С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Асимптотика спектральной краевой задачи для нелинейного уравнения полупроводника, *Докл. АН СССР*, 1978, том 243, номер 4, 897–900

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 243, № 4

УДК 517.946 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. Ю. ДОБРОХОТОВ, В. П. МАСЛОВ

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 22 VI 1978)

В статье рассматривается уравнение с малым параметром $h>0$:

$$h^2\Delta u = \operatorname{sh} u, \quad x=(x_1, x_2, x_3)\in\Omega, \tag{1}$$

где $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2$ и Ω — выпуклая область в R^3.

Уравнение (1) есть классическое уравнение Пуассона (в безразмерных переменных) для потенциала электрического поля в собственном невырожденном полупроводнике ([1]):

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad \varepsilon=\mathrm{const}, \quad \rho=\sum_{i=1}^{2} e_i n_i, \tag{2}$$

где e_i — заряды электронов и дырок ($e_1=-e_2=-e$), а n_i — их объемные концентрации, распределенные по закону Больцмана: $n_i=n_i^0\exp(-e_i/\varphi/kT)$, k, $T=\mathrm{const}$. В силу электронейтральности собственного полупроводника $n_1^0=n_2^0$, т. е. $\rho=-4\pi e n_1^0\varepsilon^{-1}\operatorname{sh}(e\varphi/kT)$.

После приведения уравнения (2) к виду (1), возникает естественный малый параметр (отношение длины экранирования Дебая к размерам полупроводника), принимающий тем меньшие значения, чем ближе полупроводник по своим свойствам к металлу.

Рассмотрим два случая: 1) Ω — компактная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Задача, обобщающая краевую задачу Стеклова ([2]) на нелинейный случай, состоит в отыскании однопараметрического семейства решений $u(x, h, c)$ класса $C^\infty(\Omega\times(0, 1])$, гладко зависящих от параметра $c\in R$, $|c|<c_0$, удовлетворяющего условиям:

i) условие на нелинейный дифференциальный импеданс

$$\partial u/\partial n+\lambda c\, \partial u/\partial c\,|_{\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

ii) условие нормировки

$$\lim_{c\to 0}\sqrt{\mathscr{E}(\varkappa c)/\mathscr{E}(c)}=\varkappa, \quad \forall\varkappa>0, \tag{4}$$

где n — единичная внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ и

$$\mathscr{E}(c)=\int_\Omega (\nabla u(x,h,c))^2 dx^3. \tag{5}$$

В линейном приближении задача (1), (3), (4) есть задача Стеклова:

$$h^2\Delta u=u, \; x\in\Omega; \quad \partial u/\partial n+\lambda u=0 \text{ на } \partial\Omega \tag{6}$$

(λ — собственное значение).

Замечание. Условие (3) означает инвариантность значений потенциала φ на границе полупроводника относительно малых изменений границы $\partial\Omega$. Действительно, пусть область $\Omega=\Omega_t$ зависит от некоторого параметра t, тогда точки границы $\partial\Omega_t$ при малых t имеют вид $x_t=x_0+\gamma tn+$

$+O(t^2)$, $\gamma=\mathrm{const}$. Инвариантность потенциала $\varphi(x, t)$ на границе означает, что $\varphi(x_t, t)=\varphi(x_0, 0)$. С точностью до $O(t^2)$ это соотношение совпадает с соотношением $t(\partial\varphi/\partial n+\gamma^{-1}\partial\varphi/\partial t)=0$ на $\partial\Omega_0$, которое при $c=\exp(dt)$ и $\lambda=d/\gamma$, $d=\mathrm{const}$, эквивалентно (3).

Предположим, что на двумерном римановом многообразии $\partial\Omega$ с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой в R^3, существует устойчивая в линейном приближении замкнутая геодезическая l. Тогда ([3]) у оператора Бельтрами — Лапласа на $\partial\Omega$ существует серия асимптотических собственных чисел μ_k^2, $\mu_k\to\infty$, и сосредоточенных в окрестности l быстроосциллирующих собственных функций ψ_k. При сделанном предположении существуют асимптотические при $h\to0$ решения нелинейной задачи (1), (3), (4), сосредоточенные в окрестности l, причем главные члены этих решений выражаются через ψ_k, μ_k и через точные двусолитонные решения уравнения sine-Гордона ([4]). (Напомним, что функция $u_0(x, h)$ называется главным членом формального асимптотического решения $u_m(x, h)=O(1)$, $u_m\in C^\infty(\Omega\times(0, 1])$, уравнения (1), если $h^2\Delta u_m-\mathrm{sh}\,u_m=O(h^m)$ и $u_m=u_0+O(h^\varepsilon)$, где $m>0$ — любое целое, $\varepsilon>0$.)

