Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

П. П. Кулиш, Ковариантная некоммутативная дифференциальная геометрия,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 1993, том 205, 85–91

https://www.mathnet.ru/znsl5796

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
16 января 2026 г., 05:19:15

П. П. Кулиш

КОВАРИАНТНАЯ НЕКОММУТАТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Введение

Формализм квантового метода обратной задачи (R-матричный подход), использованный в [1] при построении теории квантовых групп, оказался очень удобным и для приложений квантовых групп к математическим и физическим проблемам. Основное соотношение для матрицы T генераторов t_{ij}, $i,j = 1,2,\dots,n$ квантовой группы $F_q(R)$ [1]

$$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12} \tag{1.1}$$

включает числовую $n^2\times n^2$ матрицу R, которая играет роль структурных констант алгебр и групп Ли. Матричная форма других соотношений, превращающих ассоциативную алгебру $F_q(R)$ в алгебру Хопфа [1]: копроизведения $\Delta : F_q \to F_q \otimes F_q$

$$\Delta(T) = T\dot{\otimes}T, \quad \Delta(t_{ij}) = \sum t_{ik}\otimes t_{kj}, \tag{1.2}$$

коединицы $\varepsilon : F_q \to \mathbb{C}$

$$\varepsilon(T) = I, \qquad \varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}, \tag{1.3}$$

и антипода $s : F_q \to F_q$

$$s(T)T = Ts(T) = I, \tag{1.4}$$

существенно упрощает доказательства многих утверждений о квантовых группах и их приложениях.

В этой заметке будут рассмотрены примеры некоммутативной дифференциальной геометрии в предположении их ковариантности относительно квантовой группы. Последнее означает, что для ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$, отождествляемой с некоммутативной дифференциальной геометрией (НДГ), должно быть определено кодействие квантовой группы F_q, т.е. отображение

$$\delta : \mathcal{A} \to F_q \otimes \mathcal{A}, \tag{1.5}$$

которое является гомоморфизмом, иначе говоря, $\mathcal{A}$ есть F_q-комодуль алгебра.

Мы ограничимся рассмотрением НДГ q-аналога линейного пространства $\mathbb{R}^n$ (существенный вопрос о наличии $*$-отображения или вещественных форм по соображениям краткости опускается). Основной результат состоит в наличии нескольких вариантов НДГ, удовлетворительных с точки зрения квазиклассического предела ($q \to 1$) и в R-матричной форме всех соотношений, задающих алгебру $\mathcal{A}$. В качестве квантовой группы берется $GL_q(n)$ со стандартной R-матрицей ($\lambda = q - q^{-1}$)

$$R_{12} = \sum_{i,j} q^{\delta_{ij}} e_{ii}\otimes e_{jj} + \lambda \sum_{i>j} e_{ij}\otimes e_{ji}, \tag{1.6}$$

где $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ — базисные $n\times n$ матрицы. Специфика случая квантового суперпространства обсуждается в разделе 3.

К настоящему времени имеется большое число работ, посвященных как общим вопросам НДГ, берущим свое начало от исследований [2], (см. обзоры [3,4]), так и работ, которые непосредственно связаны с квантовыми группами [5–17]. Несомненно, что анализ и взаимоотношение всех этих результатов представляет большой интерес. Это, однако, требует значительного объема и времени.

© П. П. Кулиш, 1993

Другой важный вопрос связан с тем, какие структуры в обычной дифференциальной геометрии квантуются и определяют квантование. Другими словами, как включить НДГ в общую теорию деформации [18] (см. также [11]), что сделано для квантовых групп (см., например, [19]).

Выражаем благодарность Л. Д. Фаддееву, с которым изложенный материал неоднократно обсуждался и который предложил ряд возможностей построения ковариантной НДГ квантовых групп.

