N. Demni, T. Hamdi, A. Souaissi, The Hermitian Jacobi Process: A Simplified Formula for the Moments and Application to Optical Fiber MIMO Channels,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 2020, Volume 54, Issue 4, 37–55

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 4, с. 37–55

УДК 519.2

Эрмитов процесс Якоби: упрощенная формула моментов и приложения к оптоволоконным каналам MIMO[1]

© 2020. Н. Демни, Т. Хамди, А. Суиси

С помощью замены базиса в алгебре симметрических функций мы вычисляем моменты эрмитова процесса Якоби. Расставив члены в строго определенном порядке и подсчитав определитель «почти верхнетреугольной» матрицы, мы получаем формулу моментов, которая значительно проще формулы, выведенной в [8]. В качестве приложения мы рассматриваем эрмитов процесс Якоби как динамическую модель оптоволоконных каналов MIMO и вычисляем его пропускную способность (по Шеннону) для достаточно малых мощностей передатчика. В случае, когда размер эрмитова процесса Якоби больше порядка момента, нашу формулу моментов можно записать как линейную комбинацию сбалансированных обрывающихся ${}_4F_3$-рядов в единице.

DOI: https://doi.org/10.1134/faa3774

§ 1. Мотивация

Эрмитов процесс Якоби был введен в работе [11] в качестве многомерного аналога вещественного процесса Якоби. Это стационарный матричнозначный процесс с распределением, слабо сходящимся к матричному бета-распределению, описывающему унитарный ансамбль Якоби, когда время стремится к бесконечности. Такой ансамбль был использован в статье [6] в качестве случайно-матричной модели для оптоволоконного канала MIMO (multiple input multiple output — с множественными входами и выходами). В [6] были приведены численные данные относительно пропускной способности канала по Шеннону и вероятности сбоя, подтверждающие эффективность матричной модели. С использованием общих фактов об унитарно инвариантных матричных моделях пропускную способность можно выразить через ядро Кристоффеля–Дарбу многочленов Якоби, которое представляет собой одноточечную корреляцию основного процесса собственных значений [15]. Другое выражение было недавно получено в [17] с помощью замечательной формулы моментов для унитарного веса Сельберга [3]. Стратегия, использованная в [3], была частично адаптирована в [8] для эрмитова процесса Якоби, что привело к довольно сложной формуле моментов для этого процесса, в которой не представлялось возможным перейти к пределу при стремящемся к бесконечности размере матриц. Основные ингредиенты, используемые в [8], — это разложение степенных сумм Ньютона по базису функций Шура, детерминантная форма симметрических многочленов Якоби и интегральная форма формулы Бине–Коши (известная как тождество Андреева).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Отдела научных исследований Университета Кассима, грант cba-2019-2-2-I-5394 в 2019 академическом году.

В этой статье мы применяем другой подход к вычислению моментов эрмитова процесса Якоби, основанный на замене базиса в алгебре симметрических функций (с фиксированным числом переменных). Точнее, мы разлагаем степенные суммы Ньютона по базису симметрических многочленов Якоби, пользуясь тем, что последние взаимно ортогональны относительно унитарного веса Сельберга. В результате мы приходим к определителю «почти треугольной» матрицы, который мы выражаем в виде произведения путем преобразования строк. После кропотливой перестановки членов мы получаем формулу моментов, которая значительно проще той, что была получена в [8] (теорема 1). По существу формула из [8] включает в себя три вложенные знакопеременные суммы, а также определитель, элементы которого являются бета-функциями. Насколько нам известно, этот определитель не имеет замкнутой формы, за исключением очень немногих частных случаев. Формула моментов, полученная нами здесь, содержит только две вложенные знакопеременные суммы, слагаемые которых являются отношениями гамма-функций.

В качестве возможного применения нашей формулы мы предлагаем эрмитов процесс Якоби как динамический аналог MIMO канала Якоби, изученного в [6], и вычисляем его пропускную способность по Шеннону для передатчика с антеннами, каждая из которых имеет малую мощность. В связи со свободной теорией вероятностей мы также рассматриваем случай, когда размер эрмитова процесса Якоби больше порядка момента. В этом случае нашу формулу моментов можно записать как линейную комбинацию обрывающихся сбалансированных ${}_4F_3$-гипергеометрических рядов в единице ([1, гл. 3]).

Работа организована следующим образом. Во втором (следующем) параграфе мы кратко рассмотрим конструкцию эрмитова процесса Якоби и полугрупповую плотность[1] соответствующего процесса собственных значений (когда она существует). В третьем параграфе мы сформулируем наш основной результат — теорему 1 — и докажем его. Для удобства чтения мы разобьем доказательство на несколько шагов, которые приведут к искомой формуле моментов. В последнем параграфе мы обсудим применение нашего основного результата к оптоволоконному каналу MIMO и к вычислению предела моментов эрмитова процесса Якоби при стремящемся к бесконечности размеру матриц.

§ 2. Обзор эрмитовых процессов Якоби

Для полноты изложения напомним конструкцию эрмитова процесса Якоби и выражение для полугрупповой плотности соответствующего процесса собственных значений. За дополнительными сведениями мы отсылаем читателя к [11] и [8]. Обозначим через $U(d)$, $d \geqslant 2$, группу комплексных унитарных матриц. Пусть $p, m \leqslant d$ — два целых числа, и пусть $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ есть $U(d)$-значный случайный процесс. Положим

$$X_t \oplus 0 := PY_tQ, \qquad t \geqslant 0,$$

[1] Имеется в виду плотность переходной функции марковской полугруппы. — *Прим. ред.*

где

$$P := \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{m\times m} & 0_{m\times(d-m)} \\ 0_{(d-m)\times m} & 0_{(d-m)\times(d-m)} \end{pmatrix}, \qquad Q := \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{p\times p} & 0_{p\times(d-p)} \\ 0_{(d-p)\times p} & 0_{(d-p)\times(d-p)} \end{pmatrix}$$

— ортогональные проекторы. Другими словами, X — правый верхний угол матрицы Y. Теперь предположим, что Y представляет собой броуновское движение по $U(d)$ с началом в единичной матрице. Тогда процесс

$$J_t := X_t X_t^* = PY_t QY_t^* P, \qquad t \geqslant 0,$$

называется *эрмитовым процессом Якоби* размера $m \times m$ с параметрами (p, q), где $q = d - p$. При $t \to +\infty$ процесс Y_t слабо сходится к унитарной матрице Хаара Y_∞. В статье [4] было доказано, что случайная матрица

$$J_\infty = X_\infty X_\infty^* = PY_\infty QY_\infty^* P$$

имеет распределение, соответствующее унитарному ансамблю Якоби с подходящими параметрами.

