

## АЛГОРИТМЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДОСТИЖИМОСТИ

КУЛИКОВСКИЙ А. В., СУРИС Т. Г., ЦИРЛИН А. М.

(Москва)

Рассмотрена возможность построения алгоритмов численного решения задач нелинейного программирования с использованием связи между функцией достижимости исходной задачи и задачи безусловной оптимизации с модифицированной целевой функцией. Алгоритмы основаны на последовательной аппроксимации функции достижимости исходной задачи и таком выборе параметров целевой функции в задаче безусловной оптимизации, чтобы ее максимум оказался на множестве допустимых решений исходной задачи.

### 1. Общая схема алгоритмов

Одной из основных функций систем управления является решение оптимизационных задач. Ниже сделана попытка показать возможности ускорения сходимости алгоритмов условной оптимизации с использованием свойств функции достижимости задачи нелинейного программирования.

Целый ряд вычислительных схем нелинейного программирования основан на переходе от исходной задачи условной оптимизации к решению задачи о безусловном оптимуме в некотором смысле эквивалентной исходной. При этом вспомогательная задача безусловной оптимизации содержит параметры, подбором которых ее решение стремятся сделать допустимым по условиям исходной. Ниже в качестве исходной рассмотрим задачу вида

$$(1) \quad f_0(x) \rightarrow \max / f_\nu(x) = 0 \text{ для } x \in V_x, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Здесь  $x$  — элемент действительного евклидова пространства  $R^n$ , функции  $f_\nu(x)$ ,  $\nu = \overline{0, m}$  определены на множестве  $V_x$ , непрерывны и дважды дифференцируемы. Множество  $V_x$  представляет собой параллелепипед, образованный ограничениями типа

$$x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n},$$

наложенными на каждую из составляющих вектора искомым переменных.

Задаче (1) может быть сопоставлена вспомогательная задача вида

$$(2) \quad R(x, \lambda) = F_0(f_0(x), \lambda) + \Phi(f(x), \lambda) \rightarrow \max / x \in V_x.$$

Функции  $F_0$  и  $\Phi$  в этом выражении должны быть таковы, чтобы решение задачи (2)  $x^*(\lambda)$ , удовлетворяющее условиям  $f(x) = 0$ , оказалось бы решением также и задачи (1). Величину вектора  $\lambda$ , соответствующую этому решению, будем обозначать через  $\lambda^*$ . Если среди допустимых значений  $\lambda$  существует  $\lambda^*$ , то вспомогательную задачу назовем эквивалентной исходной.

Функции  $F_0$  и  $\Phi$  будем предполагать непрерывными, почти всюду дважды дифференцируемыми и удовлетворяющими двум условиям, гарантирующим, что решение вспомогательной задачи, для которого  $f(x) = 0$ , является решением задачи (1):

а) условие монотонности преобразования функции цели

$$(3) \quad \partial F_0 / \partial f_0 \geq 0 \quad \forall \lambda,$$

б) условие исчезновения функции  $\Phi$  на множестве допустимых решений исходной задачи

$$(4) \quad \Phi(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda.$$

Как будет показано ниже, монотонное преобразование целевой функции позволяет существенным образом улучшить характеристики вычислительных алгоритмов. В приложении I приведена теорема о седловой точке применительно к вспомогательной задаче (2).

Центральное место в дальнейшем изложении будет занимать функция, характеризующая зависимость предельного достижимого значения  $f_0(x)$  от вектора, стоящего в правой части ограничений:

$$f_0^*(C) = \max_{x \in V_x} f_0(x) / f(x) = C, \quad x \in V_x.$$

Задачу о максимуме  $f_0(x)$  при условиях  $f(x) = C$  называют в нелинейном программировании возмущенной задачей, вектор  $C$  — вектором возмущений [1], а функцию  $f_0^*(C)$  — функцией возмущений [2]. Однако в литературе по управлению понятие возмущения используют в ином смысле. Мы будем называть  $f_0^*(C)$  функцией достижимости задачи (1). Аналогичную конструкцию введем для вспомогательной задачи (2):

$$(5) \quad R^*(C, \lambda) = \max_{x \in V_x} R(x, \lambda) / f(x) = C, \quad x \in V_x.$$

С учетом вида  $R(x, \lambda)$  и принимая во внимание условие монотонности  $F_0$  (3), выражение (5) можно переписать в виде

$$(6) \quad R^*(C, \lambda) = \max_{x \in V_x} F_0(f_0(x), \lambda) / f_0(x) = C + \Phi(C, \lambda) = \\ = F_0(f_0^*(C), \lambda) + \Phi(C, \lambda).$$

Решению вспомогательной задачи (2)  $x^*(\lambda)$  соответствует значение  $C^*(\lambda)$  вектора  $C$ , причем функция  $R^*(C, \lambda)$  достигает в точке  $C^*(\lambda)$  максимума по  $C$ . Действительно, на решении  $x^*(\lambda)$  задачи (2) достигается максимум  $R(x, \lambda)$  на множестве  $V_x$ . Если в (5) положить  $f(x) = C^*(\lambda)$ , то найденное решение оказывается допустимым. При любом другом значении  $C$  кроме принадлежности множеству  $V_x$  на искомое решение накладываются дополнительные условия, а значит, значение задачи не увеличивается.

