

ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН И ПРОСТОЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП

С. Б. Шлосман

Пусть $f_1: M_1 \rightarrow M_2$ — гомотопическая эквивалентность и $N \subset M_2$ — подмногообразие коразмерности один. В работе указываются условия для существования отображения $f_2 \sim f_1$ такого, что многообразие $f_2^{-1}(N)$ просто гомотопически эквивалентно многообразию N . Библ. 5 назв.

§ 1. Введение. 1. Пусть $f_1: M_1^n \rightarrow M_2^n$ — гомотопическая эквивалентность гладких, компактных, замкнутых многообразий. Пусть $\pi_1(M_2) = G \odot_\alpha \mathbf{Z}$, где $\alpha \in \text{Aut } G$, а \odot_α обозначает скрещенное произведение. Пусть $i: N \subset \subset M_2$ — подмногообразие коразмерности один, $\pi_1(N) = G$, $i_*: G \rightarrow G \odot_\alpha \mathbf{Z}$ — естественное вложение на первое слагаемое. Отображение f_1 можно считать трансверсально регулярным на подмногообразии N . Положим $N_1 = f_1^{-1}(N)$. Рассмотрим следующую задачу: когда отображение f_1 можно продеформировать в отображение f_2 , чтобы ограничение $f_2|_{N_2}: N_2 \rightarrow N$ было гомотопической эквивалентностью?

В работах [1—2] вычислено препятствие к решению описанной задачи. Введем некоторые определения. Пусть $\mathbf{Z}(G)$ — групповое кольцо группы G , $\alpha \in \text{Aut } G$. Рассмотрим категорию пар $\{P, \varphi\}$, где P — конечнопорожденный проективный $\mathbf{Z}(G)$ -модуль, а $\varphi: P \rightarrow P$ — такой нильпотентный эндоморфизм, что $\varphi(ap) = \alpha(a)\varphi(p)$, где $a \in \mathbf{Z}(G)$, $p \in P$. Скажем, что $\{P, \varphi\} = \{P_1, \varphi_1\} \oplus \{P_2, \varphi_2\}$, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{j} & P_2 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_2 \\ 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{j} & P_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

строки в которой точны. Пусть $C(Z(G), \alpha)$ — группа Гротендика описанной категории, профакторизованная по элементам вида $\{F, 0\}$, где F — свободный $Z(G)$ -модуль.

Гомоморфизм $C(Z(G), \alpha) \rightarrow K^0(Z(G))$, задаваемый формулой $\pi(\{P, \varphi\}) = [P]$, является эпиморфизмом. Пусть $\tilde{C}(Z(G), \alpha)$ — его ядро.

ТЕОРЕМА (см. [1—2]). *Существует такой элемент $O(f_1) \in C(Z(G), \alpha)$, зависящий лишь от кручения $\tau(f_1) \in Wh(G \odot_{\alpha} Z)$, что $O(f_1) = 0$ тогда и только тогда, когда отображение f_1 гомотопно отображению f_2 , для которого ограничение $f_2|N_2$ есть гомотопическая эквивалентность.*

Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 6$.

Из этой теоремы очевидно следует, что элемент $O(f_1)$ является гомотопическим инвариантом (см. [3]).

2. Естественно предположить, что если отображение f_1 является простой гомотопической эквивалентностью, то можно отображение f_2 выбрать так, что ограничение $f_2|N_2$ тоже есть простая гомотопическая эквивалентность. На самом деле это не так. В настоящей работе находятся необходимые и достаточные условия для существования отображения $f_2: M_1 \rightarrow M_2$, трансверсально регулярного на подмногообразии N , такого что $f_2 \sim f_1$ и $f_2|N_2$ является простой гомотопической эквивалентностью. Мы сопоставим каждому отображению инвариант его гомотопического класса, который является более тонким, чем кручение Уайтхеда.

3. Определим группу $C_n^s(Z(G), \alpha)$, в которой лежит наше препятствие. Пусть H — свободный $Z(G)$ -модуль. Обозначим через $A_n(G)$ подгруппу группы $Wh(G)$, состоящую из элементов вида $\tau + (-1)^n \tau^*$.