Для каждого $n \geqslant 1$ определим n-й момент процесса J_t формулой

$$M_{n,p,m,d}(t) := \mathbb{E}(\mathrm{tr}((J_t)^n))$$

для фиксированного момента времени $t \geqslant 0$; мы будем опускать индексы и писать просто $M_n(t)$. Поскольку матричный процесс Якоби эрмитов, имеем

$$M_n(t) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{m} (\lambda_k(t))^n\right),$$

где $(\lambda_k(t), t \geqslant 0)_{k=1}^m$ — собственные значения матриц $(J_t)_{t\geqslant 0}$ и $\mathbb{E}$ обозначает математическое ожидание в рассматриваемом вероятностном пространстве. Если

$$r := p - m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad s := d - p - m = q - m \geqslant 0,$$

то распределение процесса собственных значений абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^m$. Полугрупповая плотность этого процесса задается билинейным производящим рядом симметрических многочленов Якоби с параметром Джека, равным 1. Точнее, пусть

$$\tau = (\tau_1 \geqslant \dots \geqslant \tau_m \geqslant 0)$$

— разбиение длины не больше m и $(P_k^{r,s})_{k\geqslant 0}$ — последовательность многочленов Якоби, ортонормированных относительно бета-веса:

$$u^r(1-u)^s \mathbf{1}_{[0,1]}(u).$$

Эти многочлены можно определить и через гипергеометрическую функцию Гаусса:

$$P_k^{r,s}(u) := \left[\frac{(2k+r+s+1)\Gamma(k+r+s+1)k!}{\Gamma(r+k+1)\Gamma(s+k+1)}\right]^{1/2} \times \frac{(r+1)_k}{k!}\,{}_2F_1(-k, k+r+s+1, r+1; x).$$

Тогда ортонормированные симметрические многочлены Якоби, соответствующие разбиению τ, определяются формулой

$$P_\tau^{r,s,m}(x_1,\dots,x_m) := \frac{\det(P^{r,s}_{\tau_i - i+m}(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m}}{V(x_1,\dots,x_m)},$$
$$V(x_1,\dots,x_m) := \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(x_i - x_j),$$

если координаты $(x_1,\dots,x_m)$ попарно различны, и по правилу Лопиталя в противном случае. Разложение этих многочленов по базису функций Шура можно найти в [14]. Они образуют ортонормированную систему относительно унитарного веса Сельберга

$$W^{r,s,m}(y_1,\dots,y_m) := [V(y_1,\dots,y_m)]^2 \prod_{i=1}^m y_i^r (1-y_i)^s \mathbf{1}_{0<y_m<\dots<y_1<1}$$

в том смысле, что любые два многочлена $P_\tau^{r,s,m}$, соответствующие разным разбиениям, ортогональны друг другу и норма каждого из них равна единице (см., например, [2, теорема 3.1]). Полугрупповая плотность процесса собственных значений процесса J_t допускает абсолютно сходящееся разложение [9]

$$G_t^{r,s,m}(1^m, y) := \sum_\tau e^{-\nu_\tau t} P_\tau^{r,s,m}(1^m) P_\tau^{r,s,m}(y) W^{r,s,m}(y_1,\dots,y_m),$$

где $1^m := (\underbrace{1,\dots,1}_{m\ \text{раз}})$ и

$$\nu_\tau := \sum_{i=1}^m \tau_i(\tau_i + r + s + 1 + 2(m-i)).$$

Обозначим через $(\widetilde{P}_k^{r,s})_{k\geqslant 0}$ последовательность ортогональных многочленов Якоби

$$\widetilde{P}_k^{r,s}(u) := \frac{(r+1)_k}{k!}\,{}_2F_1(-k, k+r+s+1, r+1; x);$$

тогда $G_t^{r,s,m}(1^m, y)$ можно записать как

$$G_t^{r,s,m}(1^m, y) = \sum_\tau e^{-\nu_\tau t} \prod_{j=1}^m \frac{1}{(\|\widetilde{P}^{r,s}_{\tau_j+m-j}\|_2)^2} \widetilde{P}_\tau^{r,s,m}(1^m)\widetilde{P}_\tau^{r,s,m}(y) W^{r,s,m}(y_1,\dots,y_m), \quad (2.1)$$

где $(\|\widetilde{P}^{r,s}_{\tau_j+m-j}\|_2)^2$ — квадрат L^2-нормы многочлена Якоби от одной переменной и

$$\widetilde{P}^{r,s,m}_{\tau}(x_1,\dots,x_m) := \frac{\det(\widetilde{P}^{r,s}_{\tau_i-i+m}(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant m}}{V(x_1,\dots,x_m)}.$$

Действительно, из тождества Андреева [7, с. 37] вытекает, что многочлены из набора $(\widetilde{P}^{r,s,m}_{\tau})_\tau$ ортогональны относительно унитарного веса Сельберга и что квадрат L^2-нормы каждого $\widetilde{P}^{r,s,m}_{\tau}$ относительно $W^{r,s,m}$ — не что иное, как

$$\prod_{j=1}^{m}(\|P^{r,s}_{\tau_j+m-j}\|_2)^2.$$

С другой стороны, набор многочленов $(\widetilde{P}^{r,s,m}_{\tau})_\tau$ можно перевести в набор симметрических многочленов Якоби $(Q^{r,s,m}_{\tau})_\tau$, рассмотренный в [19], аффинным преобразованием

$$(x_1,\dots,x_m)\in[0,1]^m \mapsto (1-2x_1,\dots,1-2x_m)\in[-1,1]^m;$$

точнее,

$$P^{r,s,m}_{\tau}(x_1,\dots,x_m) = (-2)^{m(m-1)/2}Q^{r,s,m}_{\tau}(1-2x_1,\dots,1-2x_m).$$

Многочлены в наборе $(Q^{r,s,m}_{\tau})_\tau$ обладают свойством зеркальности

$$Q^{r,s,m}_{\tau}(-x_1,\dots,-x_m) = (-1)^{|\tau|}Q^{s,r,m}_{\tau}(x_1,\dots,x_m);$$

они наследуют его от аналогичных многочленов от одной переменной. В самом деле, в случае, когда координаты x различны, это свойство доказывается непосредственной проверкой с помощью детерминантной формы многочлена $Q^{r,s,m}_{\tau}$, а на остальные случаи оно переносится по непрерывности. В частности,

$$P^{r,s,m}_{\tau}(1^m) = (-2)^{m(m-1)/2}Q^{r,s,m}_{\tau}(\underbrace{-1,\dots,-1}_{m\text{ раз}}) = (-1)^{|\tau|}(-2)^{m(m-1)/2}Q^{s,r,m}_{\tau}(1^m).$$

По предложению 7.1 из [19] имеем

$$Q^{s,r,m}_{\tau}(1^m) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(\tau_i+\tau_j+2m-i-j+r+s+1)(\tau_i-\tau_j+j-i) \times \prod_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(\tau_j+m-j+s+1)2^{-(m-j)}}{\Gamma(\tau_j+m-j+1)\Gamma(m-j+s+1)\Gamma(m-j+1)}.$$

В результате мы получаем значение

$$\widetilde{P}^{r,s,m}_{\tau}(1^m) = (-1)^{|\tau|+m(m-1)/2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(\tau_i+\tau_j+2m-i-j+r+s+1)(\tau_i-\tau_j+j-i) \times \prod_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(\tau_j+m-j+s+1)}{\Gamma(\tau_j+m-j+1)\Gamma(m-j+s+1)\Gamma(m-j+1)}, \tag{2.2}$$

которое понадобится нам в дальнейших вычислениях.

