–297.
39. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: ФАН, 1988.
40. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* Елементи теорii пружностi. Львiв: СВIТ, 1994.
41. *Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Интегральные уравнения в теории упругости. Петрозаводск: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 1994.
42. *Лазарев М.И., Матехин Н.А.* О краевых задачах в постановке Победри. Пушкино, 1988.

Поступила в редакцию
25.10.02

УДК 531.01

УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В НОВОЙ ФОРМЕ

Я. В. Татаринов

Предлагается новая форма динамических уравнений голономной и неголономной механики, в которой вычисление почти всех членов уравнений проводится при помощи скобки Пуассона до того, как каноническим импульсам будет придан их обычный смысл. Эта форма кратка, запоминаема и удобна для составления программ символьных вычислений. Она эффективно замещает все способы получения уравнений движения, в которых система характеризуется кинетической энергией или лагранжианом, элементарной работой заданных сил

и выражениями (необязательно линейными) лагранжевых скоростей через псевдоскорости, используемые явно или под другим именем: обычные уравнения Лагранжа для голономных систем, уравнения Чаплыгина [1], Маджи [2], Пуанкаре [3], Воронца [4], Больцмана [5], Гамеля [6], Четаева [7].

В этот список форм уравнений движения по определению не могут попасть уравнения с неопределенными множителями (в них псевдоскорости ни в какой форме не вводятся). Уравнения Гамильтона тоже получаются, но не разрешенными относительно производных импульсов.

Новую форму уравнений движения можно рассматривать и как максимальное обобщение теоремы об изменении кинетического момента твердого тела в проекциях на связанные с телом оси.

1. Неголономная система характеризуется у нас лагранжианом $L(\dot q, q, t)$ и функционально независимыми выражениями скоростей через псевдоскорости

$$\dot q_i = v_i(\omega, q, t). \tag{1}$$

Таким образом, известные голономные связи (или их часть) исключены из непосредственного рассмотрения, так как уже введены лагранжевы координаты q_i; все заданные силы являются потенциальными или обобщенно потенциальными и учтены в лагранжиане вместе с кинетической энергией; знание свойств оставшихся связей (скорее всего, неголономных) побуждает ввести псевдоскорости. Заметим, что в дальнейшем не используется именно механическая природа (из динамики системы точек) всех рассматриваемых объектов; в частности, лагранжиан не обязан быть невырожденным, а правые части выражений (1) — линейными по псевдоскоростям ω_λ. У нас действует следующее соглашение об индексах:

$$i,j,k,l = 1,\ldots,n; \quad \lambda,\mu,\nu = 1,\ldots,m; \quad s,r = m+1,\ldots,n,$$

где $m \leqslant n$ есть число степеней свободы. Знак суммирования всегда относится к повторяющимся индексам.

Тройственную характеристическую функцию зададим выражением

$$Y(t,\omega,q,p) = \left[L - \sum p_i \dot q_i\right]_{(1)}.$$

Эта функция зависит от трех групп переменных: (t,ω), q и p. Последние переменные будем называть *формальными импульсами*, так как при получении уравнений движения производится — при фиксированных (t,ω) — вычисление скобок Пуассона вида

$$\{F, G\} = \sum\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)$$

до того, как p_i получат механический смысл. Это есть главная необычная черта в предлагаемом подходе к уравнениям движения. Еще одной такой особенностью является введение псевдополной производной по времени

$$\frac{\Delta}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum \dot\omega_\lambda \frac{\partial}{\partial \omega_\lambda},$$

в вычислении которой участвуют только псевдоскорости $\omega_1, \ldots, \omega_m$ и время t.

2. Теорема. Выпишем выражения (1), затем уравнения

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial Y}{\partial \omega_\lambda} = \left\{\frac{\partial Y}{\partial \omega_\lambda}, Y\right\} \tag{2}$$

(в которых, очевидно, левые части линейны по $\dot\omega_\lambda$, а правые — по p_i) и присоединим к ним общеизвестные выражения

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}. \tag{3}$$

Соотношения (1)–(3) образуют замкнутую систему уравнений движения.