Введем в малой (но не зависящей от h) окрестности $V_1\subset\Omega$ геодезической l полугеодезическую систему координат (s, y, ξ) (s — длина дуги геодезической l, $s\in[0, L]$, L — длина l; y — длина дуги геодезической, нормальной к l; $\xi\geqslant0$ — расстояние по нормали от $\partial\Omega$ ([3])). Напомним, что геодезическая l называется устойчивой в линейном приближении, если при $s\in(-\infty, \infty)$ ограничены все решения уравнения Якоби $\ddot{z}+K(s)z=0$, где $K(s)$ — гауссова кривизна поверхности $\partial\Omega$ в точке $s\in$l. В силу устойчивости l у уравнения Якоби существует решение Флоке $z(s)$, удовлетворяющее условиям $\mathrm{Im}\,(\bar{z}\dot{z})=1$, $z(s+L)=z(s)\exp(i\beta L)$, где $\beta L=\mathrm{Arg}\,z(L)-\mathrm{Arg}\,z(0)$. Асимптотические собственные числа μ_k^2 и функции ψ_k ($k=(k_1, k_2)$, k_1, k_2 — целые числа, $k_1\to\infty$, $0\leqslant k_2\ll k_1$) имеют вид ([3])

$$\mu_k=(2\pi k_1+\beta(1/2+k_2))/L+O(k_1^{-1}),$$

$$\psi_k(s, y)=\exp[i\mu_k(s+\dot{z}y^2/z)]H_{k_2}(\sqrt{\mu_k}y/|z|)\,|z|^{k_2}/z^{k_2+1/2}+O(k_1^{-1/2}),$$

где H_{k_2} — полиномы Эрмита. (Последняя формула определяет ψ_k в некоторой малой, не зависящей от k окрестности l; в точках поверхности $\partial\Omega$, лежащих вне этой окрестности, $\psi_k=0$.)

Обозначим

$$r=\frac{1}{2L}\int_0^L(b_{ss}+b_{yy})\,ds,\qquad R(s, y, \xi)=\frac{1}{2}\int_0^s(b_{ss}+b_{yy})\,ds-rs,$$

где b_{ss} и b_{yy} — диагональные коэффициенты второй квадратичной формы Гаусса поверхности $\partial\Omega$ в точке $s\in$l. Рассмотрим семейства функций $u_k(x, c)$, $k=(k_1, k_2)$, $k_1=O(1/h)$, равных нулю вне V_1, а внутри V_1

$$u_k=2\ln\left[\frac{1+c(w_k^++w_k^-)/4+c^2\mu_k^2w_k^+w_k^-/(4\lambda_k)^2}{1-c(w_k^++w_k^-)/4+c^2\mu_k^2w_k^+w_k^-/(4\lambda_k)^2}\right],\tag{7}$$

где $w_k^+=\bar{w}_k^-=\psi_k(s, y)\exp(-\lambda_k\xi+i\lambda_kR(s, y, \xi)/\mu_k+i\varkappa_k)$; $\lambda_k=\sqrt{h^{-2}+\mu_k^2-r}$; $\varkappa_k=\mathrm{const}$, $\varkappa_k\in R$; $c\in R$ — параметр. (Ср. (7) с солитон-антисолитонным решением уравнения sine-Гордона.)

Теорема 1. *Пусть β/π иррационально. Тогда при $c<c_{\text{кр}}$, где*

$$c_{\text{кр}}=4(\lambda_k-h^{-1})\lambda_k/(\mu_k^2Q),\qquad Q=\max_{(s,y)}|\psi_k|,\tag{8}$$

функция $u_k(x, c)$ является главным членом формального асимптотического решения задачи (1), (3), (4), *отвечающей числу* $\lambda=\lambda_k+O(h)$.

Замечание. 1. При β/π рациональном u_k является главным членом асимптотического решения, удовлетворяющего (1), вообще говоря, с точностью до $O(h^{m(\beta)})$, где $m(\beta)\geqslant{}^3/_2$. 2. Факт зависимости u_k от двух вещественных параметров c и $\varkappa_k$ аналогичен двукратному вырождению спектра линейной задачи (6).