Таким образом,

$$R^*(C^*(\lambda), \lambda) \geq R^*(C, \lambda) \quad \forall C.$$

Если при некотором  $\lambda = \lambda^* C^*(\lambda^*) = 0$ , то  $x^*(\lambda^*)$  — решение задачи (1),  $f_0^*(C^*) = f_0^*(0)$  — значение исходной задачи.

Выражение (6) показывает, что функции достижимости исходной и вспомогательной задач однозначно связаны. Эта связь позволяет наглядно пояснить некоторые известные факты нелинейного программирования и сформулировать требования к функциям  $F_0$  и  $\Phi$ . Рассмотрим два конкретных случая.

1. Пусть

$$(7) \quad R = f_0(x) - \alpha |f(x)|^k.$$

При  $k=1$  это выражение соответствует модульному штрафу, а при  $k=2$  — квадратичному. Соответствующая функция достижимости (см. (6))

$$R^*(C, \alpha) = f_0^*(x) - \alpha |C|^k.$$

Из рис. 1 видно, что при  $k=1$  и достаточно большом  $\alpha$  можно добиться, чтобы максимум  $R^*(C, \alpha)$  оказался в точке  $C=0$ . При этом от функции  $f_0^*(C)$  требуется только выполнение условий Липшица.

При  $k=2$  максимум функции  $R^*(C, \alpha)$  можно сместить в точку  $C=0$  при конечном  $\alpha$  лишь в случае, когда  $f_0^*(C)$  стационарна в точке  $C=0$ . В противном случае  $C^*(\alpha) \rightarrow 0$ , когда  $\alpha \rightarrow \infty$  (если при этом функция  $f_0^*(C)$  растет не быстрее квадратической (рис. 2)).

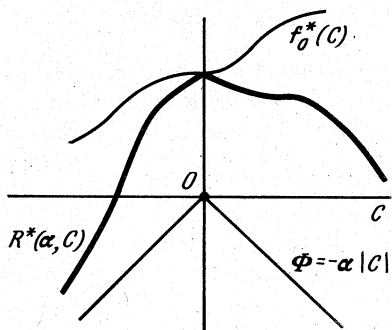


Рис. 1

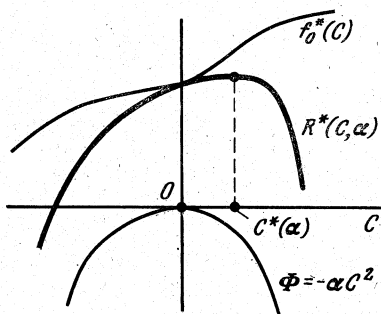


Рис. 2

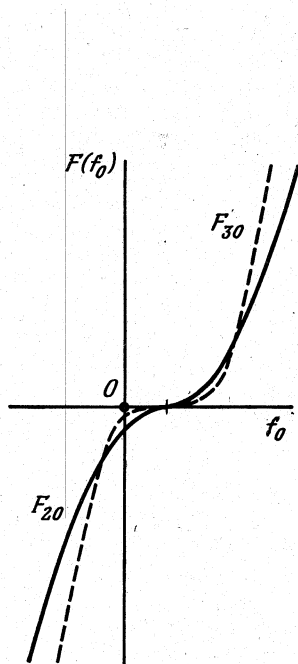


Рис. 3

Если в функцию (7) ввести добавочное слагаемое  $\lambda f(x)$ , функция достижимости вспомогательной задачи примет вид

$$R^*(C, \lambda, \alpha) = f_0^*(C) - \alpha|C|^h + \lambda C.$$

Выбирая  $\lambda$  так, чтобы сумма  $f_0^*(C) + \lambda C$  была стационарна в точке  $C=0$ , можно надеяться и для квадратичного штрафа получить решение исходной задачи при конечном  $\alpha$  [3].

2. Рассмотрим теперь функцию  $R$  в более общей форме, фигурирующей в задаче (2), и соответствующее этому виду  $R$  выражение (6) для функции достижимости. Для того чтобы при некотором допустимом векторе  $\lambda$  максимум этой функции оказался в точке  $C=0$ , структуру  $F_0$  и  $\Phi$  желательно выбрать так, чтобы для любого допустимого  $C$  матрица Гессе этой функции с элементами

$$\Gamma_{ij} = \partial^2 R(C, \lambda, \alpha) / \partial C_i \partial C_j$$

была отрицательно определенной, а уравнение

$$(8) \quad [\nabla_C R^*(C, \lambda, \alpha)]_{C=0} = 0$$

имело решение  $\lambda^*$ ,  $\alpha^*$ , принадлежащее  $V_\lambda$ .