Подстановку тождеств (1) принято обозначать $(\ )^*$. Последовательную подстановку выражений (3) и (1) обозначим $(\ )^{**}$. Видим, что $(2)^{**}$ принимает вид системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старших производных, а именно

$$\sum \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial\omega_\lambda \partial\omega_\mu}\right]^{**} \dot\omega_\mu + \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial\omega_\lambda}\right]^{**} = \left\{\frac{\partial Y}{\partial\omega_\lambda}, Y\right\}^{**}. \tag{4}$$

Эта система замкнута вместе с (1). Обычно выражения (1) линейны по псевдоскоростям:

$$v_i(\omega, q, t) = \sum э_{i\lambda}(q,t)\,\omega_\lambda + э_{i0}(q,t). \tag{5}$$

Поэтому реально всегда будем иметь более привычную запись

$$\sum \frac{\partial^2 L^*}{\partial\omega_\lambda \partial\omega_\mu}\,\dot\omega_\mu = W_\lambda(\omega, q, t). \tag{6}$$

Тогда условие разрешимости относительно производных очевидно; оно заведомо выполнено, если исходный лагранжиан невырожден по скоростям.

Для механических систем лагранжиан имеет вид $L_2 + L_1 + L_0$, где нижний индекс указывает на степень однородной формы скоростей. Поэтому коэффициенты левой части (6) не зависят от псевдоскоростей.

3. Обобщение теоремы. Если непотенциальные силы в исходной системе присутствуют, то следует считать, что задана их элементарная работа

$$\delta A = \sum Q_i(\dot q, q, t)\,\delta q_i. \tag{7}$$

Дифференциалы δq_i пока что независимы. Если брать величины δq_i не произвольно, то получатся виртуальные перемещения, которые обычно обозначаются теми же символами. Но мы воспользуемся обозначением σq, которое принадлежит Четаеву, автору общего определения для нелинейных связей [8]: виртуальное перемещение — это всякая линейная комбинация вида

$$\sigma q = \sum \frac{\partial v}{\partial\omega_\lambda}\,\sigma\omega_\lambda,$$

где коэффициенты зависят от (ω, q, t), а величины $\sigma\omega_\lambda$ произвольны.

Как и в общепринятой теории с линейными связями, форма (7) после подстановки $\delta q_i = \sigma q_i$ получает вид $\delta A = \sum F_\lambda \sigma\omega_\lambda$, точнее,

$$F_\lambda(\omega, q, t) \equiv \sum Q_i^* \frac{\partial v_i}{\partial\omega_\lambda}.$$

Именно эти функции следует прибавить к правым частям (2) в общем случае. Сказанное вытекает из принципа Даламбера–Лагранжа:

$$\sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i\right)\sigma q_i \Big|_{\omega(t), q(t)} = 0,$$

где σq — произвольное виртуальное перемещение в указанном состоянии. Собирая коэффициенты при независимых величинах $\sigma\omega_\lambda$ в последнем выражении, получим уравнения Маджи

$$\sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial v_i}{\partial\omega_\lambda} = \sum Q_i \frac{\partial v_i}{\partial\omega_\lambda}.$$

Здесь через $(\ )^*$ обозначена подстановка не только тождеств (1), но и полных производных от них по времени.

4. Общие соображения о равносильности различных форм уравнений движения. Любой способ составления уравнений движения неголономной системы направлен в конечном счете на то, чтобы к уравнениям (1) присоединить уравнения

$$\dot\omega_\lambda = w_\lambda(\omega, q, t) \tag{8}$$

и тем самым получить замкнутую систему дифференциальных уравнений. Объявить, что уравнения составлены, можно и когда налицо выражения

$$\sum g_{\lambda\mu}(\omega, q, t)\,\dot\omega_\mu = W_\lambda(\omega, q, t) \tag{9}$$

в предположении, что $\det \|g_{\lambda\mu}\| \neq 0$.

Всякий, кто составляет уравнения движения, подразумевает (даже необязательно высвечивая эту мысль в сознании) следующее утверждение: если для описания системы используются одни и те же переменные (ω, q) и один и тот же исходный лагранжиан, то все известные способы получения уравнений движения после вычислений и приведения подобных членов дадут одни и те же (буквально!) уравнения вида (8).