§ 3. Основной результат: формула моментов

Пусть $n \geqslant 1$. Напомним, что *крюк* α веса $|\alpha| = n$ — это разбиение вида

$$\alpha = (n-k, 1^k).$$

Напомним также, что на множестве разбиений имеется частичный порядок, который определяется их диаграммами Юнга: $\tau \subseteq \alpha$, если $\tau_i \leqslant \alpha_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant l(\tau) \leqslant l(\alpha)$, где $l(\tau)$ — длина (число ненулевых компонент) разбиения τ. С другой стороны, n-й момент стационарного распределения матрицы J_∞ задается нормированным интегралом[2]

$$\begin{aligned} M_n(\infty) &:= \frac{1}{Z^{r,s,m}} \int \biggl(\sum_{i=1}^m y_i^n\biggr) W^{r,s,m}(y)\,dy \\ &= \frac{1}{m!Z^{r,s,m}} \int_{[0,1]^m} \biggl(\sum_{i=1}^m y_i^n\biggr) [V(y_1,\dots,y_m)]^2 \prod_{i=1}^m y_i^r (1-y_i)^s\,dy, \end{aligned}$$

где

$$Z^{r,s,m} := \int W^{r,s,m}(y)\,dy$$

— интеграл Сельберга. Явное выражение для $M_n(\infty)$ содержится в следствии 2.3 в работе [3]. В этих обозначениях наш основной результат можно сформулировать так:

Теорема 1. *Для любого натурального n n-й момент эрмитова процесса Якоби задается формулой*

$$\begin{aligned} M_n(t) &= M_n(\infty) \\ &\quad + \sum_{\substack{\alpha \text{ — крюк} \\ |\alpha|=n,\ l(\alpha)\leqslant m}} (-1)^{n-\alpha_1} \sum_{\substack{\tau\subseteq\alpha \\ \tau\not\equiv\varnothing}} \frac{e^{-\nu_\tau t}\,\widetilde{V}^{r,s,m}_{\alpha_1,\tau_1} U^{r,s,m}_{l(\alpha),l(\tau)}}{(r+s+\tau_1+2m-l(\tau))(\tau_1+l(\tau)-1)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{V}^{r,s,m}_{\alpha_1,\tau_1} &= \frac{(r+s+2\tau_1+2m-1)}{(\alpha_1-\tau_1)!\,(\tau_1-1)} \\ &\qquad \times \frac{\Gamma(\tau_1+2m+r+s)\Gamma(\alpha_1+m)\Gamma(r+\alpha_1+m)\Gamma(\tau_1+m+s)}{\Gamma(r+s+\alpha_1+\tau_1+2m)\Gamma(r+\tau_1+m)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} U^{r,s,m}_{l(\alpha),l(\tau)} &:= \frac{(2m+r+s+1-2l(\tau))\Gamma(r+m-l(\tau)+1)}{(l(\alpha)-l(\tau))!\,(l(\tau)-1)!\,\Gamma(m-l(\alpha)+1)\Gamma(r+m-l(\alpha)+1)} \\ &\qquad \times \frac{\Gamma(r+s+2m-l(\alpha)-l(\tau)+1)}{\Gamma(m+s-l(\tau)+1)\Gamma(2m+r+s-l(\tau)+1)}. \end{aligned}$$

Остальная часть этого параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Оно содержит громоздкие вычисления, и поэтому мы разобьем доказательство

[2]Как и в случае фиксированного $t > 0$, мы не указываем в обозначениях зависимость стационарных моментов от r, s, m.

на несколько шагов; каждый шаг будет состоять в упрощении выражения для моментов, полученного на предыдущем шаге.

3.1. Замена базиса. Мы начнем с перехода от базиса, состоящего из многочленов Шура, к базису из симметрических многочленов Якоби. В результате мы получим следующую формулу для $M_n(t)$:

Предложение 1. *Для любых* $m, n \geqslant 1$ *и* $t > 0$

$$M_n(t) = \sum_{\substack{\alpha\ -\ \text{крюк} \\ |\alpha|=n,\ l(\alpha)\leqslant m}} (-1)^{n-\alpha_1} \sum_{\tau\subseteq\alpha} e^{-\nu_\tau t} \widetilde{P}_\tau^{r,s,m}(1)$$
$$\times \det\left(\frac{(-(\alpha_i - i + m))_{\tau_j - j + m}}{\Gamma(r+s+\tau_j - j + \alpha_i - i + 2m + 2)}\right)_{i,j=1}^{m}$$
$$\times \prod_{j=1}^{m} \frac{(r+s+2(\tau_j - j + m)+1)\Gamma(r+\alpha_j+m-j+1)\Gamma(r+s+\tau_j-j+m+1)}{\Gamma(r+\tau_j - j + m + 1)}, \tag{3.2}$$

где

$$(-(\alpha_i - i + m))_{\tau_j - j + m} = (-1)^{\tau_j + m - j}\frac{(\alpha_i + m - i)!}{(\alpha_i - \tau_j + j - i)!}\mathbf{1}_{\alpha_i - i \geqslant \tau_j - j}.$$

Доказательство. Напомним, что n-я степенная сумма Ньютона равна (см. [16])

$$p_n(y) := \sum_{i=1}^{m} y_i^n,$$

а многочлен Шура, ассоциированный с разбиением τ длины $l(\tau) \leqslant m$, равен [16]

$$s_\tau(x) := \frac{\det(x_j^{\tau_i - i + m})_{1\leqslant i,j\leqslant m}}{V(x_1, \ldots, x_m)}.$$

Эти симметрические функции связаны следующей формулой из теории представлений (см., например, [16, с. 48]):

$$p_n(y) = \sum_{\substack{\alpha\ -\ \text{крюк} \\ |\alpha|=n,\ l(\alpha)\leqslant m}} (-1)^{n-\alpha_1} s_\alpha(y).$$

Чтобы проинтегрировать сумму Ньютона по полугрупповой плотности (2.1), мы разложим многочлены Шура по базису $(\widetilde{P}_\tau^{r,s,m})_\tau$ из симметрических многочленов Якоби. С этой целью мы применим формулу обращения [12]

$$y^j = \Gamma(r+j+1)\sum_{l=0}^{j} \frac{(-j)_l(r+s+2l+1)\Gamma(r+s+l+1)}{\Gamma(r+l+1)\Gamma(r+s+l+j+2)}\widetilde{P}_l^{r,s}(y)$$

и предложение 3.1 из статьи [18] (формулу замены базиса). В результате мы получим

$$s_\alpha(y) = \prod_{i=1}^{m}\Gamma(r+\alpha_i+m-i+1)\sum_{\mu\subset\alpha}\det(a(\alpha_i - i + m, \mu_j - j + m))_{1\leqslant i,j\leqslant m}\widetilde{P}_\mu^{r,s,m}(y),$$

