Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2023. Том 64, № 6

УДК 512.542

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ $\mathrm{Lim}(N)$

Н. М. Сучков, А. А. Шлепкин

Аннотация. Пусть G — группа всех ограниченных подстановок множества натуральный чисел N. Доказано, что каждая счетная локально конечная группа изоморфна некоторой подгруппе группы G.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.615

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, локально конечная группа, регулярное представление.

1. Введение

Через $S(N)$ будем обозначать группу всех подстановок множества натуральных чисел N. Напомним, что *носителем подстановки* $g \in S(N)$ называется множество

$$\mathrm{supp}(g) = \{\alpha \mid \alpha \in N,\ \alpha^g \neq \alpha\}.$$

Подстановки с конечными носителями называются *финитарными* и образуют счетную локально конечную группу $\mathrm{Fin}(N)$. Далеко не каждая счетная локально конечная группа изоморфна подгруппе этой группы. В [1] установлено, в частности, что $\mathrm{Fin}(N)$ не содержит квазициклическую p-группу при любом простом p. Общая задача изучения подгрупп группы $\mathrm{Fin}(N)$ поставлена Д. А. Супруненко в [2].

Определение 1. Подстановка $g \in S(N)$ называется *ограниченной*, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Все такие подстановки образуют смешанную группу $G = \mathrm{Lim}(N)$. Очевидно, $\mathrm{Fin}(N)$ — нормальная подгруппа группы G. Хорошо известно, что группа $\mathrm{Fin}(N)$ порождается транспозициями вида $t_\alpha = (\alpha \quad \alpha+1)$, $\alpha \in N$. В [3] доказано, что группа G порождается инволюциями, в разложении которых на независимые транспозиции участвуют только транспозиции вида t_α и при этом $G = AB$, где A, B — локально конечные подгруппы. В [4] начато исследование подгруппового строения группы G.

Определение 2. Произвольная группа называется *ограниченной*, если она изоморфна подгруппе группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.

Известно [4], что ограниченными являются, например, счетная свободная группа, 2-группа Алешина, счетная свободная абелева группа. В [5] построена универсальная счетная локально конечная группа C, в которую изоморфно вкладывается всякая счетная локально конечная группа. В упомянутой работе [4] сформулирована

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 18-71-10007-П.

© 2023 Сучков Н. М., Шлепкин А. А.

Гипотеза 1. *Универсальная счетная локально конечная группа Холла является ограниченной.*

Напомним, что группа H подстановок множества Ω называется *регулярной*, если H транзитивна на Ω и $\mathrm{supp}(h) = \Omega$ для любой неединичной подстановки $h \in H$. Ясно, что группа $\mathrm{Fin}(N)$ не содержит регулярных подгрупп. С другой стороны, из представления Кэли следует, что любая счетная группа изоморфна регулярной подгруппе группы $S(N)$. Весьма сложным представляется вопрос о строении регулярных подгрупп группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.

В настоящей статье доказана гипотеза 1. При этом установлен более сильный результат.

Теорема 1. *Универсальная счетная локально конечная группа Холла изоморфна регулярной подгруппе группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.*

2. Вспомогательные построения

Напомним необходимые понятия теории групп подстановок. Пусть Ω — любое непустое множество. Через $S(\Omega)$ будем обозначать группу всех подстановок множества Ω. Если $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, то $S(\Omega)$ называется *симметрической группой степени n* и обозначается через S_n. Любая подгруппа H группы $S(\Omega)$ называется *группой подстановок множества* Ω. Если $\alpha \in \Omega$, то множество $\alpha^H = \{\alpha^h \mid h \in H\}$ называется *H-орбитой элемента α*. Очевидно, что Ω разбивается на попарно не пересекающиеся H-орбиты.

Согласно теореме Кэли произвольная группа X изоморфна регулярной группе подстановок множества $\Omega = X$. Этот изоморфизм элемент $x \in X$ отображает в подстановку $\pi(x) \in S(X)$, для которой

$$y^{\pi(x)} = yx \quad (y \in X).$$

Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то представление Кэли индуцирует на индексах регулярную подгруппу симметрической группы S_n. Поэтому справедливо

Предложение 1. *Любая конечная группа X порядка n изоморфна регулярной подгруппе группы S_n.*

Говорят, что группы H и H_1 подстановок соответственно множеств Ω и Ω_1 *подобны*, если существуют ψ — взаимно однозначное отображение Ω на Ω_1 — и ϕ — изоморфизм H на H_1 — такие, что

$$(\alpha^h)^\psi = (\alpha^\psi)^{h^\phi}$$

для всех $\alpha \in \Omega$, $h \in H$.