Более того, и форма (6) получается с одной и той же левой частью, если применить в данных обстоятельствах любую из методик (названных в предисловии) составления уравнений движения, не считая изменением формы перенос слагаемых из одной части уравнения в другую. К той же форме мы придем даже при работе с уравнениями Аппеля (хотя для них исходной является функция не только состояния, но и ускорений), когда они применены к механической системе или когда правильно определена энергия ускорений для произвольной невырожденной лагранжевой системы [9].

5. Доказательство теоремы. Берем уравнения Маджи без правой части. Используя общеизвестный факт

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\Phi(\dot q, q, t)\right)\right]^* \equiv \frac{d}{dt}\left([\Phi(\dot q, q, t)]^*\right),$$

правило Лейбница и формулу производной сложной функции, преобразуем левые части (8):

$$\begin{aligned}\sum\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right]^*\frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda} - \sum\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\right]^*\frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda} &= \\ = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\lambda} - \sum p_i \frac{d}{dt}\frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda} - \sum \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda}\left(\frac{\partial L^*}{\partial q_i} - \sum p_l \frac{\partial v_l}{\partial q_i}\right) &= 0,\end{aligned}$$

где использовано сокращение $p_j = [\partial L/\partial \dot q_j]^*$ — это выражения (3), в которых лагранжевы скорости заменены посредством (1). С этого момента, однако, мы начнем трактовать p_i как независимые переменные, которым лишь позднее предстоит придать указанный только что смысл.

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\Psi(t, \omega, q) \equiv \frac{\Delta}{\Delta t}\Psi(t, \omega, q) + \sum \frac{\partial \Psi}{\partial q_j} v_j,$$

продолжаем преобразования:

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\lambda} - \sum p_i \frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda} + \sum v_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\lambda} - \sum p_i \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda}\right) - \sum \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(L^* - \sum p_l v_l\right) = 0.$$

Осталось заметить, что

$$v_j = -\frac{\partial}{\partial p_j}\left(L^* - \sum p_l v_l\right), \qquad \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda} = -\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\lambda} - \sum p_k \frac{\partial v_k}{\partial \omega_\lambda}\right).$$

6. Уравнения Лагранжа получаются при $m = n$ и $v_i \equiv \omega_i$. Тогда

$$\begin{aligned}&Y = L(v, q, t) - \sum p_i v_i,\\ &\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \left\{\frac{\partial L}{\partial v_i} - p_i,\ L - \sum p_j v_j\right\} \iff \\ &\qquad \iff \sum \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}\dot v_j + \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial t} = -\sum \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial q_j} v_j + \frac{\partial L}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

7. Уравнения Гамильтона тоже включаются в нашу теорию, но придется пользоваться одновременно формальными импульсами p_i и общепринятыми, которым дадим иное обозначение — μ_j (поскольку эти величины можно называть и моментами), после чего будем трактовать их как псевдоскорости. Пусть $H(\mu, q, t)$ — обычный гамильтониан. Исходя из сведений о преобразовании Лежандра, можно утверждать, что

$$\mu_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \iff \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i},$$

причем выражение лагранжиана через новые псевдоскорости удовлетворяет тождеству

$$L(\dot{q}(\mu, q, t), p, t) \equiv -H(\mu, q, t) + \sum \mu_i \frac{\partial H}{\partial \mu_i}.$$

Следовательно, тройственная характеристическая функция и ее производные могут быть представлены в виде

$$Y = -H(\mu, q, t) + \sum (\mu_k - p_k) \frac{\partial H}{\partial \mu_k},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \mu_i} = \sum (\mu_k - p_k) \frac{\partial^2 H}{\partial \mu_i \partial \mu_k}.$$

Если вычислить псевдополные производные и скобки Пуассона в переменных p, q, то потом подстановка $(\ )^{**}$ обратит все множители $(\mu_i - p_i)$ в нуль. Отсюда следует, что в ходе вычислений с сомножителями, стоящими после этих разностей, можно работать как с постоянными коэффициентами. Поэтому

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta t} \frac{\partial Y}{\partial \mu_i}\right)^{**} = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \dot{\mu}_k, \quad \left\{\frac{\partial Y}{\partial \mu_i}, Y\right\}^{**} = -\sum \frac{\partial^2 H}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

8. Уравнения Чаплыгина–Воронца будут выведены, если взять $\dot{q}_\lambda = \omega_\lambda$ (детали опускаем). Отметим, что тогда $Y = \Theta + \sum p_\lambda \dot{q}_\lambda$, где Θ — универсальная характеристическая функция из работы [10], в которой уже использовалась идея формальных скобок Пуассона, но с захватом не всех координат. Функции Y (в отличие от Θ) мы пока не придаем асимптотического смысла.