В частности, если  $\Phi(C, \alpha) = -\alpha C^2$ , что соответствует квадратичному штрафу, а  $V_\alpha$  включает лишь конечные значения  $\alpha > 0$ , то  $\nabla_C \Phi(C, \alpha) = (-2\alpha C)_{C=0} = 0$ . Из (8) вытекает, что

$$\nabla_C R^*(C, \lambda, \alpha)_{C=0} = \nabla_C F_0(f_0^*(C), \lambda)_{C=0} = \left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0^*} \right)_{f_0^*(0)} \nabla_C f_0^*(0) = 0.$$

Так как  $(\nabla_C f_0^*(C))_{C=0}$  в общем случае не равен нулю, монотонное преобразование функции  $F_0$  должно быть таким, чтобы производная  $\partial F_0 / \partial f_0$  была равна нулю в точке  $f_0^*(0)$ . Этому условию отвечают, например, функции

$$(9) \quad F_{30}(f_0, \lambda_0) = (f_0 - \lambda_0)^3$$

и

$$(10) \quad F_{20}(f_0, \lambda_0) = (f_0 - \lambda_0)^2 \text{sign}(f_0 - \lambda_0).$$

При этом  $\lambda_0 = f_0^*(0)$  — значение задачи (1). Функции (9) и (10) показаны на рис. 3.

Общая схема изложенных ниже вычислительных алгоритмов такова:  
 а. Выбирают некоторую форму аппроксимации функции достижимости исходной задачи  $f_0^*(C)$  и выражают параметры  $\lambda$  через коэффициенты этой аппроксимации. При этом руководствуются требованием, чтобы функция достижимости вспомогательной задачи  $R^*(C, \lambda)$  оказалась выпуклой по  $C$ , а ее максимум попал в точку  $C=0$ .

б. На  $(k+1)$ -м шаге уточняют коэффициенты аппроксимации по результатам решения вспомогательной задачи (2) на предыдущих шагах и на базе уточненных коэффициентов рассчитывают  $\lambda^{k+1}$ . В зависимости от способа аппроксимации функции и вида функций  $F_0$  и  $\Phi$  приходим к той или иной конкретизации этой общей схемы.

Пусть, например,  $f_0^*(C)$  аппроксимируется как

$$f_0^*(C) = a + \sum_{\nu} b_{\nu} C_{\nu}.$$

Считаем, что  $C^*(\lambda) = \operatorname{argmax} R(C, \lambda)$  представляет собой корень уравнения

$$\left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right) b_{\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial C_{\nu}} = 0, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

После  $k$ -го цикла алгоритма известны значения  $C^*(\lambda^k) = C^{*k}$ ,  $C^*(\lambda^{k-1}) = C^{*(k-1)}$ , ...,  $f_0^*(\lambda^k)$ ,  $f_0^*(\lambda^{k-1})$ , ...,  $\lambda^k$ ,  $\lambda^{k-1}$ , ... . Для определения параметров аппроксимации функции достижимости на  $k$ -м шаге  $a^k$  и  $b^k$  имеем систему уравнений

$$\left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right)_{C^{*k}, \lambda^k} b_{\nu}^k + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial C_{\nu}} \right)_{C^{*k}, \lambda^k} = 0,$$

$$a^k + \sum_{\nu} b_{\nu}^k C_{\nu}^{*k} = f_0^*(\lambda^k), \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Величину же параметра  $\lambda^{k+1}$  определяем из условий смещения максимума функции  $R^*(C, \lambda)$  в точку  $C=0$ :

$$(11) \quad \left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right) b_{\nu}^k + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial C_{\nu}} \right) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Производные в (11) вычисляются в точке  $C=0$ ,  $a = a^k$ ;  $b = b^k$ . Наряду с условиями (11) выбор  $\lambda^{k+1}$  должен обеспечивать выпуклость функции  $R$  по  $C$ .

## 2. Связь между функциями достижимости исходной и вспомогательной задач

Выражение (6) показывает, как связаны друг с другом функции достижимости  $f_0^*(C)$  и  $R^*(C, \lambda)$ . Запишем формулы для составляющих градиента и элементов матрицы Гессе функции  $R^*(C, \lambda)$ :

$$(12) \quad R_{C_{\nu}}^* = \left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right) f_{0C_{\nu}}^* + \Phi_{C_{\nu}}$$

$$\Gamma_{\nu j} = \left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right) \gamma_{\nu j} + \left( \frac{\partial^2 F_0}{\partial f_0^2} \right) f_{0C_{\nu}}^* f_{0C_j}^* + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_{\nu} \partial C_j} \right).$$

Здесь

$$(13) \quad \Gamma_{\nu j} = \partial^2 R^* / \partial C_{\nu} \partial C_j, \quad \gamma_{\nu j} = \partial^2 f_0^* / \partial C_{\nu} \partial C_j,$$

$$f_{0C_{\nu}}^* = \partial f_0^* / \partial C_{\nu}, \quad \Phi_{C_{\nu}} = \partial \Phi / \partial C_{\nu}.$$

Для выпуклости функции  $R^*(C)$  достаточно, чтобы матрица  $\Gamma = \|\Gamma_{\nu j}\|$  была отрицательно определенной. В табл. 1 и 2 приведены конкретные типы функций  $F_0$  и  $\Phi$ , удовлетворяющие наложенным выше требованиям (3) и (4), и соответствующие этим функциям слагаемые в выражениях (12), (13). При этом для составляющих вектора неопределенных параметров  $\lambda$  использованы как обозначения  $\lambda_{\nu}$ , так и обозначения  $\alpha_{\nu}$  и  $\lambda_0$ .