Определение 3. Для натуральных чисел $\alpha < \beta$ множество

$$\Delta(\alpha, \beta) = \{\gamma \mid \gamma \in N,\ \alpha \le \gamma \le \beta\}$$

будем называть *отрезком натуральных чисел.*

Фиксируем натуральное $m > 1$ и рассмотрим разбиение множества N на отрезки натуральных чисел:

$$\Delta_0^m = \Delta(1, m),\ \Delta_1^m = \Delta(m+1, 2m), \dots, \Delta_k^m = \Delta(km+1, (k+1)m), \dots.$$

Обозначим $B = \{x \mid x \in S(N);\ (\Delta_k^m)^x = \Delta_k^m,\ k = 0, 1, \dots\}$. Очевидно, если $x \in B$, то $\omega(x) < m$. Поэтому B — подгруппа группы G. Для каждого $k = 0, 1, \dots$ положим $B_k = \{y \mid y \in B,\ \mathrm{supp}(y) \subseteq \Delta_k^m\}$. Ясно, что B_k — подгруппа группы G,

изоморфная симметрической группе S_m, при этом $B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_n \times \dots$ — декартово произведение этих подгрупп. Если подстановка $b \in B$ индуцирует на Δ_k^m подстановку b_k, $k = 0, 1, \dots$, то пишем $b = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$.

Пусть T_0 — произвольная подгруппа группы B_0. Построим изоморфную ей подгруппу $T_0^\phi = \overline{T_0}$ следующим образом. Для каждой подстановки $t_0 \in T_0$ и любого натурального k определим подстановку $t_k = t_0^{\phi_k} \in B_k$, полагая

$$(km + \alpha)^{t_k} = km + \alpha^{t_0} \quad (1 \le \alpha \le m).$$

Взаимно однозначное отображение $\psi_k : \alpha \to km + \alpha$ отрезка Δ_0^m на отрезок Δ_k^m и изоморфизм ϕ_k группы T_0 на группу $T_k = T_0^{\phi_k}$ задают подобие групп подстановок T_0 и T_k. В самом деле,

$$(\alpha^{\psi_k})^{t_0^{\phi_k}} = (km + \alpha)^{t_k} = km + \alpha^{t_0} = (\alpha^{t_0})^{\psi_k}$$

для всех $\alpha \in \Delta_0^m$, $t_0 \in T_0$.

Рассмотрим отображение

$$\phi : t_0 \to (t_0, t_1, \dots, t_n, \dots), \quad t_0 \in T_0.$$

Так как $t_k = t_0^{\phi_k}$, где ϕ_k — изоморфизм T_0 на $T_0^{\phi_k} = T_k$ $(k = 1, 2, \dots)$, непосредственно проверяется, что ϕ — изоморфизм T_0 на $\overline{T_0} = T_0^\phi$.

Лемма 1. *Пусть $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$ — отрезок натуральных чисел из n элементов. Если X, Y — изоморфные регулярные подгруппы группы $S(\Delta)$, то $X^h = Y$ для некоторой подстановки $h \in S(\Delta)$.*

Доказательство. В силу условия X содержит точно n элементов $x_1, \dots, x_n$ и $\Delta = \{\alpha^{x_1}, \dots, \alpha^{x_n}\}$. Если θ — изоморфизм X на Y, $y_1 = x_1^\theta, \dots, y_n = x_n^\theta$, то $\Delta = \{\alpha^{y_1}, \dots, \alpha^{y_n}\}$. При каждом $i = 1, \dots, n$ имеем

$$x_i = \begin{pmatrix} \alpha_1^{x_1} & \dots & \alpha_n^{x_n} \\ \alpha^{x_1 x_i} & \dots & \alpha^{x_n x_i} \end{pmatrix}, \quad y_i = \begin{pmatrix} \alpha_1^{y_1} & \dots & \alpha_n^{y_n} \\ \alpha^{y_1 y_i} & \dots & \alpha^{y_n y_i} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $h = \begin{pmatrix} \alpha_1^{x_1} & \dots & \alpha_n^{x_n} \\ \alpha_1^{y_1} & \dots & \alpha_n^{y_n} \end{pmatrix}$ — искомая подстановка. Действительно, если $1 \le i, k \le n$, то $(\alpha^{y_k})^{h^{-1} x_i h} = (\alpha^{x_k x_i})^h$. Пусть $x_k x_i = x_s$. Действуя изоморфизмом θ, получим $y_k y_i = y_s$. Следовательно,

$$(\alpha^{x_k x_i})^h = (\alpha^{x_s})^h = \alpha^{y_s} = (\alpha^{y_k})^{y_i}.$$

