Отметим еще следующую известную оценку для чисел Бернулли:

$$|B_{2k}| \leqslant \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \frac{1}{1-2^{1-2k}} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{37}$$

Из (23), (24), (36) и (37) получаем для $1 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$

$$\int_{-1}^{1} \varkappa(t)\, v_n^2(t)\, dt \leqslant c_{15}(\alpha,\ \beta) \frac{n}{N} + c_{16}(\alpha,\ \beta,\ a) \frac{n^3}{N^2}.$$

Тем самым для $\sigma_n(t) = v_n(t)$ справедлива оценка (13) с константой $A^2 = c_{15}(\alpha, \beta) n/N + c_{16}(\alpha, \beta, a) n^3/N^2$, поэтому утверждение теоремы вытекает из оценки (14).

Автор искренне признателен Б. С. Кашину за обсуждение результатов и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. в 5 т. М., 1947—1951. Т. 3. 66—87.
2. Karlin S., McGregor J. L. The Hahn polynomials, formulas and an application // Scr. math. 1961. **26**. 33—46.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., 1962.
4. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Хана // Изв. вузов. Математика. 1985. № 5. 78—80.
5. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // Матем. сб. 1989. **180**, № 9. 1259—1277.
6. Šarapudinov I. I. An asymptotic formulas having no remainder term for the orthogonal Hahn polynomials of discrete variable // Mathematica Balkanica. New Series. 1988. **2**, N 4. 314—318.
7. Wilson M. W. On the Hahn polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1970. **42**, N 1. 131—139.
8. Минко А. А., Петунин Ю. И. Сходимость метода наименьших квадратов в равномерной метрике // Сиб. матем. журн. 1990. **31**, № 2. 111—122.

Поступила в редакцию
31.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 1

УДК 515.12

Л. Б. Шапиро

ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И НОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРАХ

В категории нормальных функторов NF, введенной Е. В. Щепиным [1], наиболее изученными являются функторы гиперпространства exp и вероятностных мер P. Первый из указанных функторов имеет чисто категорную характеристику [2], а второй определяется как множество линейных, положительных, регулярных функционалов на пространстве непрерывных функций, наделенное слабой* топологией [3]. В настоящей статье, с одной стороны, предлагается описание функтора exp как множества надлежащим образом выбранного семейства функционалов в слабой* топологии (теорема 2), а с другой — дается чисто категорная характеристика функтора P (теорема 4).

Введем необходимые понятия. Все пространства предполагаются бикомпактными и хаусдорфовыми. Через $C_+(X)$ обозначается пространство неотрицательных на X непрерывных функций с естественными метрикой, порядком, линейной и мультипликативной структурами. Для числа α через α_X обозначаем функцию, тождественно равную α на пространстве X.

Определение 1. Отображение $u: C_+(X) \to C_+(Y)$ называется: 1) аддитивным; 2) полуаддитивным; 3) мультипликативным; 4) полумультипликативным; 5) монотонным; 6) ортогональным; 7) однородным; 8) слабо аддитивным; 9) слабо регулярным, если для любых $f, g \in C_+(X)$ и $\alpha \in R_+$ соответственно выполнены условия: 1) $u(f+g) = u(f)+u(g)$; 2) $u(f+g) \leqslant u(f)+u(g)$; 3) $u(fg) = u(f)u(g)$; 4) $u(fg) \leqslant u(f)u(g)$; 5) из $f \leqslant g$ следует $u(f) \leqslant u(g)$; 6) из условий $\min\{f, g\} = 0_X$ и $\max\{f, g\} = 1_X$ следует $\min\{u(f), u(g)\} = 0_Y$ и $\max\{u(f), u(g)\} = 1_Y$; 7) $u(\alpha f) = \alpha u(f)$; 8) $u(f+\alpha_X) = u(f)+\alpha_Y$; 9) $u(\alpha_X) = \alpha_Y$. Если Y — одноточечное пространство, то $C_+(Y) = R_+$ и отображение $u: C_+(X) \to R_+$ будем называть функционалом.

Определение 2. Если X — замкнутое подпространство Y, то оператором продолжения функций (экстендером) называется отображение $u: C_+(X) \to C_+(Y)$, такое, что $u(f) \upharpoonright X \equiv f$.