При $c\to 0$ функции u_k с точностью до $O(c^2)$ совпадают с функциями $v_k=c(w_k^+ + w_k^-)$ — асимптотическими решениями (собственными функциями) линейной задачи (6), отвечающими собственным числам, равным «собственным числам» λ_k нелинейной задачи. Функции v_k и u_k равны $O(h^\infty)$ вне некоторой окрестности геодезической l, причем толщина приповерхностного слоя области Ω, в котором сосредоточены v_k и u_k, принимает дискретные значения, равные λ_k^{-1} (квантуется). Рассмотрим v_k и u_k как функции энергии $\mathscr{E}$ (5). В линейном случае с ростом $\mathscr{E}$ функции v_k растут как $\sqrt{\mathscr{E}}$; в нелинейном случае при значениях $\mathscr{E}$, соответствующих c, близким к $c_{\text{кр}}$, в окрестности геодезической l возникает ряд точек, в которых функции u_k с ростом $\mathscr{E}$ растут экспоненциально — энергия поля в полупроводнике сосредоточивается около этих точек. Последнее приводит к существенному по сравнению с линейным случаем росту объемной плотности заряда в окрестности указанных точек, и, по всей видимости, к резкому возрастанию проводимости в полупроводнике вблизи геодезической l.

Вещественнозначная функция (7) является нелинейным аналогом суперпозиции комплексных асимптотических решений cw_k^+ и cw_k^- линейной задачи (6), отвечающих одному и тому же собственному числу λ_k. Нелинейный аналог суммы $2N$ асимптотических решений $c_l w_{kl}^\pm$, $c_l=\mathrm{const}$, $l=1,\dots,N$, отвечающих различным собственным числам λ_{k_l} (т. е. «нелинейная суперпозиция» N функций (8)) получается с помощью формулы для $2N$-солитонного решения уравнения sine-Гордона ([4]). (Число N может быть сколь угодно большим, но не зависящим от h.)

Обозначим $M_{\pm l}=\pm\mu_{k_{|l|}}$, $\Lambda_{\pm l}=\lambda_{k_{|l|}}$, $W_{\pm l}=w_{k_{|l|}}^{\pm}$, $l=1,\dots,N$; $a_{jl}=-((\Lambda_j-\Lambda_l)^2-(M_j-M_l)^2)/((\Lambda_j+\Lambda_l)^2-(M_j+M_l)^2)$, $l,j=\pm1,\dots,\pm N$, и рассмотрим семейство функций, зависящих от параметров $c_1,\dots,c_l\in R$:

$$\theta_\pm(s,y,\xi,\mathbf{c})=\sum_m\sum_{N\geqslant j>l\geqslant -N}(a_{jl})^{m_jm_l}(\pm1)^{|m|}\left(\frac{c_jW_j}{4}\right)^{m_j}\left(\frac{c_lW_l}{4}\right)^{m_l};\tag{9}$$

здесь $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_N)$; внешнее суммирование проводится по всевозможным $2N$-мерным векторам m, компоненты m_l, $l=\pm1,\dots,\pm N$, которых принимают значения 0 или 1; $|m|$ означает сумму компанент вектора m; $j,l\neq0$.

Теорема 2 (о нелинейной суперпозиции решений). *Пусть параметры $c_1,\dots,c_N$ таковы, что $0<\theta_+/\theta_-<\infty$ и пусть β/π иррационально. Тогда функция $u(x,\mathbf{c})=2\ln(\theta_+/\theta_-)$ является главным членом формального асимптотического решения уравнения* (1).

Очевидно $u(x,\mathbf{c})=u_{k_m}(x,c)$, если $c_l=c\delta_{lm}$, $l=1,\dots,N$, и $u(x,\mathbf{c})=\sum_{l\neq0}W_l+O(\mathbf{c}^2)$ при $\mathbf{c}\to0$.

Рассмотрим случай 2): Ω — полубесконечный прямой цилиндр с выпуклым основанием $\partial_1\Omega$ и гладкой боковой поверхностью $\partial_2\Omega$. В этом случае для уравнения (1) решается смешанная краевая задача: ищется однопараметрическое семейство решений $u(x,h,c)$ класса $C^\infty(\Omega\times(0,1])$, гладко зависящих от параметра $c\in R$, $|c|<c_0$, удовлетворяющее на границе $\partial_1\Omega$ условию (3), условиям

$$u=0 \text{ на } \partial_2\Omega;\quad u\to0 \text{ при } |x|\to\infty,\ x\in\Omega,\tag{10}$$

и условию нормировки (4).