2. Квантовое линейное пространство

Квантовое (q-деформированное) линейное пространство M_q порождается элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые удовлетворяют квадратичным соотношениям, записанным в R-матричной форме [7,10]

$$R_{12}X_1X_2 = qX_2X_1. \tag{2.1}$$

Компонентами столбца X являются генераторы x_j, $j = 1, 2, \dots, n$, матрица R_{12} из определения квантовой группы $F_q(R)$ (1.1), индексы отвечают тензорным обозначениям

$$X_1X_2 = X \otimes X = \left(x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_1x_n, x_2x_1, x_2^2, \dots\right)^t,$$
$$X_2X_1 = \mathcal{P}X_1X_2,$$

где $\mathcal{P}$ — оператор перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

Определим ассоциативную алгебру W_q (квантовых) производных алгебры M_q как левый модуль над M_q, порожденный элементами $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$, которые удовлетворяют соотношениям

$$R_{21}D_1D_2 = qD_2D_1. \tag{2.2}$$

Столбец D имеет компонентами ∂_j, а матрица $R_{21} = \mathcal{P}R_{12}\mathcal{P}$. Соотношения между x_j и ∂_k записываются в матричном виде

$$D_1 \otimes X_1^t = qX_2^t\check{R}_{12}D_2 + I, \tag{2.3}$$

где I_1 — единичная матрица в первом пространстве, $\check{R}_{12} = \mathcal{P}R_{12}$.

Аналогичным образом алгебра квантовых дифференциальных форм Λ порождается q-аналогами 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_n$, которые в силу дополнительного требования существования нильпотентного внешнего дифференциала $d : M_q \to \Lambda^1$ пропорциональны dx_j. Три дополнительных набора соотношений q-1–форм ω_i: с q-координатами x_j, между собой и с q-производными ∂_k также записываются в R-матричной форме с использованием столбца Ω из q-1–форм ω_i

$$R_{12}\Omega_1X_2 = q^{-1}X_2\Omega_1, \tag{2.4}$$

$$R_{12}\Omega_1\Omega_2 = -q^{-1}\Omega_2\Omega_1, \tag{2.5}$$

$$D_1 \otimes \Omega_1^t = q\Omega_2^t\check{R}_{12}D_2. \tag{2.6}$$

Таким образом, ассоциативная алгебра $\mathcal{A} = M_q \otimes \Lambda \otimes W_q$ с шестью наборами соотношений (2.1) — (2.6) для $3n$ образующих $\{x_i, \omega_j, \partial_k\}$ представляет собой некоммутативный аналог алгебры функций на $\mathbb{R}^n$, внешних форм и алгебры дифференциальных операторов. Алгебра Λ градуирована по сумме степеней генераторов ω_i и является левым (а в силу (2.4) и правым) модулем над M_q. Отождествляя $\Lambda^0 = M_q$, можно, как и в случае обычных дифференциальных форм, записать

$$\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \dots \oplus \Lambda^n, \tag{2.7}$$

где Λ^k — линейное подпространство элементов вида $\Sigma a_{i_1\dots i_k}\omega_{i_1}\omega_{i_2}\dots\omega_{i_k}$, $\omega_j \in \Lambda^1$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $a_{i_1\dots i_k} \in M_q$.

Внешний дифференциал d определяется на всей алгебре $\mathcal{A}$ как отображение $d : \Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$ такое, что

(1) если $k = 0$, то $dx_i = \omega_i$;

(2) отображение d линейно над $\mathbb{R}$;

(3) отображение d удовлетворяет (градуированному) правилу Лейбница

$$d(\eta\lambda) = d\eta \cdot \lambda + (-1)^k \eta d\lambda, \qquad \eta \in \Lambda^k;$$

(4) отображение d нильпотентно: $d^2 = 0$.

Как и в коммутативном случае внешнюю производную d можно попытаться явно записать через образующие:

$$\tilde{d} = \sum_i dx_i\,\partial_i = \Omega^t D = \operatorname{tr} QD \otimes \Omega^t = \operatorname{tr}_q D \otimes \Omega^t, \tag{2.8}$$

где использовано соотношение (2.6) и в правой части возник q-след или след с матрицей Q [1] (см. Приложение):

$$Q_{ab} = q^{-1} \sum_c \left((R^{t_1})^{-1}\right)_{cc|ab} = q^{-1}\operatorname{tr}_1 \mathcal{P}\left((R^{t_1})^{-1}\right)^{t_1}. \tag{2.9}$$

Для R-матрицы квантовой группы $F_q(GL(n))$ имеем

$$Q = q^{-2}\operatorname{diag}\left(1, q^{-2}, \dots, q^{-2n+2}\right). \tag{2.10}$$