Как показал Р. Хэйдон [4], существование одновременно аддитивного, однородного и слабо регулярного экстендера для любого вложения пространства X равносильно тому, что $X \in AE(0)$, т. е. X является абсолютным экстензором в размерности 0 (определение классов пространств $AE(n)$ см. в [1]). Г. М. Непомнящий [5] и В. В. Федорчук [6] показали, что класс пространств $AE(1)$ совпадает с классом многозначных абсолютных ретрактов MAR.

Определение 3. $X \in MAR$ тогда и только тогда, когда для любого вложения $X \hookrightarrow Y$ существует многозначная ретракция, т. е. непрерывное отображение $r: Y \to \exp X$, такое, что $r \upharpoonright X \equiv id_X$.

Теорема 1. *Замкнутое подмножество X пространства Y является его многозначным ретрактом тогда и только тогда, когда существует полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо регулярный экстендер $u: C_+(X) \to C_+(Y)$.*

Из теоремы 1 сразу получаем еще одну характеристику класса MAR.

Следствие. *$X \in MAR$ тогда и только тогда, когда для любого вложения $X \hookrightarrow Y$ существует полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо регулярный экстендер.*

Доказательство теоремы 1. Пусть X — многозначный ретракт Y. Заметим, что естественный экстендер $v: C_+(X) \to C_+(\exp X)$, определяемый соотношением $v(f) = \max\limits_{x \in F} f(x)$, где $f \in C_+(X)$ и $F \in \exp X$, является полуаддитивным, полумультипликативным, монотонным, однородным, слабо регулярным, слабо аддитивным. Рассмотрим многозначную ретракцию $r: Y \to \exp Y$ и определим экстендер $u: C_+(X) \to C_+(Y)$ так: $u(f) = v(f) \circ r$. Очевидно, что u — искомый.

Пусть теперь $u: C_+(X) \to C_+(Y)$ — полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо регулярный экстендер. Построим многозначную ретракцию $r: Y \to \exp X$. Для функционала $\varphi: C_+(X) \to R_+$ естественно определяется его носитель $\operatorname{supp} \varphi = X \setminus \bigcup \{U \mid U$ открыто в X и для любого $f \in C_+(X)$, такого, что $\operatorname{supp} f \subset U$, справедливо $\varphi(f) = 0\}$. Легко видеть, что носитель нетривиального полуаддитивного функционала непуст. Каждой точке $y \in Y$ соответствует функционал $\varphi_y: C_+(X) \to R_+$, определенный соотношением $\varphi_y(f) = u(f)(y)$. Тогда искомую многозначную ретракцию определяем так: $r(y) = \operatorname{supp} \varphi_y$. Ясно, что $r(x) = x$ для любой точки $x \in X$. Доказательству непрерывности r предпошлем два предложения.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\varphi: C_+(X) \to R_+$ — *полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, слабо регулярный функционал. Тогда* $\varphi(f) \leqslant \max\limits_{x \in \operatorname{supp}\varphi} f(x)$ *для любого* $f \in C_+(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 1. Пусть $\alpha = \max\limits_{x \in \operatorname{supp}\varphi} f(x)$ и ε — произвольное положительное число. Покажем, что $\varphi(f) < \alpha + \varepsilon$. Возьмем $U_0 = \{x \mid f(x) < \alpha + \varepsilon\}$ — окрестность $\operatorname{supp}\varphi$. Выделим конечное покрытие X, состоящее из множеств $U_0, U_1, \ldots, U_n$, где U_i — открытое множество, для которого функционал φ обращается в нуль на каждой функции с носителем, содержащимся в U_i, для любого $i \in \overline{1, n}$. Возьмем $\{g_i \mid i \in \overline{0, n}\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$. Тогда $f = \sum\limits_{i=0}^{n} f g_i$. В силу перечисленных свойств φ получаем, что

$$\varphi(f) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \varphi(f g_i) \leqslant \varphi(f g_0) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(f)\, \varphi(g_i) = \varphi(f g_0),$$