Предположим, что у основания $\partial_1\Omega$ цилиндра Ω существует устойчивый в линейном приближении экстремальный диаметр (луч) l, т. е. отрезок $\mathrm{l}\in\partial_1\Omega$, нормальный к границе Γ основания $\partial_1\Omega$ в точках $x^\pm$ пересечения l с Γ, и удовлетворяющий условию ([3]): $0<D<1$, где $D=(1-LR_+^{-1})(1-LR_-^{-1})$ (L — длина l, $R_\pm$ — радиусы кривизны Γ в точках $x^\pm$). Не уменьшая общности можно считать, что Ω расположен в квадранте $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, причем $\partial_1\Omega$ лежит на плоскости $x_3=0$, и $x^+=0$. Тогда $\mathrm{l}=\{x_1=x_3=0,\ x_2 \in [0, L]\}$. При сделанном предположении у задачи

$$(\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2)\psi+\mu^2\psi=0, \qquad (x_1, x_2)\in\partial_1\Omega; \qquad \psi=0 \text{ на } \Gamma, \tag{11}$$

существует серия асимптотических решений, сосредоточенных в окрестности l [3]. При этих же предположениях существует серия асимптотических решений смешанной краевой нелинейной задачи. Асимптотические собственные значения μ_k^2 и функции $\psi_k(x_1, x_2)$ $(k=(k_1, k_2)$, k_1, k_2 — целые числа, $k_1\to\infty$, $0\leqslant k_2 \ll k_1)$ задачи (11) имеют вид [3]

$$\mu_k=(\pi k_1+\beta(k_2+{}^1/_2))/L+O(k_1^{-1}); \qquad \psi_k=(\psi_k^+-\psi_k^-)/2i+O(k_1^{-1/2}), \tag{12}$$

где $\beta=\arccos\sqrt{D}$ при $(1-LR_+^{-1})\geqslant 0$, $\beta=\pi-\arccos\sqrt{D}$ при

$$(1-LR_+^{-1})<0; \quad \psi_k^+=\bar\psi_k^-=\exp\left[i\mu_k\left(x_2+\frac{bx_1^2}{2(1+bx_2)}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{|1+bx_2|^{k_2}}{(1+bx_2)^{k_2+1/2}}H_{k_2}\left(\frac{x_1\sqrt{\mu_k\operatorname{Im} b}}{|1+bx_2|}\right); \quad b=-\frac{1}{R_+}+i\frac{\sqrt{D(1-D)}}{L|1-R_-^{-1}L|}.$$

Теорема 3. *Пусть β/π иррационально и пусть в формулах* (7), (8) *μ_k и ψ_k имеют вид* (12), *$\lambda_k=\sqrt{h^{-2}+\mu_k^2}$ и $w_k^\pm=\exp(-\lambda_k x_3)\times\psi_k^\pm(x_1, x_2)$, $k_1=O(1/h)$. Тогда при $|c|<c_{\text{кр}}$ функция u_k вида* (7) *является главным членом формального асимптотического решения задачи* (1), (3), (4), (10), *отвечающей $\lambda=\lambda_k+O(h)$.*

Замечание. К теоремам 2 и 3 в равной степени относится первая часть замечания к теореме 1.

Асимптотические решения u_k смешанной краевой задачи обладают свойствами, аналогичными свойствам решений, сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической. В частности, в окрестности экстремального луча l в Ω возникает ряд точек, в которых решения u_k смешанной краевой задачи как функции энергии поля $\mathscr{E}$ растут экспоненциально. Теорема о «нелинейной суперпозиции» имеет место и для решений u_k смешанной краевой задачи, если в (9) заменить числа μ_k, λ_k и функции $w_k^\pm$, отвечающие случаю замкнутой геодезической, на соответствующие числа и функции, отвечающие случаю экстремального луча.

Доказательства теорем 1—3 (вывод формул для предъявленных асимптотических решений) проводится методами [5, 6] с использованием формул для многосолитонных решений уравнения sine-Гордона [4]. В заключение отметим, что при $R_\pm\to\infty$ и $k=(k_1, 0)$ асимптотические решения u_k смешанной задачи превращаются в точные решения уравнения

$$h^2(\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2)u=\operatorname{sh} u, \qquad (x_2, x_3)\in[0, L]\times[0, \infty). \tag{13}$$

При $c\to 0$ и $x_3=0$ эти решения с точностью до $O(c^2)$ совпадают с функциями $2c\sin(\pi k_1x_2/L)$, образующими среди функций $f(x_2)$, $x_2\in[0, L]$, $f(0)=f(L)=0$, полную систему. Теорема 3 о «нелинейной суперпозиции» в этом случае также дает точные решения (13).

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
10 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Киреев*, Физика полупроводников, М., «Высшая школа», 1975. [2] *В. А. Стеклов*, Общие методы решения основных задач математической физики, Докт. дисс., Петербург, 1901. [3] *В. М. Бабич, В. С. Булдырев*, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., «Наука», 1972. [4] *В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев*, ДАН, т. 219, № 6 (1974). [5] *В. П. Маслов*, Операторные методы, М., «Наука», 1973. [6] *В. П. Маслов*, Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, М., «Наука», 1977.