9. Интеграл Якоби в отсутствие связей имеет место в предположении, что $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$. Тогда

$$\sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = 0,$$

что составляет обычный вывод интеграла типа энергии. Если связи есть, то требовать, чтобы $\partial L / \partial t$ обращалась в нуль, достаточно не во всем фазовом пространстве, а только после подстановки $(\ )^*$, причем предварительно надо наложить условие, что во всех состояниях вектор скорости $\dot{q} = v(\omega, q, t)$ принадлежит множеству виртуальных перемещений, т.е.

$$v_i(\omega, q, t) \equiv \sum \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda} \delta_\lambda(\omega, q, t).$$

В частности, если связи линейны по псевдоскоростям (5), то они должны быть и однородны: $з_{i0}(q, t) \equiv 0$. Считая это выполненным и используя формулу сложной производной для $\partial L^* / \partial t$ и идею формальных импульсов, получаем импликацию

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^{**} = 0 \Rightarrow K = -Y^{**} = \text{const}.$$

10. Интеграл момента относительно векторного поля, он же интеграл Нетер, будем получать для автономных систем, т.е. при условии, что не содержит времени ни лагранжиан, ни выражения скоростей через псевдоскорости.

В отсутствие связей предположим, что однопараметрическая группа g^s, порожденная нашим векторным полем

$$u(q) = \sum u_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i}$$

и продолженная на пространство $\{\dot{q}, q\}$, сохраняет лагранжиан. Тогда

$$\frac{dL}{ds} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} u_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{u}_i \equiv 0 \iff J = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} u_j = \mathrm{const}.$$

Таков обычный вывод интеграла Нетер. При наличии связей предварительно надо удостовериться, что компоненты векторного поля $u(q)$ во всех состояниях (ω, q) принадлежат множеству виртуальных перемещений:

$$u_i(q) = \sum \frac{\partial v_i}{\partial \omega_\lambda} \delta_\lambda(\omega, q).$$

В частности, если связи линейны по псевдоскоростям, то должно быть $u_i(q) = \sum k_\lambda(q) э_{i\lambda}(q)$.

Неизменности лагранжиана достаточно требовать только при выполнении условий связи, т.е. при $\dot{q} = v(\omega, q)$, что равнозначно заключению об условиях существования линейных интегралов неголономных систем, сделанному А. С. Сумбатовым [11]; ср. также с теоремой 11 статьи [12]:

$$\sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)^* u_i + \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)^* \frac{\partial u_i}{\partial q_k} v_k \equiv 0.$$

Используя идею формальных импульсов, получаем импликацию

$$\left\{Y, \sum p_j u_j\right\}^{**} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\sum p_j u_j\right)^{**} = \mathrm{const}.$$

Чтобы лучше запоминалось, укажем, что производной функции $f(q)$ вдоль векторного поля $u(q)$ можно придать вид $u(f) = \{f, \sum p_j u_j\}$.

Обратим внимание на то, что, вообще говоря, распределение плоскостей связи не может сохраняться группой g^s, поскольку скобки Ли поля u с базисными полями не лежат в этой плоскости, так что рассчитывать на полную инвариантность функции L^* не имеет смысла. Более того, $dL^*/ds \neq (dL/ds)^*$. Поэтому автор избегает обозначений вида $u(L^*)$ (хотя они и восходят к Пуанкаре).

11. Промежуточная форма уравнений движения в псевдоскоростях. По-прежнему считаем (для простоты записей), что $\delta A = 0$, система автономна, связи линейны. Если обозначить $P_u = \sum p_j u_j$, то для двух векторных полей a, b имеем $\{P_a, P_b\} = -P_{[a,b]}$, где $[a, b]$ — скобка Ли названных полей. Поэтому на языке скобок Пуассона легко вычислять скобки Ли, удобно формулировать теорему Фробениуса.