так как $\varphi(g_i) = 0$ при $i \in \overline{1, n}$. Но $g_0 \leqslant 1$ и $\operatorname{supp} g_0 \subset U_0$, следовательно, $\|f g_0\| < \alpha + \varepsilon$ и $\varphi(f g_0) < \alpha + \varepsilon$, т. е. $\varphi(f) < \alpha + \varepsilon$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $\varphi: C_+(X) \to R_+$ — *полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный нетривиальный функционал;* U — *открытое в* X *множество, такое, что* $U \cap \operatorname{supp}\varphi \neq \varnothing$. *Тогда* $\varphi(f) \geqslant \inf\limits_{x \in U} f(x)$ *для любого* $f \in C_+(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 2. Так как $U \cap \operatorname{supp}\varphi \neq \varnothing$, то существует такая функция $g \in C_+(X)$, что $\operatorname{supp} g \subset U$ и $\varphi(g) \neq 0$. Пусть $\alpha = \inf\limits_{x \in U} f(x)$. Тогда $\alpha g \leqslant f g$, $\alpha\varphi(g) = \varphi(\alpha g) \leqslant \varphi(f g) \leqslant \varphi(f)\varphi(g)$ и $\alpha \leqslant \varphi(f)$, поскольку $\varphi(g) \neq 0$.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1. Докажем, что отображение $r: Y \to \exp X$ полунепрерывно снизу. Фиксируем точку $y_0 \in Y$, открытое множество $U \subset X$, такое, что $r(y_0) \cap U \neq \varnothing$, и точку $x_0 \in r(y_0) \cap U$. Возьмем функцию $f \in C_+(X)$, такую, что $f(X \setminus U) = 0$ и $f(x_0) = 1$. Так как у точки x_0 существует окрестность, значения функции f в каждой точке которой больше $\frac{1}{2}$, то согласно предложению 2 получаем $\varphi_{y_0}(f) > \frac{1}{2}$. Рассмотрим открытое в Y множество $V = \left\{y \mid u(f)(y) > \frac{1}{2}\right\}$. В силу сказанного $y_0 \in V$. Если $y \in V$, то $u(f)(y) = \varphi_y(f) > \frac{1}{2}$, следовательно, из предложения 1 вытекает неравенство $\max\limits_{x \in \operatorname{supp}\varphi_y} f(x) > \frac{1}{2}$, т. е. $U \cap \operatorname{supp}\varphi_y \neq \varnothing$.

Покажем, что r полунепрерывно сверху. Пусть U — окрестность множества $r(y_0)$. Возьмем функцию $f \in C_+(X)$, такую, что $f(r(y_0)) = 0$ и $f(X \setminus U) = 1$. Рассмотрим открытое множество $V = \left\{y \mid u(f) y) < \frac{1}{2}\right\}$. В силу предложения 1 имеем $y_0 \in V$, так как $u(f)(y_0) = \varphi_{y_0}(f) = \max\limits_{x \in \operatorname{supp}\varphi_{y_0}} (x) = 0$. Пусть $y \in V$ и $r(y) \cap (X \setminus U) \neq \varnothing$. Поскольку $X \setminus U \subset \left\{x \mid f(x) > \frac{1}{2}\right\}$, то из предложения 2 следует, что $u(f)(y) = \varphi_y(f) \geqslant \frac{1}{2}$. Полученное противоречие позволяет утверждать, что $r(y)\subset U$ для любого $y\in V$. Теорема 1 доказана.

С помощью теоремы 1 можно получить функциональное описание exp, о котором говорилось выше. Для пространства X обозначим через $\Phi(X)$ множество всех полуаддитивных, полумультипликативных, монотонных, однородных, слабо аддитивных, слабо регулярных функционалов $\varphi: C_+(X)\to R_+$. На множестве $\Phi(X)$ введем слабую* топологию, т. е. наименьшую топологию, в которой будут непрерывными функции $f:\Phi(X)\to R$, где $f\in C_+(X)$ и $f(\varphi)=\varphi(f)$. Легко видеть, что $\Phi(X)$ — бикомпакт и пространство X естественно вложено в $\Phi(X)$. Более того, Φ — ковариантный функтор из категории Comp в себя.