Таблица 1

№ п.п	Функция $\Phi(C, \lambda)$	$\partial\Phi/\partial C_\nu$	$\partial^2\Phi/\partial C_\nu\partial C_j$
1	$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu C_\nu$	$\lambda_\nu$	0
2	$-\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu (C_\nu)^2$	$-\alpha_\nu C_\nu$	$-\alpha_\nu$ для $\nu=j$ , 0 для $\nu \neq j$
3	$\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu C_\nu - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu (C_\nu)^2$	$\lambda_\nu - \alpha_\nu C_\nu$	$-\alpha_\nu$ для $\nu=j$ , 0 для $\nu \neq j$
4	$-\sum_{\nu=1}^m  C_\nu $	$-\alpha_\nu \text{sign} C_\nu$	$-2\alpha_\nu \delta(C_\nu)$ для $\nu=j$ , 0 для $\nu \neq j$

Таблица 2

№ п.п	Функция $F_0(f_0, \lambda)$	$\partial F_0/\partial f_0$	$\partial^2 F_0/\partial f_0^2$
1	$f_0$	1	0
2	$\frac{1}{3}(f_0 - \lambda_0)^3$	$(f_0 - \lambda_0)^2$	$2(f_0 - \lambda_0)$
3	$\frac{1}{2}(f_0 - \lambda_0)^2 \text{sign}(f_0 - \lambda_0)$	$ f_0 - \lambda_0 $	$\text{sign}(f_0 - \lambda_0)$

Точка стационарности функции  $R^*(C, \lambda)$  удовлетворяет условиям

$$(14) \quad \nabla_c \Phi(C^*(\lambda), \lambda) = - \left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right) \nabla f_0^*(C^*(\lambda)).$$

Для отрицательной определенности матрицы Гессе функции  $R^*(C, \lambda)$  должны быть выполнены условия Сильвестра чередования знаков ее главных миноров, причем первый главный минор должен быть отрицательным:

$$M_1 = \Gamma_{11} < 0, \quad M_2 = \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21} > 0, \dots$$

Практика расчетов показывает, что для аппроксимации функции  $f_0^*(C)$  целесообразно использовать сравнительно простые выражения. Конкретизируем записанные выше условия стационарности и вид элементов матриц Гессе для линейной аппроксимации  $f_0^*(C) = a + \sum_{\nu} b_\nu C_\nu$ :

$$(15) \quad \Phi_{C_\nu} = - \left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right) b_\nu,$$

$$\gamma_{\nu j} = 0, \quad \Gamma_{\nu j} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial f_0^2} b_\nu b_j + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_\nu \partial C_j}.$$

Аналогично для неполной квадратичной аппроксимации

$$f_0^*(C) = a + \sum_{\nu} b_\nu C_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\nu} d_\nu C_\nu^2$$

получим

$$\Phi_{C_\nu} = - \frac{\partial F_0}{\partial f_0} (b_\nu + d_\nu C_\nu),$$

$$\gamma_{\nu j} = 0, \quad \Gamma_{\nu j} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial f_0^2} (b_\nu + d_\nu C_\nu) (b_j + d_j C_j) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_\nu \partial C_j}.$$

В [4] показано, что известный алгоритм Пауэла [5] можно получить, следуя изложенной выше схеме, при этом  $F_0=f_0$ , аппроксимация для  $f_0^*(C)$  линейная, а функция

$$\Phi(\lambda, f) = \sum_v \lambda_v f_v - \sum_v \alpha_v f_v^2.$$

Ниже изложим два новых алгоритма. В первом из них монотонное преобразование целевой функции позволило упростить вид функции  $\Phi(\lambda, f)$  и обоснованно выбирать коэффициенты в этой функции. Во втором использована неполная квадратичная аппроксимация  $f_0^*(C)$ , что позволило оценить нужные значения коэффициентов  $\alpha_v$  при квадратичных слагаемых функции  $\Phi$ .

### 3. Алгоритм монотонного преобразования целевой функции с введением квадратичного штрафа

Сформулируем вспомогательную задачу в форме

$$R(x, \lambda_0, \alpha) = \frac{1}{2}(f_0(x) - \lambda_0)^2 \text{sign}(f_0(x) - \lambda_0) - \frac{1}{2} \sum_v \alpha_v f_v^2(x) \rightarrow \max/x \in V_x.$$

Таким образом, функция  $F_0$  соответствует третьей строке табл. 2, а  $\Phi$  — второй строке в табл. 1. Для  $f_0^*(C)$  примем линейную аппроксимацию. Условия (14) стационарности примут вид

$$-\alpha_v C_v = |f_0^*(C) - \lambda_0|.$$

Элементы матрицы Гессе вспомогательной задачи

$$(16) \quad \begin{aligned} \Gamma_{vv} &= \text{sign}(f_0 - \lambda_0) b_v^2 - \alpha_v, \\ \Gamma_{vj} &= \text{sign}(f_0 - \lambda_0) b_v b_j, \quad j \neq v. \end{aligned}$$

На первом шаге алгоритма проводят следующие операции:

1. Задаются  $\alpha^0 > 0$  и решают задачу

$$R(x, \alpha^0) = f_0(x) - \frac{1}{2} \sum_v \alpha_v^0 f_v^2(x) \rightarrow \max/x \in V_x.$$

Для полученного вектора  $x^{*0}(\alpha^0)$  подсчитывают  $f_0(x^{*0})$  и  $f_v(x^{*0}) = C_v^{*0}$ .