Используя соотношения (2.2) — (2.6) между генераторами, несложно показать, что элемент (2.8) удовлетворяет всем свойствам (1) — (4) внешнего дифференцирования. Докажем эти свойства:

$$\begin{aligned} \tilde{d}X\cdot &= \Omega_1^t D_1 \otimes X_1^t = q\Omega_1^t X_2^t \check{R}_{12} D_2 \cdot + \Omega_1^t \cdot = \\ &= X_1^t \Omega_2^t D_2 \cdot + \Omega_1^t \cdot = Xd\cdot + (dX)\cdot; \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}^2 &= \Omega_1^t D_1 \Omega_2^t D_2 = \Omega_1^t \Omega_2^t q \check{R}_{12} D_2 D_1 = -\Omega_2^t \Omega_1^t D_1 D_2 = \\ &= q^2 \Omega_1^t \Omega_2^t D_2 D_1 = 0; \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}D &= \Omega_2^t D_2 D_1 = q^{-1}\Omega_2^t \check{R}_{12} D_2 D_1 = \\ &= q^{-2} D_1 \otimes \Omega_1^t D_1 = q^{-2} D\tilde{d}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

В то же время при написании соотношений (2.1) — (2.6) предполагалась коммутативность внешнего дифференцирования d и производных ∂_j. Это привело от (2.3) к (2.6), а нильпотентность d и правило Лейбница дало (2.5) из (2.4).

Если редуцировать все соотношения только на подалгебру полиномов от первой образующей x_1 (или n-ой), то получим

$$\partial_1 x_1 = q^2 x_1 \partial_1 + 1, \quad x_1 dx_1 = q^2 dx_1 x_1, \quad \partial_1 dx_1 = q^2 dx_1 \partial_1. \tag{2.14}$$

Однако, второе и третье соотношения не совместны. Это следует из дифференцирования второго соотношения или из проверки предположения о коммутативности d и ∂_1 на элементе x_1^n ($[n;q] = (q^n - 1)/(q - 1)$):

$$\begin{aligned} d(x_1^n) &= [n; q^{-2}] x_1^{n-1}\, dx_1; \\ \partial(x_1^n) &= [n, q^2] x_1^{n-1}; \\ \partial d(x_1^n) &= [n; q^{-2}]\,[n-1, q^2] x_1^{n-2}\, dx_1; \\ d\partial(x_1^n) &= [n, q^2]\,[n-1, q^{-2}] x_1^{n-2}\, dx_1; \\ d\partial &= q^2 \partial d. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Точнее говоря, результатом этих соотношений (2.14) и свойства ассоциативности $\mathcal{A}$ является равенство $dx_1 = 0$, что неудовлетворительно с точки зрения квазиклассического предела. Соотношения (2.14) легко согласовать, изменив второе на $x_1\, dx_1 = q^{-2}\, dx_1 x_1$ или третье на $\partial_1 dx_1 = q^{-2} dx_1 \partial_1$.

Аналогичная ситуация возникает и при действии генераторов ∂_j на (2.4). Легко видеть, что даже слагаемые пропорциональные ω_k в левой и правой частях не совпадают. Как и в предыдущем упрощенном случае, это можно исправить, но прежде мы опишем имеющийся в соотношениях (2.1) — (2.6) произвол.

Основное свойство, которое неявно подразумевалось при их выборе — ковариантность относительно кодействия квантовой группы $F_q(R)$. Все соотношения сохраняются при замене

$$X \to \tilde{X} = TX, \quad \Omega \to \tilde{\Omega} = T\Omega, \quad D \to \tilde{D} = \left(T^t\right)^{-1} D. \tag{2.16}$$

Это утверждение очевидно для (2.1), (2.4) и (2.5) при умножении их на $T_2 T_1 = (I \otimes T)\,(T \otimes 1)$ слева, использовании в левой части основного соотношения (1.1) и учитывая коммутативность t_{ij} с генераторами алгебры НДГ $\mathcal{A} : \{x_i, \partial_j, \omega_k\}$. Инвариантность (2.2), (2.3) и (2.6) относительно замены (2.16) требует некоторых элементарных преобразований основной формулы (1.1). Например, после транспонирования в двух пространствах и домножения на обратные матрицы (1.4), имеем

$$\left(T_2^t\right)^{-1}\left(T_1^t\right)^{-1} R_{12}^t = R_{12}^t \left(T_1^t\right)^{-1}\left(T_2^t\right)^{-1}. \tag{2.17}$$