Поэтому $h^{-1} x_i h = y_i$ и $h^{-1} X h = Y$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — подгруппа порядка k регулярной группы X отрезка Δ из $n = kt$ элементов. Если $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_t$ — разбиение Δ на последовательные отрезки из k чисел, то найдется такая подстановка $g \in S(\Delta)$, что эти отрезки составляют A^g-орбиты.*

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что Δ разбивается на A-орбиты $\Omega_1, \dots, \Omega_t$, каждая из которых содержит k элементов. Очевидно, существует подстановка $g \in S(\Delta)$, которая удовлетворяет условию $\Omega_i^g = \Delta_i$ при любом $i = 1, \dots, t$. Нетрудно понять, что g — искомая подстановка. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A, B — изоморфные подгруппы регулярной группы X отрезка Δ. Тогда $A^g = B$ для некоторой подстановки $g \in S(\Delta)$.*

Доказательство. Пусть $|\Delta| = n = kt$, где $k = |A|$. Разобьем Δ на последовательные отрезки $\Delta_1, \ldots, \Delta_t$ из k элементов. В силу леммы 2 без нарушения общности предполагаем, что эти отрезки составляют орбиты подгрупп A и B. По условию эти подгруппы индуцируют изоморфные регулярные группы подстановок A_i и B_i на каждом отрезке Δ_i $(1 \le i \le t)$. Применяя лемму 1, получим, что $A_i^{g_i} = B_i$ для некоторой подстановки $g_i \in S(\Delta_i)$. Считаем, что g_i действует тождественно на элементах $\Delta \setminus \Delta_i$ $(1 \le i \le t)$. Если $g = g_1 \ldots g_t$, то $A^g = B$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

В упомянутой работе [5] установлена определяемость универсальной счетной локально конечной группы C двумя свойствами.

Предложение 2. *Пусть L — счетная локально конечная группа. Если всякая конечная группа изоморфна подгруппе группы L и любые две конечные изоморфные подгруппы в L сопряжены, то L изоморфна C.*

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно найти такой возрастающий ряд

$$L_1 < L_2 < \cdots < L_n < L_{n+1} < \ldots \tag{1}$$

конечных подгрупп группы $G = \mathrm{Lim}(N)$, что группа $L = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ регулярна на множестве N и удовлетворяет условиям предложения 2.

При построении ряда (1) будем использовать определенный в разд. 2 изоморфизм ϕ группы T_0 подстановок отрезка $\Delta(1, m)$ на группу $\overline{T_0}$ подстановок множества N. Этот изоморфизм будем называть *m-вложением* группы T_0. Рассмотрим 6-вложение регулярной группы подстановок M_0 отрезка $\Delta(1, 6)$, изоморфной S_3. Положим $L_1 = \overline{M_0}$. Предположим, что $n \ge 1$ и уже построены подгруппы $L_1 < L_2 < \cdots < L_n$. При этом $L_n = \overline{F_0}$, где $\overline{F_0}$ — регулярная группа подстановок отрезка $\Delta(1, r!)$, изоморфная симметрической группе S_r, $r = r(n)$. Обозначим $q = r!$, и пусть Q — регулярная группа подстановок отрезка $\Delta(1, q!)$, изоморфная S_q. Такая группа существует по предложению 1. Имеем

$$\Delta(1, q!) = \Delta(1, q) \cup \Delta(q+1, 2q) \cup \cdots \cup \Delta(q! - q + 1, q!) \tag{2}$$

— разбиение отрезка натуральных чисел $\Delta(1, q!)$ на $(q-1)!$ отрезков из q элементов. Фиксируем некоторую подгруппу D группы Q, изоморфную (как абстрактная группа) симметрической группе S_r. Согласно лемме 2 найдется такая подстановка $g \in S_{q!}$, что отрезки (2) составляют орбиты группы D^g, которая содержится в регулярной группе Q^g отрезка $\Delta(1, q!)$.