2. Рассчитывают коэффициенты аппроксимации  $f_0^*(C)$  по формулам

$$(17) \quad \begin{aligned} a^0 + \sum_v b_v^0 C_v^{*0} &= f_0(x^{*0}), \\ -\alpha_v^0 C_v^{*0} &= -b_v^0, \quad v=1, m. \end{aligned}$$

В этих выражениях учтено, что  $f_0(x^{*0}) = f_0^*(C^{*0})$ . Из уравнений (17) находят

$$b_v^0 = \alpha_v^0 C_v^{*0}, \quad a^0 = f_0(x^{*0}) - \sum_v \alpha_v^0 (C_v^{*0})^2.$$

3. Для последующих итераций будем предполагать, что на  $k$ -й итерации значения  $\lambda^k$  и  $\alpha^k$  известны, а в результате решения задачи (2) получен вектор  $x^{*k} = x^*(\lambda^k, \alpha^k)$  и подсчитаны  $f_0(x^{*k})$  и  $f_v(x^{*k}) = C_v^{*k}$ . В  $(k+1)$ -м цикле алгоритма проводим следующие операции.

а. Рассчитаем коэффициенты аппроксимации функции  $f_0^*(C)$  по формулам

$$(18) \quad a^{k+1} + \sum_{\substack{\nu \\ \nu=\overline{1, m}}} b_\nu^{k+1} C_\nu^{*k} = f_0(x^{*k}), \quad -\alpha_\nu^k C_\nu^{*k} = -|f_0(x^{*k}) - \lambda_0| b_\nu^{k+1},$$

В этих выражениях учтено, что  $f_0^*(C^{*k}) = f_0(x^{*k})$ . Из уравнений (18) находим

$$b_\nu^{k+1} = \alpha_\nu^k C_\nu^{*k} / |f_0(x^{*k}) - \lambda_0|, \quad \nu = \overline{1, m},$$

$$a^{k+1} = f_0(x^{*k}) - \sum_{\nu} b_\nu^{k+1} C_\nu^{*k}.$$

б. Выбираем параметры  $\alpha_\nu^{k+1}$  и  $\lambda_\nu^{k+1}$  таким образом, чтобы вектор  $C^{*k+1}$  оказался равным нулю при выпуклой функции  $R^*(C, \alpha^{k+1}, \lambda^{k+1})$ . Из условий стационарности в точке  $C_\nu^{*k+1}$  имеем

$$C_\nu^{*k+1} = b_\nu^{k+1} / \alpha_\nu^{k+1} |f_0^*(C^{*k+1}) - \lambda_0^{k+1}|, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Поскольку параметр  $\alpha^{k+1}$  ограничен, а  $b_\nu^{k+1} \neq 0$ , то при  $C_\nu^{*k+1} = 0$  параметр  $\lambda_0^{k+1}$  должен выбираться согласно условию

$$\lambda_0^{k+1} = f_0^*(0) = a^{k+1}.$$

Что касается величин  $\alpha_\nu^{k+1}$ , то они находятся из условий отрицательной определенности для матрицы с элементами  $\Gamma_{vj}$ , подсчитываемыми согласно выражениям (16), в которых  $b_\nu = b_\nu^{k+1}$ .

В приложении II даны выражения, позволяющие оценить значения  $\alpha_\nu^k$ . Эти выражения основаны на неравенствах Гершгорина [6]:

$$\alpha_\nu^{k+1} > (b_\nu^{k+1})^2 + \sum_{\substack{j \\ j \neq \nu}}^m |b_\nu^{k+1} b_j^{k+1}|, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Для остановки алгоритма удобно использовать условие равенства нулю с заданной точностью вектора  $C^*$  на последнем шаге.

#### 4. Алгоритм, основанный на квадратичной аппроксимации функции достижимости, с использованием линейной и квадратичной функции штрафа

В качестве второго примера использования намеченной выше схемы рассмотрим алгоритм, в котором монотонное преобразование функции  $f_0$  отсутствует. Вспомогательная задача (2) запишется в форме

$$(19) \quad R(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{\nu} \lambda_\nu f_\nu(x) - 1/2 \sum_{\nu} \alpha_\nu f_\nu^2 \rightarrow \max / x \in V_x.$$

Функция  $F_0$  соответствует первой строке табл. 2, а функция  $\Phi$  — третьей строке табл. 1. Аппроксимацию  $f_0^*(C)$  зададим в форме (14). Условия (15) примут вид

$$(20) \quad \lambda_\nu - \alpha_\nu C_\nu = -b_\nu - d_\nu C_\nu.$$

Элементы матрицы Гессе

$$(21) \quad \Gamma_{vj} = 0, \quad \nu \neq j, \quad \Gamma_{\nu\nu} = d_\nu - \alpha_\nu, \quad \nu = j.$$