О п р е д е л е н и е. Два базиса $\{a\}$ и $\{b\}$ модуля H называются слабо n -эквивалентными, если матрица перехода от базиса $\{a\}$ к $\{b\}$ (обозначается $[a/b]$), определяет в группе $Wh(G)$ элемент из подгруппы $A_n(G)$.

Пусть $\alpha \in \text{Aut } G$; рассмотрим множество троек $[F, h, \varphi]$, где F — свободный конечнопорожденный ненулевой $Z(G)$ -модуль; h — класс слабо n -эквивалентных базисов в $F \oplus F^*$ (F^* — сопряженный модуль); φ — нильпотентный эндоморфизм, причем

$$\varphi(af) = \alpha(a) \varphi(f), \quad a \in Z(G), \quad f \in F,$$

Положим $[F, h, \varphi] = [F', h', \varphi'] \oplus [F'', h'', \varphi'']$, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F' & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{j} & F'' \rightarrow 0, \\ & & \varphi' \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi'' \\ 0 & \rightarrow & F' & \xrightarrow{i} & F & \xrightarrow{j} & F'' \rightarrow 0 \end{array}$$

а последовательность

$$0 \rightarrow F' \oplus (F')^* \xrightarrow{i \oplus i^*} F \oplus F^* \xrightarrow{j \oplus j^*} F'' \oplus (F'')^* \rightarrow 0$$

точна, причем ее кручение, определенное по $\text{mod } A_n(G)$, равно нулю.

Тройка $[E, l, 0]$ называется тривиальной, если существует такой базис $\{g\}$ модуля E , что матрица $[l/g \oplus g^*]$ определяет нулевой элемент в группе $Wh(G)/A_n(G)$.

О п р е д е л е н и е. Группой $C_n^s(\mathbf{Z}(G), \alpha)$ называется группа Гротендика категории троек $[F, h, \varphi]$, профакторизованная по подгруппе, порожденной тривиальными тройками.

4. В настоящей работе из результатов статей [1—2] выводятся следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место точная последовательность:*

$$0 \rightarrow Wh(G)/A_n(G) \xrightarrow{\delta} C_n^s(\mathbf{Z}(G), \alpha) \xrightarrow{\beta} C(\mathbf{Z}(G), \alpha) \xrightarrow{\pi} K^0(\mathbf{Z}(G)) \rightarrow 0.$$

Здесь $\beta([F, h, \varphi]) = \{F, \varphi\}$, $\pi\{P, \varphi\} = [P]$. Гомоморфизм δ будет описан ниже.

Пусть $f_1: M_1^n \rightarrow M_2^n$ есть гомотопическая эквивалентность и выполнены условия § 1.1.

ТЕОРЕМА 2. *Если $O(f_1) \in \tilde{C}(\mathbf{Z}(G), \alpha)$, то определен элемент $\sigma(f_1) \in C_n^s(\mathbf{Z}(G), \alpha)$, являющийся гомотопическим инвариантом. $\sigma(f_1) = 0$ тогда и только тогда, когда существует отображение f_2 , удовлетворяющее условиям § 1.2.*

§ 2. Важный частный случай. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда $O(f_1) = 0$, где $f_1: M_1 \rightarrow M_2$ — гомотопическая эквивалентность многообразий, удовлетворяющая условиям § 1.1.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнено условие § 1.1 и $O(f_1) = 0$. Тогда определен элемент $\nu(f_1) \in Wh(G)/A_n(G)$,*

являющийся гомотопическим инвариантом. $v(f_1) = 0$ тогда и только тогда, когда существует отображение f_2 , удовлетворяющее условиям § 1.2.

Доказательство теоремы 3 распадается на две части. В первой части строится элемент $\tilde{v}(f_1) \in Wh(G)$ и показывается, что если отображение f пробегает множество отображений, гомотопных f_1 , то $\tilde{v}(f)$ пробегает по крайней мере класс смежности $\tilde{v}(f_1) + A_n(G)$. Во второй части доказывается, что элемент $\tilde{v}(f) \bmod A_n(G)$ не зависит от выбора представителя из класса отображений, гомотопных f_1 .