Для R-матрицы квантовой группы $GL_q(n)$ верно равенство $R_{12}^t = R_{21}$, откуда следует инвариантность (2.2). Для (2.3) и (2.6) используется равенство

$$\left(T_1^t\right)^{-1} R_{12}^t \mathcal{P} T_1^t = T_2^t R_{12}^t \mathcal{P} \left(T_2^t\right)^{-1}. \tag{2.18}$$

Однако, в силу тождественности матриц T в основном соотношении (1.1), в отличие от случая со спектральным параметром, оно же верно и с R-матрицей

$$\tilde{R}_{12} = R_{21}^{-1} = \mathcal{P} R_{12}^{-1} \mathcal{P}. \tag{2.19}$$

Таким образом, если придерживаться только соображений ковариантности, то любую R-матрицу можно заменить на эквивалентную (см. также [12-14,20]) с подходящим изменением скалярных факторов. Для (2.1), (2.2) и (2.5) это ведет к тем же соотношениям, но (2.3), (2.4), (2.6) меняются. Иной вариант (2.4)

$$R_{12} X_1 \Omega_2 = q^{-1} \Omega_2 X_1, \tag{2.20}$$

сохраняя ковариантность, дает согласованность с (2.3) и (2.6):

$$D_1 X_1^t \Omega_2^t = I_1 \Omega_2^t + q \Omega_2^t X_3^t \check{R}_{23}^{-1} \check{R}_{12} \check{R}_{23} D_3,$$
$$D_1 \left(q^{-1} \Omega_1^t X_2^t \check{R}_{12}^{-1}\right) = \Omega_2^t \check{R}_{12} D_2 X_2^t \check{R}_{12}^{-1} = \Omega_2^t I_1 + q \Omega_2^t X_3^t \check{R}_{12} \check{R}_{23} \check{R}_{12}^{-1} D_3.$$

Равенство сумм третьих степеней по генераторам $\mathcal{A}$ следует из уравнения Янга–Бакстера в форме соотношений из группы кос для $\check{R}_{12} = \mathcal{P} R_{12}$:

$$\check{R}_{12} \check{R}_{23} \check{R}_{12} = \check{R}_{23} \check{R}_{12} \check{R}_{23}. \tag{2.21}$$

Таким образом для НДГ квантового линейного пространства [6-9] имеется несколько возможностей, перечисление которых упрощается в рамках формализма R-матрицы. Ситуация становится еще более сложной для квантовых групп [12-14].

3. Квантовое линейное супер-пространство

Включение в R–матричную схему построения НДГ супер-пространств требует аккуратного учета знаков, связанных с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой (см., например, [22,23]). Для квантовой супер-группы $F_q(GL(m|n))$ квантовое линейное супер-пространство $M_q(m|n)$ порождается четными $(x_1, \dots, x_m)$, $p(x_i) = 0$ и нечетными $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $p(\zeta_\alpha) = 1$ генераторами. Тензорное произведение столбцов X, составленных из x_i, ζ_α, включает знаки

$$X_1 X_2 = X \otimes X = (x_i x_j, x_i \zeta_\beta, \zeta_\alpha x_i, -\zeta_\alpha \zeta_\beta)^t. \tag{3.1}$$

Более сложное правило знаков возникает в основном соотношении (1.1), где матрица генераторов квантовой супер-группы $F_q(GL(m|n))$ $T_2 = I \otimes T$ знаков не имеет, а для T_1 получаем [23]

$$(T_1)_{AB;CD} = (T \otimes I)_{AB;CD} = T_{AC}\, \delta_{BD}\, (-1)^{p(B)(p(A)+p(C))}. \tag{3.2}$$

В силу диагональности по индексам второго пространства это можно записать как подобие неградуированного тензорного произведения $T \otimes I$ с диагональной матрицей $(-1)^{p(A)p(B)}\delta_{AC}\delta_{BD} = \rho_{AB;CD}$, $\rho^2 = I \otimes I$.