На первом шаге для определения  $x^{*0}$ , полагая  $\lambda^0 = 0$ , находим максимум выражения:

$$R(x, \alpha^0) = f_0(x) - 1/2 \sum_{\nu} \alpha_\nu f_\nu^2(x) \rightarrow \max / x \in V_x.$$

Для получения вектора  $x^{*0}(\alpha^0)$  имеем  $C_v^{*0} = f_v(x^{*0})$ . Аппроксимируем  $f_0^*(C)$  в окрестности  $C=0$  плоскостью

$$f_0^*(C) = f_0^*(0) + \sum_v b_v C_v.$$

Выберем  $\lambda_v$  так, чтобы функция достижимости расширенной задачи вида

$$R_0^*(C) = f_0^*(C) + \sum_v \lambda_v C_v$$

имела максимум в точке  $C=0$ , откуда  $\lambda_v = -b_v$ . Величину  $b_v$  найдем из условия стационарности функции достижимости задачи (19) в точке  $C=0$ :

$$\frac{\partial}{\partial C_v} \left[ f_0^*(C) - 1/2 \sum_v \alpha_v C_v^2 \right]_{C=0} = 0, \quad v = \overline{1, m}$$

или

$$b_v^0 = \alpha_v^0 C_v^0,$$

откуда определим  $\lambda_v^0 = -\alpha_v^0 C_v^0$ .

На втором шаге используем найденные значения  $\alpha^0$  и  $\lambda^0$ , решаем задачу (19) и для полученного  $x^{*1}$  находим  $f_v(x^{*1})$  и  $f_0(x^{*1})$ . Рассчитываем коэффициенты аппроксимации  $f_0^*(C)$  по формулам

$$\begin{aligned} a^1 &= f_0(x^{*1}) - \sum_v b_v^1 C_v^{*1} - 1/2 \sum_v d_v^1 (C_v^{*1})^2, \\ b_v^1 &= -\lambda_v^1 + C_v^{*1} (\alpha_v^1 - d_v^1), \\ d_v^1 &= \frac{1}{C_v^{*0} - C_v^{*1}} (\lambda_v^1 - \lambda_v^0 + \alpha_v^0 C_v^{*0} - \alpha_v^1 C_v^{*1}), \quad v = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Выбираем значения  $\lambda^2$  и  $\alpha^2$ :

$$\lambda_v^2 = -b_v^1, \quad \alpha_v^2 = 1, \quad 2|d_v^1| + d_v^1, \quad v = \overline{1, m}.$$

Будем предполагать, что на  $k$ -й итерации значения  $\lambda^k$  и  $\alpha^k$  нам известны. Решая задачу (19), получим  $x^{*k} = x^*(\lambda^k, \alpha^k)$ . Ему соответствуют  $f_0(x^{*k})$  и  $f_v(x^{*k}) = C_v^{*k}$ . Выбор  $\lambda^{k+1}$  и  $\alpha^{k+1}$  производим в следующей последовательности.

а. Рассчитываем коэффициенты аппроксимации функции  $f_0^*(C)$  по найденным значениям  $x^{*k}$ ,  $f_0^*(x^{*k})$ ,  $C^{*k}$ . Для этого используем условия

$$a^{k+1} + \sum_v b_v^{k+1} C_v^{*k+1} - 1/2 \sum_v d_v^{k+1} (C_v^{*k})^2 = f_0(x^{*k}),$$

(22)

$$\lambda_v^k - \alpha_v^k C_v^{*k} = -b_v^{k+1} - d_v^{k+1} C_v^{*k}, \quad v = \overline{1, m}.$$

Эти уравнения содержат  $(2m+1)$  переменных, число же уравнений равно  $(m+1)$ . Поэтому для расчета коэффициентов аппроксимации придется привлечь условия стационарности функции  $R^*(C, \lambda)$  в точке  $C^{*k-1}$ :

$$(23) \quad \left( \frac{\partial R}{\partial C} \right)_{C^{*k-1}} = \lambda_v^{k-1} - \alpha_v^{k-1} C_v^{*k-1} = -b_v^{k+1} - d_v^{k+1} C_v^{*k-1}.$$

Решение системы (21), (23) приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$a^{k+1} = f_0(x^{*k}) - \sum_v b_v^{k+1} C_v^{*k-1} - 1/2 \sum_v d_v^{k+1} (C_v^{*k})^2,$$

$$b_v^{k+1} = -\lambda_v^k + C_v^{*k} (\alpha_v^k - d_v^{k+1}),$$

$$d_v^{k+1} = \lambda_v^k - \lambda_v^{k-1} + \alpha_v^{k-1} C_v^{*k-1} - \alpha_v^k C_v^{*k}, \quad v = \overline{1, m}.$$