Сформулируем две леммы, доказательство которых заключается в непосредственном вычислении.

ЛЕММА 1. Пусть X^n — h -кобордизм, и $\partial X^n = N \cup \cup (-N')$. Пусть кручение $\tau(X, N) = \tau$. Тогда кручение естественного отображения N' в N равно $(-\tau + (-1)^{n-1} \tau^*) \in Wh(\pi_1(N))$.

О п р е д е л е н и е. Два отображения $f_1: N_1 \rightarrow N$, $f_2: N_2 \rightarrow N$ многообразий называются h -кобордантными, если существует h -кобордизм X^n , $\partial X^n = N_1 \cup (-N_2)$, и отображение $F: X^n \rightarrow N$ такое, что $F|N_i = f_i$. Если f_1 — гомотопическая эквивалентность, то и f_2 — гомотопическая эквивалентность. Пусть кручение $\tau(X_1, N_1) = \tau$.

ЛЕММА 2. Имеет место равенство

$$\tau(f_2) = \tau(f_1) + (-1)^{n-1} \tau^* - \tau.$$

Пусть $O(f_1) = 0$. По теореме из § 1.1 тогда существует отображение f_2 , гомотопное f_1 , такое, что $f_2|N_2$ есть гомотопическая эквивалентность. Определим $\tilde{v}(f_1)$ равенством $\tilde{v}(f_1) = \tau(f_2|N_2)$. Это определение зависит от произвола в выборе отображения f_2 . Действительно, вложим в трубчатую окрестность многообразия N_2 h -кобордизм X^n , $\partial X^n = N_2 \cup (-N_3)$ так, чтобы $\tau(X^n, N_3) = \tau$. Легко видеть, что отображение f_2 можно продеформировать в отображение f_3 такое, что $f_3^{-1}(N) = N_3$. По лемме 2 имеем $\tilde{v}(f_1) = \tau(f_3|N_3) = \tau(f_2|N_2) + (-1)^{n-1} \tau^* - \tau$.

Покажем, что приведенный по модулю элементов подгруппы $A_n(G)$ элемент $\tilde{v}(f_1)$ не зависит от произвола в определении, т. е. является инвариантом гомотопического класса отображения f_1 . Пусть $f_{1,2}: M_1 \rightarrow M_2$ — две гомо-

точные гомотопические эквивалентности, и выполнены условия § 1.1. Пусть ограничения $f_i|N_i$ являются гомотопическими эквивалентностями. Гомотопия между отображениями f_1 и f_2 — это отображение $F: M_1 \times I_1^2 \rightarrow M_2 \times I_1^2$, причем $F|M_1 \times \{i\} = f_i$. Можно предполагать отображение F выбранным так, что

$$F|M_1 \times I_1^{1+\varepsilon} = f_1 \times id I_1^{1+\varepsilon}, \quad F|M_2 \times I_2^{2-\varepsilon} = f_2 \times id I_2^{2-\varepsilon}.$$

Отображение F можно считать трансверсально регулярным на подмногообразии $N \times I_1^2$. Пусть $K = F^{-1}(N \times I_1^2)$; тогда $\partial K = N_1 \cup (-N_2)$, так как M_i замкнуты.

Пусть z — некоторый элемент из относительной гомотопической группы $\pi_r(K, N_1)$. Реализуем его относительным сфероидом $(D^r, S^{r-1}) \subset (K, N_1)$. Очевидно, что группа $\pi_r(N \times I_1^2, N \times \{1\}) = 0$, значит, $F_*(z) = 0$. Следовательно, сфероид $(f_1)_*(S^{r-1})$ стягиваем в $N \times \{1\}$, а так как ограничение $f_1|N_1$ — гомотопическая эквивалентность, то сфероид S^{r-1} стягиваем в многообразии N_1 . Поэтому каждый элемент z из $\pi_r(K, N_1)$ определяет некоторый элемент z' из гомотопического ядра отображения $F|K$. На самом деле элементы z' порождают все ядро. Продеформируем отображение F так, чтобы на многообразии K произошли перестройки в точности по элементам $\{z'\}$.