Выражение скорости (1) интерпретируется как разложение по подвижному реперу:

$$\dot{q} = \sum \omega_\lambda э_\lambda(q), \quad э_\lambda(q) = \sum э_{i\lambda}(q) \frac{\partial}{\partial q_i}$$

и равносильно наложению $n - m$ линейных связей

$$\sum l_{sk}(q) \dot{q}_k = 0.$$

Положим

$$P_\lambda = P_{э_\lambda} = \sum p_j э_{j\lambda}; \quad [э_\lambda, э_\mu] = \sum Э_{i,\lambda\mu} \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Теперь $Y = L^* - \sum \omega_\lambda P_\lambda$, и уравнения (2) получают вид

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \frac{\partial L}{\partial \omega_\lambda} = \left\{\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\lambda} - P_\lambda,\, L^* - \sum \omega_\mu P_\mu\right\} = -\left\{\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\lambda} - P_\lambda,\, L^* - \sum \omega_\mu P_\mu\right\} =$$

$$= -\sum \omega_\mu \left\{\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\lambda}, P_\mu\right\} + \{L^*, P_\lambda\} + \sum \omega_\mu \{P_\lambda, P_\mu\},$$

так что в конце концов

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_\lambda} + \sum \omega_\mu Э_{j,\lambda\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]^* - \sum э_{i\lambda}\frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0. \tag{10}$$

При вычислении $\frac{d}{dt}$ немедленно используются выражения (1). Таким образом, на этом этапе мы уже получаем уравнения вида (6). Если рассчитывать на символьные вычисления, то потребуются только операции дифференцирования, подстановки и приведения подобных членов; разумно будет организовать подпрограммы вычисления скобок Пуассона и псевдополных производных.

12. Псевдокоординаты. Можно номинально ввести формальные объекты — псевдокоординаты π_λ (от которых ничего не зависит), такие, что $\dot{\pi}_\lambda = \omega_\lambda$. Воспользуемся стандартным обозначением

$$\frac{\partial f(q,\ldots)}{\partial \pi_\lambda} = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} э_{i\lambda}.$$

Интересно отметить, что тогда

$$\sum Э_{i,\lambda\mu}\omega_\mu = \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_\lambda} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \pi_\lambda}. \tag{11}$$

Далее, уравнения (2) получат вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Y}{\partial \dot{\pi}_\lambda} - \frac{\partial Y}{\partial \pi_\lambda} = \left\{\frac{\partial Y}{\partial \omega_\lambda}, Y\right\},$$

где слева переменные p, q считаются параметрами (ср. с [10]). Такой путь рассуждений проходит и без предположения о линейности выражений (1).

13. Краткий исторический комментарий. Рассмотрим частный случай уравнений (10), когда $[э_\lambda, э_\mu] = \sum C^\nu_{\lambda\mu}(q)\, э_\nu$, т.е. уравнения связей интегрируемы и мы имеем голономную систему (в избыточных координатах, если $m < n$). Тогда $\sum C^\nu_{\lambda\mu}(q)\, э_{j\nu} = Э_{j,\lambda\mu}$, и уравнения движения приобретут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_\lambda} + \sum \omega_\mu C^\nu_{\lambda\mu}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\nu} - \sum э_{i\lambda}\frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0. \tag{12}$$

Именно такие уравнения получил Пуанкаре в 1901 г.; у него, однако, число степеней свободы было равно n и фигурировало предположение, что $C^\nu_{\lambda\mu}$ постоянны (Пуанкаре работал с группами Ли). В 1902 г. вышла статья Больцмана, в которой были получены уравнения для голономных систем в псевдоскоростях — фактически они имели вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_\lambda} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_\lambda} = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)^* \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_\lambda} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \pi_\lambda}\right], \tag{13}$$

что равносильно (10), так как Больцман использовал формулу (11) для определения коэффициентов $Э_{i,\lambda\mu}$.

В 1904 г. вышла работа Гамеля, написанная в той же терминологии и в тех же стандартных обозначениях Ли, что и работа Пуанкаре (использовались "инфинитезимальные операторы", т.е. "векторные поля" на современном языке дифференциальной геометрии). У Гамеля случай постоянных $C^\nu_{\lambda\mu}$ был сугубо частным (он так и писал, что это случай, когда поля порождают группу Ли). Гамель обобщил уравнения Пуанкаре на неголономные системы, однако ссылки на работу Пуанкаре у него нет, хотя она вышла в "Comptes Rendus" — ведущем научном журнале того времени, на другие тома которого Гамель, конечно, ссылается.