где использовано обозначение

$$a(\alpha_i - i + m, \mu_j - j + m) := (-(\alpha_i - i + m))_{\mu_j - j + m} \times \frac{(r + s + 2(\mu_j - j + m) + 1)\Gamma(r + s + \mu_j - j + m + 1)}{\Gamma(r + \mu_j - j + m + 1)\Gamma(r + s + \mu_j - j + \alpha_i - i + 2m + 2)}.$$

Интегрируя отображение $y \mapsto p_n(y) G_t^{r,s,m}(1^m, y)$ и применяя теорему Фубини, мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
&\int \left(\sum_{i=1}^m y_i^n\right) \widetilde{P}_\tau^{r,s,m}(y) W^{r,s,m}(y)\, dy \\
&= \frac{1}{m!} \int_{[0,1]^m} \left(\sum_{i=1}^m y_i^n\right) \widetilde{P}_\tau^{r,s,m}(y) [V(y_1, \dots, y_m)]^2 \prod_{i=1}^m y_i^r (1 - y_i)^s\, dy \\
&= \sum_{\substack{\alpha\ —\ \text{крюк} \\ |\alpha| = n,\, l(\alpha) \leqslant m}} (-1)^{n - \alpha_1} \sum_{\mu \subset \alpha} \det(a(\alpha_i - i + m, \mu_j - j + m))_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \\
&\quad \times \frac{1}{m!} \int_{[0,1]^m} \widetilde{P}_\mu^{r,s}(y) \widetilde{P}_\tau^{r,s,m}(y) [V(y_1, \dots, y_m)]^2 \prod_{i=1}^m y_i^r (1 - y_i)^s\, dy \\
&= \sum_{\substack{\alpha\ —\ \text{крюк} \\ |\alpha| = n,\, l(\alpha) \leqslant m}} (-1)^{n - \alpha_1} \sum_{\tau \subset \alpha} \prod_{j=1}^m (\|P_{\tau_j + m - j}^{r,s}\|_2)^2 \\
&\quad \times \det(a(\alpha_i - i + m, \tau_j - j + m))_{1 \leqslant i,j \leqslant m};
\end{aligned}$$

последнее равенство вытекает из тождества Андреева, которое мы уже применяли выше. Отсюда получается требуемая формула моментов ввиду разложения (2.1). □

3.2. Почти верхнетреугольная матрица. Для простоты мы введем обозначения

$$n_i = \alpha_i + m - i, \qquad m_i = \tau_i + m - i.$$

С помощью (2.2) мы можем записать формулу моментов (3.2) в более явной форме

$$\begin{aligned}
M_n(t) = &\sum_{\substack{\alpha\ —\ \text{крюк} \\ |\alpha| = n,\, l(\alpha) \leqslant m}} (-1)^{n - \alpha_1} \sum_{\tau \subseteq \alpha} e^{-\nu_\tau t} \\
&\times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j)(-1)^{|\tau| + m(m-1)/2} \\
&\times \prod_{j=1}^m \frac{(r + s + 2m_j + 1)\Gamma(r + n_j + 1)\Gamma(m_j + s + 1)\Gamma(r + s + m_j + 1)}{\Gamma(r + m_j + 1)\Gamma(m_j + 1)\Gamma(m - j + s + 1)\Gamma(m - j + 1)} \\
&\times \det\left(\frac{(-n_i)_{m_j}}{\Gamma(r + s + n_i + m_j + 2)}\right)_{i,j=1}^m.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Поскольку $\alpha_i = \tau_j$, если $i, j > l(\alpha)$ и $2 \leqslant i, j \leqslant l(\tau)$, имеем $n_i < m_j$ для $i > j$. Точно так же, из того, что $1 = \alpha_i > \tau_j = 0$ при $l(\tau)+1 \leqslant i, j \leqslant l(\alpha)-1$, вытекает то же заключение для $i > j+1$. Эти элементарные наблюдения показывают, что выписанная выше матрица «почти верхнетреугольная».

Лемма 1. *Для любого крюка α веса $n \geqslant 1$ и длины $l(\alpha) \leqslant m$ и любого $\tau \subset \alpha$ пусть*

$$b_{\alpha,\tau}(i,j) := \frac{(-n_i)_{m_j}}{\Gamma(r+s+n_i+m_j+2)}, \qquad B_{\alpha,\tau} := (b_{\alpha,\tau}(i,j))_{i,j=1}^m.$$

Тогда $b_{\alpha,\tau}(i,j) = 0$ для $i \geqslant j+2$ и верны следующие утверждения:

- *если $l(\alpha) < l(\tau)+2$, то матрица $B_{\alpha,\tau}$ верхнетреугольная*;
- *в противном случае $b_{\alpha,\tau}(j+1,j) = 0$, если $j \geqslant l(\alpha)$ или $j \leqslant l(\tau)$, и*

$$b_{\alpha,\tau}(j+1,j) = \frac{(-1)^{m-j}(m-j)!}{\Gamma(r+s+2m-2j+2)}, \qquad l(\tau)+1 \leqslant j \leqslant l(\alpha)-1,\ \tau \neq \varnothing.$$

Доказательство. Пусть $i > j \geqslant 1$. Тогда $1-i < \tau_j - j$ и $\alpha_i - i \leqslant 1-i$, за исключением случая, когда $\tau_j = 0$ и $i = j+1$. Значит, $(-(\alpha_i - i + m))_{\tau_j - j + m} = 0$ в следующих трех случаях:

(1) $\alpha_i = 0$;
(2) $i \geqslant j+2$;
(3) $i = j+1$ и $\tau_j \geqslant 1$.

В частности, матрица $B_{\alpha,\tau}$ верхнетреугольная, если $l(\alpha) = l(\tau)$ или $l(\alpha) = l(\tau)+1$, поскольку тогда $\alpha_i \leqslant \tau_j$. В противном случае, если $l(\alpha) \geqslant l(\tau)+2$, то $b_{\alpha,\tau}(j+1,j) = 0$ для тех j, которые не удовлетворяют неравенствам $l(\tau)+1 \leqslant j \leqslant l(\alpha)-1$; для тех j, для которых эти неравенства выполнены, имеем

$$\alpha_{j+1} = 1 > \tau_j = 0 \implies n_{j+1} = m_j = m - j.$$

3.3. Дальнейшие упрощения. Согласно лемме 1, выражение (3.3) можно расписать так:

$$\begin{aligned} M_n(t) = & \sum_{\substack{\alpha \text{ — крюк} \\ |\alpha|=n,\ l(\alpha)\leqslant m}} (-1)^{n-\alpha_1} \sum_{\tau \subseteq \alpha} \frac{e^{-\nu_\tau t}}{(\alpha_1 - \tau_1)!} \\ & \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j) \prod_{j=1}^{l(\tau)} \frac{n_j!}{\Gamma(r+s+n_j+m_j+2)} \\ & \times \det\left(\frac{n_i!}{(n_i - m_j)!\,\Gamma(r+s+n_i+m_j+2)}\right)_{\substack{j=l(\tau)+1,\dots,l(\alpha), \\ i \leqslant j+1}} \\ & \times \prod_{j=l(\alpha)+1}^{m} \frac{n_j!}{\Gamma(r+s+2m_j+2)} \\ & \times \prod_{j=1}^{m} \frac{(r+s+2m_j+1)\Gamma(r+n_j+1)\Gamma(m_j+s+1)\Gamma(r+s+m_j+1)}{\Gamma(r+m_j+1)\Gamma(m_j+1)\Gamma(m-j+s+1)\Gamma(m-j+1)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где считается, что пустой определитель и произведение с пустым множеством сомножителей равны 1. Это выражение можно существенно упростить и получить выражение, в котором множители, соответствующие индексам $l(\alpha)+1 \leqslant i, j \leqslant m$, сокращаются. С этой целью удобно выделить вклад пустого разбиения, которое соответствует стационарному режиму $t \to +\infty$.