Теорема 2. *Функторы* Φ *и* exp *естественно изоморфны.*

Доказательство. Для вложения $X\subsetneq\Phi(X)$ существует полуаддитивный, полумультипликативный, монотонный, однородный, слабо аддитивный, слабо регулярный экстендер $u: C_+(X)\to C_+(\Phi(X))$, определяемый соотношением $u(f)(\varphi)=\varphi(f)$. В силу теоремы 1 существует многозначная ретракция $r:\Phi(X)\to\exp X$, причем $r(\varphi)=\operatorname{supp}\varphi$. Очевидно, что r есть отображение «на», так как каждому непустому замкнутому подмножеству $F\subset X$ соответствует функционал φ, определяемый соотношением $\varphi(f)=\max\limits_{x\in F} f(x)$. Очевидно, что $\operatorname{supp}\varphi=F$. Осталось показать, что отображение инъективно. Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi(X)$ и $\varphi_1\neq\varphi_2$. Следовательно, существует функция $f\in C_+(X)$, такая, что $\alpha=\varphi_1(f)<\varphi_2(f)=\beta$. Возьмем произвольное число $\gamma\in(\alpha,\beta)$ и рассмотрим открытое множество $U=\{x\,|\,f(x)>\gamma\}$. Имеем $U\neq\varnothing$, так как $\gamma<\beta=\varphi_2(f)\leqslant\|f\|$. Из предложения 2 следует, что $U\cap\operatorname{supp}\varphi_1=\varnothing$. В силу того что γ — произвольное число из интервала (α,β), мы можем заключить, что $f(x)\leqslant\alpha$ для любого $x\in\operatorname{supp}\varphi_1$. Рассмотрим функцию $g=\max\{f,\alpha_X\}$. Из предложения 1 следует, что $\varphi_1(g)\leqslant\alpha$, но $\alpha=\varphi_1(f)\leqslant\varphi_1(g)\leqslant\alpha$, т. е. $\varphi_1(g)=\alpha$. Функция $h=g-\alpha_X$ принадлежит пространству $C_+(X)$. В силу слабой аддитивности φ_1 имеем $\varphi_1(g)=\varphi_1(h+\alpha_X)=\varphi_1(h)+\alpha=\alpha$, т. е. $\varphi_1(h)=0$. Из предложения 2 следует, что $\operatorname{supp}\varphi_1\subset h^{-1}(0)$. С другой стороны, $\varphi_2(h)>0$, так как $\varphi_2(h)+\alpha=\varphi_2(g)\geqslant\varphi_2(f)=\beta>\alpha$, а из предложения 1 вытекает, что $\operatorname{supp}\varphi_2\cap\{x\,|\,h(x)>0\}\neq\varnothing$. Таким образом, $\operatorname{supp}\varphi_1=\operatorname{supp}\varphi_2$. Теорема 2 доказана.

Используя результаты Э. ван Дауэна, А. В. Иванова и Л. В. Широкова, мы можем получить характеристики $\varkappa$-метризуемых и связных $\varkappa$-метрических бикомпактов.

Теорема 3. *Пространство* X — *$\varkappa$-метризуемый (связный и $\varkappa$-метризуемый) бикомпакт тогда и только тогда, когда для любого вложения* $X\subsetneq Y$ *существует монотонный (монотонный и ортогональный) экстендер.*

Доказательство. Пусть X — $\varkappa$-метризуемый (связный и $\varkappa$-метризуемый) бикомпакт. Рассмотрим λX — суперрасширение X [7]. Легко показать, что экстендер $u: C_+(X)\to C_+(\lambda X)$, определяемый формулой $u(f)(\xi)=\max\limits_{F\in\xi}\min\limits_{x\in F} f(x)$, является монотонным. Установим ортогональность u. Прежде всего отметим, что $\max\limits_{F\in\xi}\min\limits_{x\in F} f(x)=\min\limits_{F\in\xi}\max\limits_{x\in F} f(x)$. Действительно, из сцепленности ξ вытекает неравенство $\max\limits_{F\in\xi}\min\limits_{x\in F} f(x)\leqslant\min\limits_{F\in\xi}\max\limits_{x\in F} f(x)$. Пусть для некоторого $\xi\in\lambda X$ выполнено $\alpha=\max\limits_{F\in\xi}\min\limits_{x\in F} f(x)<\min\limits_{F\in\xi}\max\limits_{x\in F} f(x)=\beta$. Рассмотрим замкнутые в X множества $G_0=\left\{x\,|\,f(x)\leqslant\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right\}$ и $G_1=\left\{x\,|\,f(x)\geqslant\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right\}$. Так как $G_0\cup G_1=X$, то хотя бы одно из этих множеств содержится в ξ, например G_0. Тогда $\beta > \frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \max_{x\in G_0} f(x)$ и $\min_{F\in\xi} \max_{x\in F} f(x) < \beta$ — противоречие. Доказанное равенство было также независимо получено М. М. Чобаном. Пусть $f, g\in C_+(X)$ и $\min\{f, g\}=0_X$. Предположим, что $u(f)(\xi)>0$ для некоторого $\xi\in\lambda X$. Тогда $f^{-1}(0)\notin\xi$. Но $f^{-1}(0)\cup g^{-1}(0)=X$. Следовательно, $g^{-1}(0)\in\xi$, и $u(g)(\xi)=\min_{F\in\xi} \max_{x\in F} g(x)=0$, т. е. $\min\{u(f), u(g)\}=0_{\lambda X}$. Аналогично устанавливается, что из соотношения $\max\{f, g\}=1_X$ следует $\max\{u(f), u(g)\}=1_{\lambda X}$. Пространство λX естественно вложено в $Z=\lambda X\cup_{id} Y$. Так как λX — абсолютный экстензор в размерности нуль (абсолютный ретракт) [7, 8], то существует $v: C_+(\lambda X)\to C_+(Z)$ — аддитивный, однородный, слабо регулярный (аддитивный, мультипликативный, однородный, слабо регулярный) экстендер. Ясно, что v — монотонный (ортогональный и монотонный) экстендер. Искомый экстендер $w: C_+(X)\to C_+(Y)$ определяется так: $w(f)=v(u(f))\restriction Y$.