Для этого рассмотрим по два экземпляра многообразий $M_1 \times I_1^2$, $M_2 \times I_1^2$ и отображений $F: M_1 \times I_1^2 \rightarrow M_2 \times I_1^2$. Склеим многообразия по соответствующим компонентам края и получим отображение $2F$ склеенных многообразий. Очевидно, что $2F$ гомотопно отображению $f_i \times id_{S^1}$, т. е. является простой гомотопической эквивалентностью. По теореме из § 1.1 мы имеем, что отображение $2F$ можно продеформировать в $2G$, которое, будучи ограниченным на $2L = (2G)^{-1}(N \times S^1)$, есть гомотопическая эквивалентность. При этом деформацию отображения $2F$ можно выбрать таким образом, чтобы она была тождественной вблизи подмногообразий $M_1 \times \{1\}$ и $M_1 \times \{2\}$. Действительно, гомотопическое ядро ограничения $2F|K$ можно реализовать такими сферами, чтобы они не затрагивали $M_1 \times \{1\}$ и $M_1 \times \{2\}$. Отсюда следует, что продеформированное отображение $2G: M_1 \times S^1 \rightarrow M_2 \times S^1$

можно расщепить на два экземпляра:

$$G: M_1 \times I_1^2 \rightarrow M_2 \times I_1^2.$$

При этом ограничение $G|L$ есть теперь гомотопическая эквивалентность. Значит, многообразие L представляет собой h -кобордизм. Следовательно, ограничения $f_1|N_1$ и $f_2|N_2$ h -кобордантны, и теорема 3 доказана.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2. Мы переходим теперь к рассмотрению общего случая, когда препятствие $O(f_1)$ лежит в группе $\tilde{C}(\mathbf{Z}(G), \alpha) = \ker \pi$.

О п р е д е л е н и е э л е м е н т а $\sigma(f) \in C_n^s(\mathbf{Z}(G), \alpha)$.
Здесь надо различать два случая в зависимости от четности или нечетности размерности многообразий M_i^n . Пусть n четно. Тогда отображение f_1 гомотопно такому отображению f_2 , что эпиморфизм $\mathbf{Z}(G)$ -модулей $(\hat{f}_2|N_2)_*$: $H_*(\hat{N}_2) \rightarrow H_*(\hat{N})$ является изоморфизмом во всех размерностях, кроме $n/2$. Здесь $\hat{}$ означает переход к универсальному накрывающему. Рассмотрим также пространства \hat{M}_i -пространств, соответствующих подгруппе G фундаментальной группы. Многообразие N_2 разбивает многообразие \hat{M}_1 на два бесконечных куска A и B — «левый» и «правый» концы соответственно. Тогда \hat{A} и \hat{B} обозначают соответствующие концы в многообразии \hat{M}_1 , которые порождаются подмногообразием \hat{N}_1 . Из предположения, что $O(f_1) = O(f_2) \subset \tilde{C}(\mathbf{Z}(G), \alpha)$, вытекает следующее утверждение (см. [4]): ядро $\ker [(\hat{f}_2|N_2)_{n/2}]$ является свободным конечнопорожденным $\mathbf{Z}(G)$ -модулем и распадается в прямую сумму «левого» и «правого» ядер

$$\ker [(\hat{f}_2|A)_{(n/2)+1}] \oplus \ker [(\hat{f}_2|B)_{(n/2)+1}],$$

которые являются свободными конечнопорожденными $\mathbf{Z}(G)$ -модулями. Правое ядро сопряжено к левому (и наоборот), и на нем задан α -линейный эндоморфизм ψ , порожденный сдвигом на образующую \mathbf{Z} .