Дадим уточнения, несущественные для сделанных заключений, но все же нужные. Больцман оперировал только системами материальных точек в декартовых координатах, но, вообще говоря, неавтономными. Гамель, напротив, не рассматривал неавтономные системы, но работал в лагранжевых координатах. Разумеется, Гамель обобщил и результаты Воронца (и позднее написал об этом), так что в книге [13] не без оснований говорится об уравнениях Воронца–Гамеля. В работах Четаева, развивавших работу Пуанкаре, нет упоминаний о статье Гамеля (Четаев писал о голономных системах и в терминах именно групповых, так что находился заведомо далеко от рассмотрения неголономных систем — ведь поля, задающие плоскость связи неголономной системы, не могут порождать группу Ли!). В результате невольно осталась незамеченной универсальность формы уравнений Пуанкаре–Гамеля. В значительной части современной литературы раздельно (и исторически неточно) упоминаются уравнения Пуанкаре–Четаева и Больцмана–Гамеля. Отождествление форм, предложенных последними двумя учеными, неверно по причинам, которые мы сейчас назовем.

14. Теория Гамеля в некотором смысле требует лишней работы. Составной частью теории является доведение числа псевдоскоростей до n (временный отказ от неголономных связей), обращение матриц коэффициентов и появление частных производных лагранжиана по псевдоскоростям, которые позднее будут приравнены к нулю.

Если излагать на геометрическом языке, то делается следующее: подвижный репер $э_1, \dots, э_m$ произвольными векторами $э_{m+1}, \dots, э_n$ дополняется до базиса всего пространства скоростей:

$$\dot{q} = \sum \omega_\nu э_\nu + \sum \Omega_s э_s \iff \dot{q}_i = \sum э_{i\nu}\omega_\nu + \sum э_{is}\Omega_s. \qquad (14)$$

Это позволяет скобки Ли $[э_\lambda, э_\mu]$ раскладывать по базису $э_1, \dots, э_n$:

$$[э_\lambda, э_\mu] = \sum C^l_{\lambda\mu} э_l, \quad \sum C^l_{\lambda\mu} э_{il} = Э_{i,\lambda\mu}.$$

Обратим внимание на то, что именно вычисление коэффициентов $C^l_{\lambda\mu}$ потребует применения к $Э_{j,\lambda\mu}$ матрицы, обратной к $\|э_{il}\|$.

Пусть $\overline{L}$ означает подстановку зависимостей (14) в лагранжиан. Теперь ω, Ω можно выражать через $\dot{q}$, и потому

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial \omega_\nu} = \sum \overline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} э_{i\nu}, \quad \frac{\partial \overline{L}}{\partial \Omega_s} = \sum \overline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} э_{is}.$$

Остается подставить сюда $\Omega = 0$ и преобразовать уравнения (10):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_\lambda} + \sum \omega_\mu C^\nu_{\lambda\mu} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\nu} + \sum \omega_\mu C^s_{\lambda\mu} \left[\frac{\partial \overline{L}}{\partial \Omega_s}\right]_{\Omega=0} - \sum э_{i\lambda} \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0. \qquad (15)$$

Это и есть уравнения Гамеля.

Появления неудобных величин $[\partial \overline{L}/\partial \Omega_s]_{\Omega=0}$ можно избежать. Для этого надо ввести дополнительные векторы так, чтобы они были ортогональны плоскости связи относительно метрики, задаваемой квадратичной частью лагранжиана. А именно они выражаются через коэффициенты уравнений связи из соотношений $\sum a_{ik} э_{ks} = l_{si}$. В результате форма уравнений станет более естественной, внешне совпав с (12). Однако надо понимать, что при изменении векторов $э_s$ (все индексы больше m) изменяются и коэффициенты $C^\nu_{\lambda\mu}$ (все индексы не превосходят m), а коэффициенты $C^s_{\lambda\mu}$ (все индексы больше m) тоже меняются, но не становятся равными нулю, как в случае уравнений Пуанкаре.