Предположим, что $X\subseteq I^\tau$ и $u: C_+(X)\to C_+(I^\tau)$ — монотонный (ортогональный и монотонный) экстендер. В силу теоремы Э. ван Дауэна [9, с. 25, теорема 4.1] существует регулярный оператор продолжения открытых множеств $e: O(X)\to O(I^\tau)$, а это по теореме Л. В. Широкова [10] влечет $\varkappa$-метризуемость X. Связность X следует из ортогональности u и связности тихоновского куба I^τ.

Перейдем к описанию категорной характеристики функтора P. Для этой цели рассмотрим подкатегорию CNF категории NF. Объектами CNF являются нормальные функторы из категории Comp в категорию выпуклых бикомпактов, лежащих в ЛВП, и непрерывных аффинных отображений. Морфизмы CNF — естественные преобразования с аффинными компонентами.

Определение 4 [11]. Объект a называется начальным объектом категории K, если для любого объекта $b\in K$ множество $\mathrm{Mor}(a, b)$ состоит ровно из одного элемента.

Теорема 4. *Функтор P является начальным объектом категории CNF, причем для любого объекта $F\in CNF$ все компоненты естественного преобразования $\eta: P\to F$ суть вложения.*

Доказательство. Рассмотрим F из CNF и построим естественное преобразование $\eta: P\to F$. Так как $\mathrm{Id}\subseteq F$, то $X\subseteq F(X)$. В силу предложения 1.1 [12] отображение $\eta_X: P(X)\to F(X)$, которое каждой мере $\mu\in P(X)$ ставит в соответствие ее центр тяжести, лежащий в $[\mathrm{conv}\, X]\subset F(X)$, будет непрерывным и аффинным. Очевидно, таким образом заданное отображение $\eta=\{\eta_X\}$ будет естественным преобразованием, причем единственным, так как η_X однозначно определяется на мерах с конечными носителями. Установим инъективность η_X для любого объекта $X\in\mathrm{Comp}$. Рассмотрим конечное пространство X. Покажем, что $\mathrm{conv}\, X$ — выпуклая оболочка X в $F(X)$ — является симплексом размерности $|X|-1$. Действительно, если это не так, то $\dim \mathrm{conv}\, X\leqslant |X|-2$. По теореме Радона (см. [13, с. 21, теорема 2.7]) X можно разбить на две дизъюнктные части Y и Z так, что $\mathrm{conv}\, Y\cap\mathrm{conv}\, Z\neq\varnothing$. Рассмотрим отображение $g: X\to 2$, такое, что $g(Y)=0$ и $g(Z)=1$. Так как $F(g): F(X)\to F(2)$ — аффинное отображение, то $F(g)(\mathrm{conv}\, Y)=0$ и $F(g)(\mathrm{conv}\, Z)=1$, но этого не может быть, поскольку $\mathrm{conv}\, Y\cap\mathrm{conv}\, Z\neq\varnothing$. Итак, для любого конечного X множество $\mathrm{conv}\, X$ — симплекс размерности $|X|-1$, а это означает, что η_X — инъективное отображение. В силу непрерывности функторов отсюда следует инъективность отображения η_X для любого нульмерного X. Далее, если X, Y — метризуемые бикомпакты и $g: X\to Y$ — неприводимое отображение, то $F(g):\eta_X(P(X))\to\eta_Y(P(Y))$ неприводимо, так как существует всюду плотное множество Z точек однозначности g, а множество $\operatorname{conv} Z$ — всюду плотное в $\eta_X(P(X))$ множество точек однозначности отображения $F(g)\restriction\eta_X(P(X))$. Отсюда заключаем, что для метризуемого бикомпакта X отображение $\eta_X: P(X)\to\eta_X(P(X))$ неприводимо. По теореме П. С. Александрова в $P(X)$ существует всюду плотное G_δ-множество $\Gamma(X)$ точек однозначности η_X, т. е. если $\mu\in\Gamma(X)$, то $\mu=\eta_X^{-1}\eta_X(\mu)$. Отметим, что $\delta_X\in\Gamma(X)$ для любого $x\in X$. Легко видеть, что множество $\Gamma(X)$ инвариантно относительно