В цепном комплексе отображения $f_2|N_2$ есть естественный геометрический базис. Группа $\ker [(\hat{f}_2|N_2)_{n/2}]$ является единственной нетривиальной группой гомологий этого комплекса. Выберем в этой группе базис $\{h\}$ так, чтобы кручение этого комплекса стало равным нулю в

группе $Wh(G)$. Тройка $[\ker(\hat{f}_2 | \hat{B}_2)_{n/2+1}, h, \psi]$ определяет элемент из группы $C_n^s(\mathbf{Z}(G), \alpha)$. Обозначим его $\sigma(f_1)$. В нечетномерном случае ситуация аналогична только что разобранный, за исключением того, что группа $\ker(\hat{f}_2 | \hat{N}_2)_*$ нетривиальна в двух средних размерностях. В этом случае утверждение нужно переформулировать так: ядро $\ker[(\hat{f}_2 | \hat{N}_2)_{[n/2]+1}]$ изоморфно «левому» ядру $\ker[(\hat{f}_2 | \hat{A})_{[n/2]+2}]$, а ядро $\ker[(\hat{f}_2 | \hat{N}_2)_{[n/2]}]$ изоморфно «правому» ядру $\ker[(\hat{f}_2 | \hat{B})_{[n/2]+1}]$.

Снова рассматриваем цепной комплекс отображения $f_2 | N_2$ с естественным геометрическим базисом. Гомологии этого комплекса нетривиальны в двух средних размерностях. Выберем в них базис так, чтобы кручение этого комплекса стало равным нулю в группе $Wh(G)$. Такой выбор корректно определяет класс слабо эквивалентных базисов в прямой сумме

$$\ker[(\hat{f}_2 | \hat{A})_{[n/2]+2}] \oplus \ker[(\hat{f}_2 | \hat{B})_{[n/2]+1}].$$

Полученный таким образом элемент в $C_n^s(\mathbf{Z}(G), \alpha)$ мы снова обозначим через $\sigma(f_1)$.

Докажем теперь теорему 2. Пусть существует отображение, удовлетворяющее условиям § 1.2. Легко видеть, что тогда $\sigma(f_1) = 0$. Пусть, обратно, $\sigma(f_1) = 0$. Это означает, что тройка $[F, h, \psi]$, полученная по отображению f_2 , обладает следующими свойствами:

1. Эндоморфизм ψ в некотором базисе $\{s\}$ модуля F записывается треугольной матрицей с нулями на главной диагонали.

2. Существует базис $\{g\}$ модуля F такой, что базис $\{g\} \oplus \{g^*\}$ слабо n -эквивалентен избранному базису в $F \oplus F^*$. Базис $\{g\} \oplus \{g^*\}$ можно считать просто эквивалентным выбранному базису $F \oplus F^*$.

Пусть матрица $[g/s]$ определяет элемент $\tau \in Wh(G)$. Малой деформацией отображения f_2 можно добиться того, чтобы к модулю $F \oplus F^*$ добавилось слагаемое $S \oplus S^*$ большого ранга. Здесь S — подмодуль правого ядра, натянутый на элементы, порожденные вновь приклеенными ручками. Чтобы не изменить кручения комплекса отображения $f_2 | N_2$, необходимо в модуле $S \oplus S^*$ зафиксировать естественный базис, порожденный ручками, приклеенными к «правому» и «левому» концам соответственно.

Обозначим соответствующий базис S через $\{k\}$. Тогда $\{k\} \oplus \{g\} \oplus \{k^*\} \oplus \{g^*\}$ есть отмеченный базис в ядре $\ker [(\hat{f}_2|N_2)_*]$.

Рассмотрим теперь в модуле S другой базис $\{l\}$, так чтобы матрица $[k/l]$ определяла бы элемент $-\tau$ в группе $Wh(G)$. Тогда, очевидно, базис $\{l\} \oplus \{s\} \oplus \{l^*\} \oplus \{s^*\}$ будет слабо n -эквивалентен отмеченному. Но базис $\{l\} \oplus \{s\}$ имеет то преимущество, что нильпотентный эндоморфизм записывается в нем матрицей вида

$$\begin{matrix} s \\ l \end{matrix} \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \dots \dots \dots 0 \end{array} \right\},$$

так как ручки, соответствующие модулю S , лежат в малой окрестности многообразия N_2 . Реализуем теперь выбранный базис ядра $f_2|N_2$ сферами и перестроим многообразие N_2 по ним. Перестройками по базису мы не меняем кручение комплекса отображения $f_2|N_2$, следовательно, отображение f_2 можно продеформировать в отображение f_3 , удовлетворяющее условиям § 1.2. Теорема 2 тем самым доказана по модулю того, что не проверена корректность определения элемента $\sigma(f_1)$.