Следствие 1. *Формула моментов* (3.4) *приводится к виду*

$$\begin{aligned}
M_n(t) = M_n(\infty) + \sum_{\substack{\alpha \text{ — крюк} \\ |\alpha|=n,\ l(\alpha)\leqslant m}} (-1)^{n-\alpha_1} \\
\times \sum_{\substack{\tau\subseteq\alpha \\ \tau\neq\varnothing}} \frac{e^{-\nu_\tau t}}{(r+s+\tau_1+2m-l(\tau))(\tau_1+l(\tau)-1)} V^{r,s,m}_{\alpha_1,\tau_1} \\
\times \prod_{i=2}^{l(\tau)} \frac{(m-i+1)(m-i+s+1)}{(2m-i-l(\tau)+r+s+2)(1+l(\tau)-i)} \prod_{j=l(\tau)+1}^{l(\alpha)} (m-j+1)(r+m-j+1) \\
\times \det\left(\frac{\Gamma(r+s+2(m-j)+2)}{(n_i-m_j)!\,\Gamma(r+s+n_i+m_j+2)}\right)_{\substack{j=l(\tau)+1,\dots,l(\alpha), \\ i\leqslant j+1}},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где для непустых крюков $\tau \subseteq \alpha$ использовано обозначение

$$\begin{aligned}
V^{r,s,m}_{\alpha_1,\tau_1} := \frac{(r+s+2\tau_1+2m-1)}{(\alpha_1-\tau_1)!\,(\tau_1-1)!} \\
\times \frac{\Gamma(\tau_1+2m+r+s)\Gamma(\alpha_1+m)\Gamma(r+\alpha_1+m)\Gamma(\tau_1+m+s)}{\Gamma(r+s+\alpha_1+\tau_1+2m)\Gamma(m)\Gamma(r+\tau_1+m)\Gamma(m+s)}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Доказательство. Мы будем рассматривать только крюки τ длины $l(\tau) \geqslant 1$ и проведем доказательство в три шага. На первом шаге мы преобразуем произведение:

$$\begin{aligned}
\prod_{l(\alpha)+1\leqslant i<j\leqslant m} (m_i+m_j+r+s+1)(m_i-m_j) \\
= \prod_{i=l(\alpha)+1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} (2m-i-j+r+s+1)(j-i) \\
= \prod_{i=l(\alpha)+1}^{m-1} \Gamma(m-i+1)(m-i+r+s+1)_{m-i} \\
= \prod_{i=l(\alpha)+1}^{m} \frac{\Gamma(m-i+1)\Gamma(2m-2i+r+s+1)}{\Gamma(m-i+r+s+1)}.
\end{aligned}$$

Из того, что $n_j = m_j = m - j$ для $j \geqslant l(\alpha) + 1$, следует, что

$$\prod_{l(\alpha)+1 \leqslant i<j \leqslant m} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j) \prod_{j=l(\alpha)+1}^{m} \frac{n_j!}{\Gamma(r+s+2m_j+2)} \times \frac{(r+s+2m_j+1)\Gamma(r+n_j+1)\Gamma(m_j+s+1)\Gamma(r+s+m_j+1)}{\Gamma(r+m_j+1)\Gamma(m_j+1)\Gamma(m-j+s+1)\Gamma(m-j+1)}$$

равно 1. На втором шаге мы расщепляем произведение

$$\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant l(\alpha) \\ i+1 \leqslant j \leqslant m}} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j)$$

на два произведения

$$\prod_{i=l(\tau)+1}^{l(\alpha)} \prod_{j=i+1}^{m} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j)$$

и

$$\prod_{i=1}^{l(\tau)} \prod_{j=i+1}^{m} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j).$$

Первое произведение можно записать как

$$\prod_{i=l(\tau)+1}^{l(\alpha)} \prod_{j=i+1}^{m} (2m - i - j + r + s + 1)(j - i) = \prod_{i=l(\tau)+1}^{l(\alpha)} \frac{\Gamma(m-i+1)\Gamma(2m-2i+r+s+1)}{\Gamma(m-i+r+s+1)}. \quad (3.7)$$

Второе, в свою очередь, расщепляется на два произведения

$$\prod_{1 \leqslant i<j \leqslant l(\tau)} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j) = \prod_{i=1}^{l(\tau)} \frac{\Gamma(\tau_i + 2m - 2i + r + s + 2)\Gamma(\tau_i + l(\tau) - i)}{\Gamma(\tau_i + 2m - i - l(\tau) + r + s + 2)\Gamma(\tau_i)},$$

$$\prod_{i=1}^{l(\tau)} \prod_{j=l(\tau)+1}^{m} (m_i + m_j + r + s + 1)(m_i - m_j) = \prod_{i=1}^{l(\tau)} \frac{\Gamma(\tau_i + 2m - i - l(\tau) + r + s + 1)\Gamma(\tau_i + m - i + 1)}{\Gamma(\tau_i + m - i + r + s + 1)\Gamma(\tau_i + l(\tau) - i + 1)},$$

откуда получаем

$$\prod_{i=1}^{l(\tau)}\prod_{j=i+1}^{m}(m_i+m_j+r+s+1)(m_i-m_j)$$
$$=\prod_{i=1}^{l(\tau)}\frac{\Gamma(\tau_i+2m-2i+r+s+2)\Gamma(m_i+1)}{(\tau_i+2m-i-l(\tau)+r+s+1)(\tau_i+l(\tau)-i)\Gamma(\tau_i)\Gamma(m_i+r+s+1)}\,.$$

Поскольку $n_j=1+m-j=m_j+1$ для $l(\tau)+1\leqslant j\leqslant l(\alpha)$, с помощью выражения (3.7) мы можем привести произведение

$$\Bigg[\prod_{i=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}\prod_{j=i+1}^{m}(2m-i-j+r+s+1)(j-i)\Bigg]$$
$$\times\prod_{j=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}\frac{(r+s+2m_j+1)\Gamma(n_j+1)\Gamma(r+n_j+1)\Gamma(m_j+s+1)\Gamma(r+s+m_j+1)}{\Gamma(r+m_j+1)\Gamma(m_j+1)\Gamma(m-j+s+1)\Gamma(m-j+1)},$$