действия группы $\operatorname{Auth}(X)$ автогомеоморфизмов пространства X, т. е. если $\mu\in\Gamma(X)$, $g\in\in\operatorname{Auth}(X)$, то $P(g)(\mu)\in\Gamma(X)$. Для метризуемого бикомпакта X без изолированных точек подпространство непрерывных мер является всюду плотным в $P(X)$ множеством типа G_δ. Действительно, пусть $M_n=$ $=\left\{\mu\in P(x)\mid \text{существует точка } x, \text{ такая, что } \mu(\{x\})\geqslant\frac{1}{n}\right\}$. Покажем, что M_n — замкнутое нигде не плотное в $P(X)$ множество. Пусть $\{\mu_i\}\subset M_n$ и $\mu=\lim\limits_{i\to\infty}\mu_i$. Для любого $i\in N$ существует точка $x_i\in X$, такая, что $\mu_i(\{x_i\})\geqslant\frac{1}{n}$. Из последовательности $\{x_i\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$. Рассмотрим $x=\lim\limits_{k\to\infty}x_{i_k}$. Используя свойство сходимости в пространстве $P(X)$ [14, с. 21, теорема 2.1], получаем, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\mu_{i_k}(B(x,\varepsilon))\leqslant\mu(B(x,\varepsilon))$ для любого замкнутого шара $B(x,\varepsilon)$ с центром x радиуса ε. Но левая часть неравенства не меньше $\frac{1}{n}$. Следовательно, $\mu(B(x,\varepsilon))\geqslant\frac{1}{n}$ для любого $\varepsilon>0$, т. е. $\mu(\{x\})\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{n}$. Замкнутость множества M_n доказана. Покажем, что M_n нигде не плотно. Пусть $\mu\in M_n$ и возьмем конечное множество $A=\{x_i\mid i\in\overline{1,l}\}$ всех точек из X, для каждой из которых справедливо неравенство $\mu(\{x_i\})\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{n}$. Для любого $i\in\overline{1,l}$ определим $n+1$ последовательностей точек $\{x^i_{kj}\mid k\in\overline{1,\,n+1};\ j\in N\}$, таких, что $\mu(\{x^i_{kj}\})=0$ при любых i,j,k, $\lim\limits_{j\to\infty}x^i_{kj}=x_i$ и $x^i_{kj}\neq x^{i'}_{k'j'}$ при $(i,j,k)\neq(i',j',k')$. Определим меры $\mu_j\in$ $\in P(X)$ так: $\mu_j(\{x_i\})=0$ для любого $i\in\overline{1,\,l}$, $\mu_j(\{x^i_{kj}\})=\frac{\mu(\{x_i\})}{n+1}$ и $\mu_j(B)=$ $=\mu(B)$, если борелевское множество B не содержит точек множества $\{x_i\mid i\in\overline{1,l}\}\cup\{x^i_{kj}\mid i\in\overline{1,l};\ k\in\overline{1,\,n+1};\ j\in N\}$. Тогда $\mu_j\notin M_n$ для любого $j\in N$ и $\lim\limits_{j\to\infty}\mu_j=\mu$, т. е. M_n нигде не плотно. Итак, мы показали, что множество всех непрерывных мер является всюду плотным G_δ-множеством в $P(X)$. Кроме того, легко видеть, что множество всех локально положительных мер (мера непустого открытого множества положительна) также является плотным G_δ-множеством. Следовательно, для метризуемого бикомпакта X без изолированных точек множество всех непрерывных локально положительных мер является всюду плотным G_δ-множеством в $P(X)$, т. е. пересекает $\Gamma(X)$. Отсюда заключаем, что для гильбертова куба Q множество $\Gamma(Q)$ содержит непрерывную локально положительную меру. Но в силу результата Окстоби и Прасада [15] любые две непрерывные, локально положительные, вероятностные меры на Q гомеоморфны, т. е. в нашей терминологии принадлежат одной орбите действия $\operatorname{Auth}(Q)$ на $P(Q)$. А это означает, как отмечалось выше, что любая такая мера лежит в $\Gamma(Q)$. Теперь мы готовы завершить доказательство инъективности η_X. Рассмотрим метризуемый бикомпакт X и две различные меры $\mu, \nu \in P(X)$. Возможны следующие случаи.