Таблица 3

Монотонное преобразование целевой функции	Отсутствует		Отсутствует		Квадратичное		Кубическое	
Аппроксимация функции достижимости	Линейная		Квадратичная		Линейная		Линейная	
Номер шага	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
0	$\alpha_1=2$	$\alpha_2=2$	$\alpha_1=2$	$\alpha_2=2$	$\alpha_1=2$	$\alpha_2=2$	$\alpha_1=2$	$\alpha_2=2$
1	0,306	0,0687	0,306	0,0687	0,306	0,0687	0,306	0,0687
2	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$-0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$-0,36 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0
3	$0,478 \cdot 10^{-3}$	$-0,384 \cdot 10^{-3}$	$0,478 \cdot 10^{-3}$	$-0,384 \cdot 10^{-3}$				
4	$-0,875 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	$-0,119 \cdot 10^{-3}$	$-0,387 \cdot 10^{-3}$				
5	$0,405 \cdot 10^{-5}$	$0,207 \cdot 10^{-3}$	0	0				
6	$-0,185 \cdot 10^{-3}$	$0,346 \cdot 10^{-4}$						
7	$0,15 \cdot 10^{-3}$	$-0,185 \cdot 10^{-3}$						
8	$0,6 \cdot 10^{-4}$	$0,636 \cdot 10^{-4}$						
9	$-0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,586 \cdot 10^{-4}$						
10	$-0,122 \cdot 10^{-3}$	$-0,64 \cdot 10^{-4}$						
11	0	0						
	$\alpha_1^{\text{макс}}=256$	$\alpha_2^{\text{макс}}=256$	$\alpha_1^{\text{макс}}=152$	$\alpha_2^{\text{макс}}=44,0$	$\alpha_1^{\text{макс}}=32,9$	$\alpha_2^{\text{макс}}=1,82$	$\alpha_1^{\text{макс}}=38,8$	$\alpha_2^{\text{макс}}=2,60$
Суммарное число шагов безусловной оптимизации	$\Sigma M=8495$		$\Sigma M=2535$		$\Sigma M=819$		$\Sigma M=819$	

б. По найденным коэффициентам аппроксимации пересчитаем значения  $\alpha_\nu$  и  $\lambda_\nu$  так, чтобы  $R^*(C, \lambda)$  была выпукла, а вектор  $C^{*k+1}$  оказался равным нулю. Условия выпуклости получены с учетом (22):

$$d_\nu^k - \alpha_\nu^{k+1} < 0, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Требование совпадения с нулем точки стационарности функции  $R^*(C, \lambda)$  следует из (20):

$$C_\nu^{*k+1} = -(b_\nu^k + \lambda_\nu^{k+1}) / (d_\nu^k - d_\nu^{k+1}) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}.$$

Так как знаменатель в этом выражении отрицателен, то  $\lambda_\nu^{k+1} = -b_\nu^k$ .

Практика расчетов показывает, что целесообразно выбирать  $\alpha_\nu > 0$  при  $\alpha_\nu \geq \alpha_\nu^k$ . Если последнее условие монотонности изменения  $\alpha$  выполнено, то эти параметры нужно рассчитывать по формулам:

$$\alpha_\nu^{k+1} = 1/2(1, 2|d_\nu^k| + d_\nu^k), \quad \nu = \overline{1, m}.$$

### 5. Пример

Рассмотрим результаты применения изложенных выше схем алгоритмов к решению следующей задачи:

максимизировать

$$f_0(x) = -1000 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3$$

при ограничениях

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0,$$

$$f_2(x) = 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0.$$

За критерий эффективности алгоритмов примем число циклов безусловной оптимизации, необходимых для получения решения задачи (2) с заданной точностью, при одинаковых начальных значениях  $x^0$  и  $\alpha^0$ . Для безусловной оптимизации был использован метод Хука — Дживса. Начальная точка  $x_j^0 = 2$  ( $j=1, 2, 3$ ) и начальный шаг  $\partial x_j = 0,2$  ( $j=1, 2, 3$ ) одинаковые для всех схем алгоритмов. Расчеты проводились на ЭВМ «Минск-32». Значения  $x_j^{\text{мин}}$  ( $j=1, 2, 3$ ) вычислялись с точностью  $10^{-6}$ . Конец поиска определялся условием  $C_i^* < 10^{-5}$ ,  $i=1, 2$ . Результаты вычислений для всех рассмотренных схем алгоритмов сведены в табл. 3. В ней приведены начальные значения  $\alpha_i^0$  параметра  $\alpha$  ( $i=1, 2$ ), а также суммарное число шагов поиска  $\sum M$  для всех схем алгоритмов.

Из табл. 3 видно, что методы условной оптимизации с использованием монотонного преобразования целевой функции и линейной аппроксимации функции достижимости с точки зрения принятого критерия более эффективны, чем метод Пауэла и метод с использованием квадратичной аппроксимации функции достижимости.