Докажем теорему 3. Очевидно, надо проверить точность лишь в члене C_n^s .

Пусть $\mu \in \ker \beta$ и $\sigma(f_1) = [F, h, \varphi]$ — представитель этого элемента. Так как $\beta(\sigma(f_1)) = 0$, то отображение f_1 по теореме из § 1.1 можно продеформировать в отображение f_2 такое, что $f_2|N_2 : N_2 \rightarrow N$ есть гомотопическая эквивалентность. Определим гомоморфизм $\delta^{-1} : \ker \beta \rightarrow Wh(G)/A_n(G)$ равенством: $\delta^{-1}(\sigma(f_1)) = \nu(f_1)$.

Если $[F, h, \varphi] = 0$, то по теореме 2 отображение f_1 можно перестроить до отображения f_2 , удовлетворяющего условиям § 1.2. Значит, $\nu(f_1) = 0$ и гомоморфизм δ^{-1} определен корректно. Если же $\nu(f) = 0$, то, по теореме 2, $\sigma(f) = 0$, и значит, $[F, h, \varphi] = 0$.

Легко видеть, что гомоморфизм δ^{-1} устроен так: пусть $\{s\}$ — некоторый базис модуля F , тогда $\delta^{-1}[F, h, \varphi] = [h/s \oplus s^*]$, где матрица $[h/s \oplus s^*]$ рассматривается как элемент группы $Wh(G)/A_n(G)$. Теперь очевидно, что

гомоморфизм δ^{-1} является изоморфизмом и его можно определить без использования геометрии. Теорема 3 доказана. Теперь корректность определения элемента $\sigma(f)$ очевидна, так как элементы $\beta(\sigma(f))$ и $\delta^{-1}(\sigma(f))$ определены корректно (во втором случае подразумевается, что $\sigma(f) \in \ker \beta$).

§ 4. Пример. Теперь мы приведем пример, когда наше препятствие $v(f)$ отлично от нуля.

Из теоремы 2 и примера работы [5] следует, что существует гомотопическая эквивалентность $f: K \rightarrow L$ пятнадцатимерных многообразий с фундаментальной группой \mathbf{Z}_5 , причем кручение отображения f не лежит в подгруппе $A_{15}(\mathbf{Z}_5)$.

Отображение $f \times id_{S^1}: K \times S^1 \rightarrow L \times S^1$ является простой гомотопической эквивалентностью, но, тем не менее, не существует отображения f' , гомотопного f и такого, что $f' \circ (f')^{-1}: (f')^{-1}(L) \rightarrow L$ было бы простой гомотопической эквивалентностью. Это прямое следствие теоремы 3.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. С. Мищенко, под руководством которого была выполнена эта работа.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
30. XII. 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Farrell F. T., The obstruction to fibering a manifold over a circle, Bull. Amer. Math. Soc., 73, № 5 (1967), 737—740.
- [2] Farrell F. T., Hsiang W. C., A geometric interpretation of the Kunnetth formula for algebraic K-theory, Bull. Amer. Math. Soc., 74, № 3 (1968), 548—553.
- [3] Милнор Дж., Кручение Уайтхеда. Сб. «Математика» 11:1, (1967) стр. 1—37.
- [4] Hsiang W. C., A splitting theorem and the Kunnetth formula in algebraic K-theory, Lecture notes in Math., № 108, pp. 72—77.
- [5] Голуб В. Л., Реализация кручения Уайтхеда и дискриминанты билинейных форм, Докл. АН СССР 183, № 6 (1968), 1247—1249.