В руководстве [14] можно увидеть, как применение уравнений с псевдоскоростями вынуждает высчитывать таблицы трехиндексных коэффициентов. Наш подход избавляет от этого — вычисление скобок Пуассона позволит автоматически получить все многоиндексные коэффициенты уравнений движения со всеми нужными произведениями и суммами. При традиционном изложении теории их взаимосочетание запомнить почти невозможно. Уравнения Больцмана (в нашем изложении (13)) тоже весьма операционны, но все же понятие производной по псевдокоординате не очень удобно для восприятия, особенно если связи нелинейны.

15. Уравнения Эйлера. Это важнейший пример применения псевдоскоростей. Положение тела определим матрицей Q, столбцы которой образованы компонентами векторов главного репера тела в неподвижной системе координат; эти столбцы обозначим $\mathrm{q}^i = (q_{1i}, q_{2i}, q_{3i})$.

Пусть $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — компоненты угловой скорости тела в подвижном репере. У нас девять лагранжевых координат; их производные даются выражениями

$$\dot{\mathrm{q}}^i = -\omega_{i+1}\mathrm{q}^{i+2} + \omega_{i+2}\mathrm{q}^{i+1},$$

в которых индексы принимают значения $1, 2, 3$ и считаются по $\bmod 3$.

Из интегральных многообразий этого распределения плоскостей над девятимерным пространством координат необходимо взять то, которое проходит через единичную матрицу.

Чтобы задать кинетическую энергию, вспомним, что $\omega_i = (\dot{\mathrm{q}}^{i+1}, \mathrm{q}^{i+2})$. Поэтому

$$T = \frac{1}{2}\sum I_i(\dot{\mathrm{q}}^{i+1}, \mathrm{q}^{i+2})^2.$$

Эта квадратичная форма девяти скоростей вырождена, но для динамики твердого тела важна лишь невырожденность формы $T^* = \frac{1}{2}\sum I_i\omega_i^2$. Теперь имеем $\sum p_{ki}\dot{q}_{ki} = \sum(\mathrm{p}^i, \dot{\mathrm{q}}^i)$, так что тройственная функция

$$Y = \frac{1}{2}\sum I_i\omega_i^2 + \sum \omega_i\Psi_i, \quad \Psi_i = (\mathrm{p}^{i+2}, \mathrm{q}^{i+1}) - (\mathrm{p}^{i+1}, \mathrm{q}^{i+2}).$$

Уравнения (2) получат вид $I_i\dot{\omega}_i = \omega_{i+1}\{\Psi_i, \Psi_{i+1}\} + \omega_{i+2}\{\Psi_i, \Psi_{i+2}\}$. При вычислении скобок следует пользоваться простым соображением, что

$$\left\{\sum a_\rho p_\rho, \sum b_\rho q_\rho\right\} = -\sum a_\rho b_\rho,$$

если векторы a и b постоянны или же (как у нас) не содержат канонических переменных, входящих в список p_ρ, q_ρ. Отсюда $\{\Psi_{i+1}, \Psi_{i+2}\} = \Psi_i$ (что естественно, если вспомнить алгебру $so(3)$) и

$$I_i\dot{\omega}_i = \omega_{i+1}\left[(\mathrm{p}^{i+1}, \mathrm{q}^i) - (\mathrm{p}^i, \mathrm{q}^{i+1})\right] - \omega_{i+2}\left[(\mathrm{p}^i, \mathrm{q}^{i+2}) - (\mathrm{p}^{i+2}, \mathrm{q}^i)\right].$$

Подставляя в правую часть выражения $\mathrm{p}^i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i} = I_{i+2}\omega_{i+2}\mathrm{q}^{i+1}$, получаем требуемое:

$$I_i\dot{\omega}_i = (I_{i+1} - I_{i+2})\,\omega_{i+1}\omega_{i+2}. \tag{16}$$

В правые части нетрудно дописать производные потенциальной энергии или компоненты обобщенных сил.