к виду

$$\prod_{j=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}\Gamma(r+s+2(m-j)+2)(m-j+1)(r+m-j+1). \tag{3.8}$$

Кроме того, если $2\leqslant j\leqslant l(\tau)$, то $n_j=m_j=1+m-j$, откуда

$$\Bigg[\prod_{i=2}^{l(\tau)}\prod_{j=i+1}^{m}(m_i+m_j+r+s+1)(m_i-m_j)\Bigg]$$
$$\times\prod_{i=2}^{l(\tau)}\frac{(r+s+2m_j+1)\Gamma(r+n_j+1)\Gamma(n_j+1)\Gamma(m_j+s+1)\Gamma(r+s+m_j+1)}{\Gamma(r+s+n_j+m_j+2)\Gamma(r+m_j+1)\Gamma(m_j+1)\Gamma(m-j+s+1)\Gamma(m-j+1)}$$
$$=\prod_{i=2}^{l(\tau)}\frac{(m-i+1)(m-i+s+1)}{(2m-i-l(\tau)+r+s+2)(1+l(\tau)-i)}\,. \tag{3.9}$$

Наконец, вклад членов, соответствующих (α_1,τ_1), равен

$$\frac{r+s+2\tau_1+2m-1}{r+s+\tau_1+2m-l(\tau)}$$
$$\times\frac{\Gamma(\alpha_1+m)\Gamma(r+\alpha_1+m)\Gamma(\tau_1+m+s)\Gamma(\tau_1+2m+r+s)}{\Gamma(r+s+\alpha_1+\tau_1+2m)\Gamma(m)\Gamma(r+\tau_1+m)\Gamma(m+s)\Gamma(\tau_1)(\tau_1+l(\tau)-1)}\,. \tag{3.10}$$

Собирая вместе (3.8), (3.9) и (3.10) и принимая во внимание (3.4), мы получаем требуемое выражение. □

3.4. Вспомогательный определитель: конец доказательства. В этом разделе мы завершим доказательство теоремы 1 после того, как выразим определитель подматрицы

$$(b_{\alpha,\tau}(i,j))_{i,j=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}$$

(в случае ее непустоты) в форме произведения. Это выражение приведено в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть τ — крюк длины $l(\tau)\geqslant 1$, и пусть $\alpha\supset\tau$ — крюк длины $l(\alpha)\geqslant l(\tau)+1$. Тогда*

$$\det\left(\frac{\Gamma(r+s+2(m-j)+2)}{(n_i-m_j)!\,\Gamma(r+s+n_i+m_j+2)}\right)_{\substack{j=l(\tau)+1,\dots,l(\alpha),\\ i\leqslant j+1}}
= \frac{1}{(l(\alpha)-l(\tau))!}\prod_{j=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}\frac{1}{r+s+2m-l(\tau)+1-j}\,.$$

Доказательство. Если $l(\alpha)\geqslant l(\tau)+1\geqslant 2$, то $\alpha_i=1$ и $n_i=m-i+1=m_i+1$, так что

$$\det\left(\frac{\Gamma(r+s+2(m-j)+2)}{(n_i-m_j)!\,\Gamma(r+s+n_i+m_j+2)}\right)_{\substack{j=l(\tau)+1,\dots,l(\alpha),\\ i\leqslant j+1}}
= \det\left(\frac{\Gamma(r+s+2(m-j)+2)}{(j-i+1)!\,\Gamma(r+s+2m-i-j+3)}\right)_{\substack{j=l(\tau)+1,\dots,l(\alpha),\\ i\leqslant j+1}}.$$

Положим

$$N:=r+s+2m+2,\qquad L:=l(\alpha)-l(\tau);$$

для $i,j\in\{l(\tau)+1,\dots,l(\alpha)\}$ положим также

$$a_{i-l(\tau),j-l(\tau)}:=\frac{\Gamma(N-2j)}{(j-i+1)!\,\Gamma(N-i-j+1)}\mathbf{1}_{\{i\leqslant j+1\}}.$$

Нам нужно вычислить определитель

$$\det[a_{k,l}]_{k,l=1}^{L}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1L}\\ 1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2L}\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{LL}\end{vmatrix},$$

где

$$a_{kk}=\frac{1}{N-2k-2l(\tau)},\qquad k\in\{1,\dots,L\}.$$

Преобразуя строки по правилу

$$R_2\longrightarrow R_2-\frac{1}{a_{11}}R_1,$$

мы получаем

$$\det[a_{k,l}]_{k,l=1}^{L} = \frac{1}{N-2l(\tau)-2}\begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & \dots & a'_{2L} \\ 1 & a'_{33} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{LL} \end{vmatrix},$$

где

$$a'_{kl} = \begin{cases} a_{kl} - a_{(k-1)l}/a_{11}, & \text{если } k=2, \\ a_{kl} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

или, в более явной форме,

$$\begin{aligned} a'_{2l} &= \frac{\Gamma(N-2l(\tau)-2l)}{l(N-2l(\tau)-l-1)(l-2)!\Gamma(N-2l(\tau)-l-2)} \\ &= \frac{1}{l(N-2l(\tau)-l-1)}a_{3l}, \qquad l \geqslant 2. \end{aligned}$$

В частности,

$$a'_{22} = \frac{1}{2(N-2l(\tau)-3)}, \qquad a'_{23} = \frac{1}{3(N-2l(\tau)-4)(N-2l(\tau)-6)}.$$

Теперь преобразуем строки по правилу

$$R_3 \longrightarrow R_3 - \frac{1}{a_{11}}R_2,$$

В результате третья строка матрицы примет вид

$$\frac{\Gamma(N-2l(\tau)-2l)!}{l(N-2l(\tau)-l-1)(l-3)!\,\Gamma(N-2l(\tau)-l-3)} \\ = \frac{1}{l(N-2l(\tau)-l-1)}\,a_{4l}, \qquad l \geqslant 3.$$

Итерируя описанные выше операции над строками, получаем

$$\begin{aligned} \det[a_{k,l}]_{k,l=1}^{L} &= \prod_{k=1}^{L}\frac{1}{k(N-2l(\tau)-k-1)} \\ &= \frac{1}{(l(\alpha)-l(\tau))!}\prod_{k=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}\frac{1}{r+s+2m-l(\tau)+1-k}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Замечание. Определитель, вычисленный в предыдущей лемме, можно записать так:

$$\prod_{j=1}^{l(\alpha)-l(\tau)} \Gamma(r+s+2m-2l(\tau)-2j+2) \\ \times \det\left(\frac{1}{(j-i+1)!\,\Gamma(r+s+2m-2l(\tau)+2-i-j)!}\right)_{i,j=1}^{l(\alpha)-l(\tau)};$$

для $j-i+1<0$ мы полагаем $(j-i+1)! = \infty$. С другой стороны, для любых A и L_i, $1 \leqslant i \leqslant L$, выполнено следующее тождество (достаточно положить $B=2$ в формуле (3.13) из [13, теорема 26]:

$$\det\left(\frac{1}{(L_i+j)!\,(A+L_i-j)!}\right)_{i,j=1}^{L} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant L}(L_i-L_j)\prod_{i=1}^{L}\frac{(A-2i+1)_{i-1}}{(L_i+L)!\,(L_i+A-1)!}.$$

Полагая $L_i=-i+1$ и $A=r+s+2m-2l(\tau)+1$, вспоминая, что $L=l(\alpha)-l(\tau)$, и производя упрощения, мы получаем другое доказательство предыдущей леммы. Авторы благодарны рецензенту за это замечание.