Пусть $1 \le i \le (q-1)!$; $\Delta_i = \Delta((i-1)q + 1, iq)$ — отрезок разбиения (2). Тогда L_n индуцирует на каждом отрезке Δ_i регулярную группу подстановок Φ_i, которая изоморфна $S_r (\Phi_1 = F_0)$. Если D^g индуцирует на Δ_i группу R_i, то в силу леммы 1 найдется такая подстановка $h_i \in S(\Delta_i)$, что $R_i^{h_i} = \Phi_i$. Считаем, что h_i действует тождественно на $N \setminus \Delta_i$. Если $h = h_1 h_2 \ldots h_{(q-1)!}$, то действия групп D^{gh} и L_n на отрезке $\Delta(1, q!)$ совпадают. Полагаем $T_0 = Q^{gh}$ и рассмотрим $(q!)$-вложение ϕ группы T_0. Если $L_{n+1} = \overline{T_0} = T_0^{\phi}$, то в силу вышеизложенного $L_n < L_{n+1}$.

Итак, ряд (1) построен. При этом орбиты группы L_n составляют отрезки натуральных чисел из $|L_n|$ элементов, на каждом из которых L_n индуцирует регулярную группу подстановок. Следовательно, $L_n < G$ и $\mathrm{supp}(x) = N$ для любой неединичной подстановки $x \in L_n$. Пусть $\alpha, \beta \in N$. Тогда найдется такое натуральное n, что $\alpha, \beta < |L_n|$, а потому $\alpha^h = \beta$ для некоторой подстановки $h \in L_n$. Итак, группа L транзитивна на N. Таким образом, L — регулярная подгруппа группы $G = \mathrm{Lim}(N)$. Группа L содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе подстановок сколь угодно большой степени, а значит, любая конечная группа изоморфна подгруппе из L. Пусть A, B — изоморфные конечные подгруппы группы L. Так как L является объединением подгрупп ряда (1), существует такое натуральное n, что A и B содержатся в группе L_n. Из вышеизложенного следует, что $L_n = \overline{F_0} = F_0^{\psi}$, где F_0 — регулярная группа подстановок отрезка $\Delta(1, q)$, изоморфная симметрической группе $S_r(r! = q)$, а ψ является q-вложением группы F_0. Группы A и B индуцируют на отрезке $\Delta(1, q)$ изоморфные подгруппы A_0 и B_0 группы F_0. В силу леммы 3 $A_0^x = B_0$ для некоторой подстановки $x \in S_q$.

В свою очередь, $L_{n+1} = \overline{T_0} = T_0^{\phi}$, где T_0 — регулярная группа подстановок отрезка $\Delta(1, q!)$, изоморфная S_q, а ϕ – изоморфизм, который является $(q!)$-вложением группы T_0. Из построения группы L_{n+1} вытекает существование такого изоморфизма $\theta : S_q \to T_0$, что образы A_0^{θ} и B_0^{θ} совпадают с группами, индуцированными соответственно A и B на отрезке $\Delta(1, q!)$. Имеем

$$(A_0^{\theta})^{x^{\theta}} = B_0.$$

Применяя к этому равенству $(q!)$-вложение ϕ, получим $A^y = B$, где $y = (x^{\theta})^{\phi} \in L_{n+1}$. Таким образом, группа L удовлетворяет условиям предложения 2, а потому изоморфна C. Поскольку ранее было установлено, что L — регулярная подгруппа группы $G = \mathrm{Lim}(N)$, теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адо И. Д.* О подгруппах счетных симметрических групп // Докл. АН УССР. 1945. Т. 50, № 3. С. 15–17.
2. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.
3. *Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* О группах ограниченных подстановок // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2010. Т. 3, № 2. С. 262–266.
4. *Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* О подгруппах группы Lim(N) // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 208–217.
5. *Hall P.* Some constructions for locally finite groups // J. London Math. Soc. 1959. V. 34. P. 305–319.

Поступила в редакцию 2 марта 2023 г.
После доработки 27 апреля 2023 г.
Принята к публикации 16 марта 2023 г.

Сучков Николай Михайлович (ORCID 0009-0004-4019-4700),
Шлепкин Алексей Анатольевич (ORCID 0000-0003-2241-2842)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
shlyopkin@mail.ru