16. Теорема об изменении обобщенного кинетического момента в подвижном репере — так можно трактовать уравнения (4) для автономных механических систем. Обобщением вектора кинетического момента мы считаем (ко)вектор с компонентами $\partial L^*/\partial\omega_\lambda$. Краткости ради будем рассматривать движение по инерции. Итак, нам потребуются предположения

$$L = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad \dot{q}_i = \sum \text{э}_{i\lambda}(q)\omega_\lambda.$$

Обобщение кинетического момента станет особенно выразительным, если репер э_λ ортогонализировать (его можно даже ортонормировать, но придется мириться с неудобными физическими размерностями новых переменных); иными словами, мы вправе считать, что в новом репере $Э_\lambda$ тройственная функция

$$Y = \frac{1}{2}\sum I_i(q)\Omega_i^2 - \sum p_i Э_{i\lambda}(q)\Omega_\lambda.$$

Тогда уравнения (4) получат вид $I_\lambda\Omega_\lambda = \sum A^\lambda_{\mu\nu}\Omega_\mu\Omega_n$, обобщающий (16).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(грант № 01-01-00141). Автор благодарит А. В. Карапетяна и В. В. Козлова за обсуждение раннего варианта работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого твердого тела вращения на горизонтальной плоскости // Тр. Отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. 1897. **9**.
2. *Maggi G.A.* Di alcune nuove forma della equazioni della dinamica applicabile ai sisitemi anolonomi // Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. fis. e mat. Sez. 5. 1901. **10**, N 2. 287–291.
3. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique // C. r. Acad. sci. Paris. 1901. **132**. 369–371.

4. *Воронец П.В.* Об уравнениях движения для неголономных систем // Матем. сб. 1902. **22**, вып. 4. 659–686.
5. *Boltzmann L.* Über die Form der Lagrangerchen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Koordinaten // Sitzungsber Wiener Akad. Wiss. Math. Naturwiss. Kl. 1902. **140**, N 1–2. 1603–1614.
6. *Hamel G.* Die Lagrange–Eulerschen Gleichungen der Machanik // Z. Math. und Phys. 1904. **50**. 1–57.
7. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // Прикл. матем и механ. 1941. **5**, вып. 2. 253–262.
8. *Четаев Н.Г.* О принципе Гаусса // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. 3. 1933. **6**. 68–71.
9. *Козлов В.В.* Принципы динамики и сервосвязи // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1989. № 5. 59–66.
10. *Татаринов Я.В.* Универсальная характеристическая функция динамики систем с неинтегрируемыми связями и метод подвижного репера // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1989. № 2. 60–67.
11. *Сумбатов А.С.* Интегралы, линейные относительно скоростей. Обобщения теоремы Якоби // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Общая механика. 1979. № 4. 3–57.
12. *Татаринов Я.В.* Геометрический формализм классической динамики. Канонические переформулировки основных теорем для конфигураций с кручением (в частности, для неголономных) // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1985. № 2. 74–81.
13. *Новоселов В.С.* Вариационные методы в механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966.
14. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Физматгиз, 1967.

Поступила в редакцию
11.11.02

УДК 539.376

О ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, II (О СДВИГОВОЙ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД)

Е. И. Шемякин

1. В механике горных пород основной является задача о прочности (устойчивости) горных пород в окрестности подземной выработки (рис. 1). При этом моделью, как правило, служит круговая выработка определенного диаметра на заданной глубине, ось которой ориентирована относительно главных направлений σ_1, σ_2, σ_3. Наиболее распространенным случаем является выбор главных осей вдоль направления (вертикали) силы тяготения σ_1 [1–3].

Самым ответственным моментом в создании выработки как подземного сооружения является изменение соотношения между главными напряжениями в окрестности выработки (главные направления при этом будем считать неизменными), хотя это соотношение и направления главных осей могут изменяться и в ходе горных работ. Если принять пока для простоты, что на глубинах 1–3 км исходное напряженное состояние (in situ) было равномерным гидростатическим:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p, \tag{1}$$

где p — литостатическое давление, то после проходки выработки, будь то скважина (горизонтальная или вертикальная) или шахтный ствол, напряженное состояние изменится.

Важно отметить, что это изменение есть отражение законов равновесия (или динамики, квазистатики) в процессе проходки или бурения. Процесс проходки забоя является трехмерным и слабо изученным [2, 3]. Так, например, если главные направления напряженного состояния σ_1, σ_2, σ_3 выбрать в соответствии с цилиндрической системой координат горизонтальной или вертикальной выработки, то во время подготовки скважины, при удалении от забоя, **обязательно** происходят два процесса (очень важно проследить возникновение касательных напряжений с локализацией деформаций сдвига, которая одновременно имеет место на площадках скольжения).

Первый процесс связан с тем, что радиальное напряжение непременно падает по величине, даже если со стороны выработки (скважины, например) оказывается возможным