ПРИЛОЖЕНИЕ †

#### О седловой точке вспомогательной задачи [2]

Пусть  $x^*$  — решение исходной задачи, а  $\lambda^*$  — значение параметра  $\lambda$ , при котором решение вспомогательной задачи  $x^*(\lambda)$  совпадает с  $x^*$ . В предположении, что функции  $F_0$  и  $\Phi$  удовлетворяют условиям (3), (4), справедлива следующая

*Теорема.* Точка  $x^*$ ,  $\lambda^*$  является седловой точкой функции

$$L(x, \lambda) = R(x, \lambda) - F_0(f_0(x^*), \lambda).$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} R(x, \lambda^*) - F_0(f_0(x^*), \lambda^*) &\leq R(x^*, \lambda^*) - F_0(f_0(x^*), \lambda^*) \leq \\ &\leq R(x^*, \lambda) - F_0(f_0(x^*), \lambda). \end{aligned}$$

При этом

$$L(x^*, \lambda^*) = 0.$$

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы о седловой точке функции Лагранжа. Действительно, для любого  $\lambda$  максимум функции  $R$  по  $x \in V_x$  либо достигается на множестве  $D$ , удовлетворяющем условиям  $f(x) = 0$ , либо вне этого множества. В первом случае в силу (4) функция  $\Phi = 0$  и  $R^* = F_0^*$ . Во втором случае  $R^* > F_0^*$ .

Таким образом,

$$\max_{x \in V_x} R(x, \lambda) \geq \max_{x \in V_x} F_0(f_0(x), \lambda) \quad \forall \lambda.$$

Для  $\lambda = \lambda^*$  это неравенство обращается в равенство, причем в силу (3) максимум  $F_0$  на  $D$  соответствует значению  $F_0(f_0(x^*), \lambda)$ . Отсюда разность  $R(x, \lambda) - F_0(f_0(x^*), \lambda)$  имеет в  $x^*, \lambda^*$  седловую точку, причем в этой точке она равна нулю.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Вывод формулы для оценки параметра $\alpha$ при квадратичном штрафе для вспомогательной задачи с монотонным преобразованием целевой функции

Матрица Гессе вспомогательной задачи с монотонным преобразованием целевой функции имеет вид

$$(П.1) \quad \Gamma = \begin{pmatrix} lb_1^2 - \alpha_1 & \dots & lb_1 b_j & \dots & lb_1 b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ lb_i b_1 & \dots & lb_i^2 - \alpha_i^2 & \dots & lb_i b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ lb_m b_1 & \dots & \dots & \dots & lb_m^2 - \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Для различных случаев монотонного преобразования, соответствующих табл. 2, имеем следующее значение  $l$ :

$$F_0 = 1/3 (f_0 - \lambda_0)^3, \quad l = 2(f_0^*(C) - \lambda_0),$$

$$F_0 = 1/2 (f_0 - \lambda_0)^2 \text{ sign}(f_0 - \lambda_0), \quad l = \text{sign}(f_0^*(C) - \lambda_0).$$

Обозначим элемент матрицы Гессе (П.1), стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, через  $a_{ij}$ . Согласно теореме Гершгорина [6], имеем следующую оценку для собственных значений  $\theta_i$  матрицы Гессе с элементами  $a_{ij}$ :

$$|\theta_i - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}|,$$

или в развернутом виде

$$(П.2) \quad a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| \leq \theta_i \leq a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, m}.$$

Симметрическая матрица (П.1) будет отрицательно определенной, если все ее собственные значения  $\theta_i$  отрицательны:

$$(П.3) \quad \theta_i < 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Чтобы гарантировать выполнение условия (П.3), необходимо, чтобы правая граница для  $\theta_i$  в условии (П.2) была отрицательна:

$$(П.4) \quad a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| < 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Подставив значения элементов  $a_{ii}$  и  $a_{ij}$ , соответствующие матрице Гессе (П.1), в неравенство (П.4) и решив его относительно параметров  $\alpha_i$ , получим

$$\alpha_i > lb_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^m |lb_i b_j|, \quad i = \overline{1, m}.$$

Неравенство (П.7) позволяет выбрать параметр  $\alpha$ ; таким образом, чтобы матрица Гессе (П.1) вспомогательной задачи (2) была отрицательно определенной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ласдон Л. С. Оптимизация больших систем. М.: Наука, 1975.
2. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Слабые модифицированные функции Лагранжа и связанные с ними теоремы двойственности. — Экономика и матем. методы, 1979, т. XV, вып. 6, с. 1180–1193.
3. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. — Экономика и матем. методы, 1974, т. X, вып. 3, с. 568–591.
4. Сурис Т. Г., Цирлин А. М. О вычислительных алгоритмах решения задачи нелинейного программирования, основанных на аппроксимации функции достижимости. — Экономика и матем. методы, 1981, т. XVII, вып. 4, с. 671–676.
5. Численные методы условной оптимизации / Под ред. Гилла Ф., Мюррей У. М.: Мир, 1977.
6. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию  
5.III.1981

---

### ALGORITHMS OF NONLINEAR PROGRAMMING WHICH APPROXIMATE THE ACHIEVABILITY FUNCTION

KULIKOVSKIY A. V., SURIS T. G., TSIRLIN A. M.

The possibility of designing algorithms for numerical solution of nonlinear programming problems is considered whereby the relation between the achievability function of the initial problem and of an unconditional optimization problem with a modified goal function is used. The algorithms proceed by succes-size approximation of the achievability function of the initial problem and a choice of goal function parameters in the problem of unconditional optimization such that the maximum of the function is on the set of feasible solutions of the initial problem.