Конец доказательства основного результата. С помощью леммы 2 формулу (3.5) можно записать в виде

$$M_n(t) = M_n(\infty) + \sum_{\substack{\alpha\ —\ \text{крюк}\\ |\alpha|=n,\ l(\alpha)\leqslant m}} (-1)^{n-\alpha_1} \\ \times \sum_{\substack{\tau\subseteq\alpha\\ \tau\neq\varnothing}} \frac{e^{-\nu_\tau t}V^{r,s,m}_{\alpha_1,\tau_1}}{(r+s+\tau_1+2m-l(\tau))(\tau_1+l(\tau)-1)(l(\alpha)-l(\tau))!\,(l(\tau)-1)!} \\ \times \prod_{i=2}^{l(\tau)}\frac{(m-i+1)(m-i+s+1)}{(2m-i-l(\tau)+r+s+2)}\prod_{j=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}\frac{(m-j+1)(r+m-j+1)}{r+s+2m-l(\tau)+1-j}.$$

Теперь выразим через гамма-функцию произведения в правой части:

$$\prod_{i=2}^{l(\alpha)}(m-i+1) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-l(\alpha)+1)},$$

$$\prod_{i=2}^{l(\tau)}\frac{(m-i+s+1)}{(2m-i-l(\tau)+r+s+2)} \\ = \frac{\Gamma(m+s)\Gamma(2m+r+s+2-2l(\tau))}{\Gamma(m+s+1-l(\tau))\Gamma(2m+r+s+1-l(\tau))},$$

$$\prod_{j=l(\tau)+1}^{l(\alpha)}\frac{(r+m-j+1)}{r+s+2m-l(\tau)+1-j} \\ = \frac{\Gamma(m+r+1-l(\tau))\Gamma(2m+r+s+1-l(\tau)-l(\alpha))}{\Gamma(m+r+1-l(\alpha))\Gamma(2m+r+s+1-2l(\tau))}.$$

Наконец, применяя (3.6), мы получаем (3.1). Теорема 1 доказана. □

Замечание. Напомним наши обозначения

$$r = p - m, \qquad s = d - p - m = q - m.$$

Имеем

$$\widetilde{V}^{r,s,m}_{\alpha_1,\tau_1} = \frac{(d+2\tau_1-1)\Gamma(d+\tau_1)\Gamma(\alpha_1+m)\Gamma(p+\alpha_1)\Gamma(q+\tau_1)}{(\alpha_1-\tau_1)!\,\Gamma(d+\alpha_1+\tau_1)\Gamma(p+\tau_1)\Gamma(\tau_1)}$$

и

$$U^{r,s,m}_{l(\alpha),l(\tau)} := \frac{d+1-2l(\tau)}{(l(\alpha)-l(\tau))!\,(l(\tau)-1)!} \times \frac{\Gamma(d-l(\alpha)-l(\tau)+1)\Gamma(p-l(\tau)+1)}{\Gamma(m-l(\alpha)+1)\Gamma(p-l(\alpha)+1)\Gamma(q-l(\tau)+1)\Gamma(d-l(\tau)+1)}.$$

§ 4. Дальнейшие перспективы

До сих пор мы вычисляли моменты эрмитова процесса Якоби. В этом параграфе мы обсудим два направления, которые, по нашему мнению, заслуживают развития в будущем. Первое направление — это возможные применения к оптоволоконным каналам MIMO в системах связи, меняющихся во времени. Второе направление скорее мотивировано применением случайных матриц в свободной теории вероятностей. Точнее, маргинальное распределение эрмитова процесса Якоби в любой фиксированный момент времени $t > 0$ сильно сходится при $m \to \infty$ к так называемому свободному процессу Якоби [5], а моменты спектральной меры этого процесса в случае равных проекций были определены в [10]. Было бы весьма интересно определить предел матрицы $M_n(t)$ при $m \to \infty$ (после перемасштабирования параметров $r = r(m)$, $s = s(m)$ и $d = d(m)$, чтобы получился нетривиальный предел) с целью обобщения и нового вывода выражения, полученного в [10]. Имея в виду эти задачи, мы предположим, что $m \geqslant n$ (или что m достаточно велико) и запишем формулу моментов как линейную комбинацию обрывающихся сбалансированных ${}_4F_3$-рядов в единице. Хотя к этим гипергеометрическим рядам применимо преобразование Уиппла (см., например, [1, теорема 3.3.3]), нам не удалось вывести для него замкнутую формулу, которая, несомненно, открыла бы путь к исследованию предела $M_n(t)$ при $m \to \infty$.

4.1. Применение к оптоволоконным каналам MIMO. Авторы статьи [6] использовали унитарный ансамбль Якоби для моделирования оптоволоконного канала MIMO. Фактически передаточная матрица этой модели является усечением унитарной матрицы, распределенной по мере Хаара, и отражает ситуацию, когда используется только часть режимов волокна. Если мы дополнительно учтем изменение передаточной матрицы во времени, то естественным динамическим кандидатом для моделирования оптоволоконного канала MIMO с приемником, содержащим m антенн, и передатчиком, содержащим p антенн, станет усечение размера $m\times p$ унитарного броуновского движения размера $d\times d$. В такой модели статистическое поведение канала определяется собственными значениями эрмитова процесса Якоби. В частности, унитарная инвариантность процесса J_t для фиксированного момента времени t означает, что пропускная способность канала по Шеннону определяется выражением (мы предполагаем, что гауссовский шум центрирован и имеет единичную матрицу ковариаций [20])

$$C_t(m,p,d,\rho) := \mathbb{E}\biggl[\log\det\biggl(\mathrm{Id}_{m\times m} + \frac{\mathcal{P}}{p}J_t\biggr)\biggr],$$

где $\mathcal{P}$ — общая мощность передатчика и $\rho := \mathcal{P}/p$. Если $\rho \leqslant 1$, то выражение для пропускной способности допускает разложение

$$\begin{aligned} C_t(m,p,d,\rho) &:= \mathbb{E}\biggl[\sum_{k=1}^{m}\log\biggl(1+\rho\lambda_k\biggr)\biggr] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\rho)^n}{n}M_n(t) \\ &= C_\infty(m,p,d,\rho) \\ &\quad + \sum_{\substack{\alpha\text{ — крюк}\\ 1\leqslant l(\alpha)\leqslant m}}\sum_{\substack{\tau\subseteq\alpha\\ \tau\neq\varnothing}}\frac{(-1)^{\alpha_1}\rho^{|\alpha|}}{|\alpha|}\,\frac{e^{-\nu_\tau t}\,\widetilde{V}^{r,s,m}_{\alpha_1,\tau_1}U^{r,s,m}_{l(\alpha),l(\tau)}}{(r+s+\tau_1+2m-l(\tau))(\tau_1+l(\tau)-1)}, \end{aligned}$$

где $C_\infty(m,p,d,\rho)$ — пропускная способность канала, выведенная с помощью унитарного ансамбля Якоби ([6], [17]). Условие $\rho\leqslant 1$ здесь нужно лишь для того, чтобы разложить логарифм в степенной ряд. В будущем мы уточним выражение для $C_t(m,p,d,\rho)$ и избавимся от этого условия.