Матрица R для $F_q(GL(m|n))$ также содержит знаки (см. (1.6))

$$R = \sum_{A \neq B} e_{AA} \otimes e_{BB} + \sum_A q^{1-2p(A)} e_{AA} \otimes e_{AA} + \lambda \sum_{A>B} (-1)^{p(A)p(B)} e_{AB} \otimes e_{BA}. \tag{3.3}$$

Инвариантный к преобразованию $K \to TKT^{-1}$ квантовый супер-след включает матрицу S

$$str_q K = str\, SK = \sum_A (-1)^{p(A)} S_{AB} K_{BA}, \tag{3.4}$$

$$S_{AB} = \sum_C (-1)^{p(A)+p(C)} \left(R^{st_1}\right)^{-1}_{BA;CC}. \tag{3.5}$$

Кроме упомянутой выше эквивалентности R-матриц (2.19) по отношению к свойству ковариантности НДГ, другой источник неединственности НДГ связан с возможностью добавки к соотношениям (2.1)–(2.6) инвариантов. Например, для $F_q(SL(2))$ в правую часть (2.1) можно добавить инвариантный тензор ε_{ab} (см. [20,21]).

Приложение. Инвариантный след

Преобразуем основное соотношение теории квантовых групп [1]

$$R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12},$$

используя транспонирование по одному из пространств и предполагая существование соответствующих обратных матриц:

$$\begin{gathered} T_1^t R_{12}^{t_1} T_2 = T_2 R_{12}^{t_1} T_1^t, \\ \left(R_{12}^{t_1}\right)^{-1} T_2^{-1} T_1^t = T_1^t T_2^{-1} \left(R_{12}^{t_1}\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{П.1}$$

Если в последнем равенстве взять сумму по совпадающим индексам строк первого и второго пространств, то получим [1,21]

$$\begin{gathered} Q_{ab} \left(T^{-1}\right)_{bc} T_{da} = Q_{dc}, \\ Q_{ab} = \sum_j \left(R_{12}^{t_1}\right)^{-1}_{jj\,;\,ab}, \\ Q = \operatorname*{tr}_{V_1} \mathcal{P}\left(\left(R_{12}^{t_1}\right)^{-1}\right)^{t_1}. \end{gathered} \tag{П.2}$$

В результате для матрицы M, элементы которой коммутируют с элементами T, имеем инвариантность: $M \to T^{-1}MT$ и $M \to (T^t)^{-1}MT^t$

$$\mathrm{tr}_q T^{-1}MT = \sum Q_{ab}(T^{-1})_{bc}M_{cd}T_{da} = \sum Q_{dc}M_{cd} = \mathrm{tr}\, QM = \mathrm{tr}_q M. \tag{П.3}$$

Если же взять в (П.1) сумму по совпадающим индексам столбцов первого и второго пространств, то получим

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{ba} &= \overline{Q}_{dc}T_{ca}(T^{-1})_{bd}, \\ \overline{Q}_{ba} &= \sum_j (R_{12}^{t_1})^{-1}_{ab;jj}. \end{aligned} \tag{П.4}$$

Следствием этого равенства является инвариантность следа

$$\mathrm{tr}_{\overline{q}} M = \mathrm{tr}\, \overline{Q}M \tag{П.5}$$

относительно преобразования $M \to TMT^{-1}$ и $M \to T^tM(T^t)^{-1}$. Для R-матрицы квантовой группы $F_q(GL(n))$

$$\overline{Q} = q\,\mathrm{diag}\,(q^{-2n}, q^{-2n+2}, \dots, q^{-2}).$$

Приведем некоторые свойства инвариантного следа, используя специальную структуру $GL(n)$ R-матрицы (1.6):

$$\begin{aligned} R_+ &= \mathcal{P}R\mathcal{P}, & R_- &= \mathcal{P}R_+^{-1}\mathcal{P} = R^{-1}, \\ R_+ - R_- &= \lambda\mathcal{P}, & R_+^{-1} - R_-^{-1} &= -\lambda\mathcal{P}. \end{aligned} \tag{П.6}$$

Поскольку $R = R_-^{-1}$ и $\mathcal{P}R^{-1}\mathcal{P} = R_+^{-1}$ удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера и могут рассматриваться как представления матрицы T генераторов квантовой группы, то в силу инвариантности q-следа имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_q R_+ A R_+^{-1} &= \mathrm{tr}_q A, \\ \mathrm{tr}_q R_- A R_-^{-1} &= \mathrm{tr}_q A. \end{aligned} \tag{П.7}$$

Используя определение матрицы Q (П.2) и (П.3), несложно проверить равенства (Л. Д. Фаддеев [13,14])

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_q R_+ A R_-^{-1} &= \mathrm{tr}_q A + \lambda A, \\ \mathrm{tr}_q R_- A R_+^{-1} &= \mathrm{tr}_q A - q^{-2n}\lambda A. \end{aligned} \tag{П.8}$$

Отмеченная в основном тексте (2.19) возможность замены в соотношениях для генераторов матрицы R на эквивалентную $\mathcal{P}R^{-1}\mathcal{P}$ с сохранением свойства ковариантности, ведет, вообще говоря, к изменению свойств соответствующей алгебры. Например, в простейшем случае (1.1) единственная неэквивалентная замена ведет к соотношению

$$\check{R}T \otimes T = q^2 T \otimes T\check{R}^{-1}, \tag{П.9}$$

где использована R-матрица в форме (2.21), принятой в группе кос, и множитель q^2 выбран из соображений нетривиальности подпространства

$$P_+(q)T \otimes TP_+(q), \qquad \check{R} = qP_+(q) - q^{-1}P_-(q). \tag{П.10}$$

Кроме тривиальности подпространств

$$P_+(q)T \otimes TP_-(q) = 0, \qquad P_-(q)T \otimes TP_+(q) = 0,$$

что верно и для (1.1), в случае (П.9) тривиально и подпространство

$$P_-(q)T \otimes TP_-(q) = 0.$$

Тем самым, при $n = 2$ равен нулю квантовый детерминат [1]

$$\det_q T = ad - q\,bc = 0. \tag{П.11}$$

К привычным соотношениям квантовой группы $F_q(GL(2))$ добавляются

$$ad = q^2\,da = q\,bc \tag{П.12}$$

и она, оставаясь биалгеброй, перестает быть алгеброй Хопфа, поскольку отображения коединицы ε и антипода s не определены. Получившаяся биалгебра обладает градуировкой по степеням генераторов a, b, c, d.

Список литературы

[1] Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А. и Фаддеев Л. Д., Алг. анализ **1** №1 (1989), 178.
[2] Connes A., Publ.Math. I.H.E.S. **62** (1985), 257.
[3] Kastler D., Preprint CPT, Marseille, 1991.
[4] Coquereaux R., Preprint CERN–TH. 6552/92, 1992; J.Geom.Phys. 6 (1990), 425.
[5] Woronowicz S., Publ. RIMS 1987, v. 23, p. 117; Comm.Math.Phys. 122 (1989), 125.
[6] Manin Yu. I., *Topics in noncommutative geometry*, Princeton, 1990.
[7] Wess J. and Zumino B., Nucl.Phys.B (Proc.Suppl.) **18B** (1990), 302.
[8] Schirrmacher A., Wess J. and Zumino B., Z.Phys.C **49** (1991), 317.
[9] Zumino B., Preprint UCB-PTH-62/91, 1991.
[10] Kulish P. P., Phys.Lett.A **161A** (1991), 50.
[11] Alekseev A. and Faddeev L., Comm.Math.Phys. **141** (1991), 111.
[12] Schupp P., Watts P. and Zumino B., Preprint UCB-PTH-92/13, 1992.
[13] Faddeev L. D., Lectures on Inter.Workshop "Interplay between Mathematics and Physics", Vienna, 1992.
[14] Faddeev L. D., *Quadratic algebras*, Report on XXI-DGMTP conference, Tianjin, 1992.
[15] Müller–Hoissen F., J.Phys.A **25** (1992), 1703.
[16] Sudbery A., Phys.Lett. B **284** (1992), 61.
[17] Isaev A. and Pyatov P., Preprint JINR-E2-92-477, 1992.
[18] Bayen F., Flato M., Lichnerowicz A., Fronsdal C. and Sternheimer D., Ann.Phys. **111** (1978), 111.
[19] Takhtajan L. A., Lect. Notes Phys. **370** (1991), 3.
[20] Kulish P. P. and Sklyanin E. K., J.Phys.A **25** (1992), 5963.
[21] Kulish P. P. and Sasaki R., Preprint YITP/U-92-32, 1992.
[22] Kobayashi T. and Uematsu T., Z.Phys.C **56** (1992), 193.
[23] Kulish P. P. and Sklyanin E. K., Lect.Notes Phys. **151** (1982), 61.