4.2. Предел при больших m. Обращая порядок суммирования в (3.1), мы зафиксируем крюк

$$\tau = (h-j, 1^j), \qquad 0\leqslant j\leqslant h-1,$$

веса $1\leqslant h = |\tau| \leqslant n$, а затем произведем суммирование по крюкам

$$\alpha = (n-k, 1^k), \qquad j\leqslant k\leqslant j+n-h,$$

веса n, содержащим τ. Выделяя слагаемые, зависящие только от α, мы приходим к знакопеременной сумме

$$\sum_{k=j}^{j+n-h}\frac{(-1)^k\Gamma(n-k+m)\Gamma(p+n-k)\Gamma(d-k-j-1)}{(n-h+j-k)!\,(k-j)!\,\Gamma(m-k)\Gamma(p-k)\Gamma(d+n-k+h-j)}\,.$$

Заменой индекса $k\mapsto n-h+j-k$ мы преобразуем эту сумму к виду

$$\begin{aligned}&(-1)^{n-h+j}\\ &\times\sum_{k=0}^{n-h}\frac{(-1)^k\Gamma(h-j+m+k)\Gamma(p+h-j+k)\Gamma(d-n+h-2j-1+k)}{k!\,(n-h-k)!\,\Gamma(m+h-n-j+k)\Gamma(p+h-n-j+k)\Gamma(d+k+2h-2j)}\,.\end{aligned}$$

С точностью до множителей — значений гамма-функции, не зависящих от k, эту сумму можно представить в форме обрывающегося гипергеометрического ряда ${}_4F_3$ в единице:

$$\frac{(-1)^{n-h+j}\Gamma(h-j+m)\Gamma(p+h-j)\Gamma(d-n+h-2j-1)}{(n-h)!\,\Gamma(d+2h-2j)\Gamma(m+h-n-j)\Gamma(p+h-n-j))} \\ \times {}_4F_3\left(\begin{matrix}-(n-h), m+h-j, p+h-j, d-n+h-2j-1;\\ m-n+h-j, p-n+h-j, d+2h-2j;\end{matrix}\,1\right),$$

причем этот ряд сбалансирован (единица в сумме с верхними параметрами дает сумму нижних).

Литература

[1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] C. Balderrama, P. Graczyk, W. O. Urbina, *A formula for polynomials with Hermitian matrix argument*, Bull. Sci. Math., **129**:6 (2005), 486–500.

[3] C. Carré, M. Deneufchatel, J.-G. Luque, P. Vivo, *Asymptotics of Selberg-like integrals: The unitary case and Newton's interpolation formula*, J. Math. Phys., **51**:12 (2010), 123516.

[4] B. Collins, *Product of random projections, Jacobi ensembles and universality problems arising from free probability*, Probab. Theory Related Fields, **133**:3 (2005), 315–344.

[5] B. Collins, A. Dahlqvist, T. Kemp, *The spectral edge of unitary Brownian motion*, Probab. Theory Related Fields, **170**:1–2 (2018), 49–93.

[6] R. Dar, M. Feder, M. Shtaif, *The Jacobi MIMO channel*, Information Theory, IEEE Transaction, **59**:4 (2013), 2426–2441.

[7] P. Deift, D. Gioev, *Random Matrix Theory: Invariant Ensembles and Universality*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 18, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, NY; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[8] L. Deleaval, N. Demni, *Moments of the Hermitian matrix Jacobi process*, J. Theoret. Probab., **31**:3 (2018), 1759–1778.

[9] N. Demni, *β-Jacobi processes*, Adv. Pure Appl. Math, **1**:3 (2010), 325–344.

[10] N. Demni, T. Hamdi, *Inverse of the flow and moments of the free Jacobi process associated with one projection*, Random Matrices: Theory Appl., **7**:2 (2018).

[11] Y. Doumerc, *Matrices aléatoires, processus stochastiques et groupes de réflexions*, Ph. D. Thesis, Paul Sabatier Univ, 2005; https://perso.math.univ-toulouse.fr/ledoux/files/2013/11/PhD-thesis.pdf

[12] J. Koekoek, R. Koekoek, *The Jacobi inversion formula*, Complex Variables Theory Appl., **39**:1 (1999), 1–18.

[13] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus. The Andrews Festschrift (Maratea*, 1998), Sém. Lothar. Combin, **42** (1999), Art. B42q.

[14] M. Lassalle, *Polynômes de Jacobi généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris, **312**, Série I (1991), 425–428.

[15] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, Boston, MA, 1991.

[16] I. G. MacDonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Math. Monographs, Oxford, 1995.

[17] A. Nafkha, N. Demni, *Closed-form expressions of ergodic capacity and MMSE achievable sum rate for MIMO Jacobi and Rayleigh fading channels*, arXiv: 1511.06074.

[18] G. Olshanski, *Laguerre and Meixner orthogonal bases in the algebra of symmetric functions*, Internat. Math. Res. Notices, 2012, no. 16, 3615–3679.

[19] Г. И. Ольшанский, А. А. Осиненко, *Многомерные многочлены Якоби и интеграл Сельберга*, Функц. анализ и его прил., **46**:4 (2012), 31–50.

[20] I. E. Telatar, *Capacity of multi-antenna gaussian channels*, European Transactions on Telecommunications, **10** (1999), 585–595.

Н. Демни
Institut de Mathématiques de Marseille (I2M, UMR 7373), Aix-Marseille Université–Centre National de la Recherche Scientifique, Marseille, France
E-mail: nizar.demni@univ-amu.fr

Т. Хамди
Department of Management Information Systems,
College of Business Management,
Qassim University, Ar Rass, Saudi Arabia
Laboratoire d'Analyse Mathématiques et Applications
LR11ES11, Université de Tunis El-Manar, Tunisie
E-mail: t.hamdi@qu.edu.sa

А. Суиси
Department of Accounting, College of Business
Management, Qassim University,
Ar Rass, Saudi Arabia
Preparatory Institute for Scientific and Technical
Studies, Carthage University, Tunis, Tunisia
E-mail: a.souaissi@qu.edu.sa

Поступила в редакцию
24 марта 2020
После доработки
11 июня 2020
Принята к публикации
17 июня 2020