1. $\operatorname{supp}\mu \neq \operatorname{supp}\nu$. Пусть $\operatorname{supp}\mu \setminus \operatorname{supp}\nu \neq \varnothing$. Тогда определим непрерывное отображение $g: X \to I = [0, 1]$, такое, что $g(\operatorname{supp}\nu) = 0$, $g(\operatorname{supp}\mu) \neq \neq 0$. Тогда $P(g)(\nu) = \delta_0 \neq P(g)(\mu)$. Как отмечалось выше, меры Дикара являются точками однозначности компонент η, т. е. $\delta_0 \in \Gamma(I)$ или $\eta_I(P(g)(\nu)) \neq \eta_I(P(g)(\mu))$ и $\eta_X(\mu) \neq \eta_X(\nu)$.

2. $\operatorname{supp}\mu = \operatorname{supp}\nu$. Без ограничения общности можно считать, что $X = \operatorname{supp}\mu$. Так как $\mu \neq \nu$, то существует такое замкнутое в X множество B, что $\mu(B) \neq \nu(B)$. Определим непрерывное отображение $g: X \to I$, такое, что $B = g^{-1}(0)$. Тогда $P(g)(\mu) \neq P(g)(\nu)$. Если $0 \notin \operatorname{Int}_I g(X)$, то существует последовательность $\{t_i\} \subset I \setminus g(X)$, такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = 0$ Поскольку $P(g)(\mu)(\{0\}) \neq P(g)(\nu)(\{0\})$, то найдется такой индекс j, что $P(g)(\mu)([0, t_i]) \neq P(g)(\nu)([0, t_j])$. Определим отображение $h: g(X) \to 2$ следующим образом: $h(t) = 0$, если $t < t_j$, и $h(t) = 1$, если $t > t_j$. По построению $P(hg)(\mu) \neq P(hg)(\nu)$, следовательно, инъективность отображения η_2 влечет неравенство $\eta_X(\mu) \neq \eta_X(\nu)$. Предположим теперь, что $0 \in \in \operatorname{Int}_I g(X)$. Следовательно, $[0, t_0] \subset g(X)$ для некоторого t_0. Определим отображение $h: g(X) \to [0, t_0] = Y: h(t) = t$, если $t \leqslant t_0$, и $h(t) = t_0$, если $t > t_0$. Мы получили $\mu_1 = P(hg)(\mu)$ и $\nu_1 = P(hg)(\nu)$ — две неравные локально положительные меры на пространстве Y, гомеоморфном отрезку. Предположим, что $\eta_Y(\mu_1) = \eta_Y(\nu_1)$. Рассмотрим меру Лебега $\lambda \in \in P(Q)$, пространство $Z = Y \times Q$ и меры $\mu_2 = \mu_1 \otimes \lambda$, $\nu_2 = \nu_1 \otimes \lambda$. Отметим, что Z гомеоморфно Q, а μ_2, ν_2 — непрерывные и локально положительные меры; следовательно, $\mu_2, \nu_2 \in \Gamma(Z)$. По теореме Фубини [16, с. 73, замечание] получаем, что $\eta_Z(\mu_2) = \eta_Z(\nu_2)$, чего не может быть, так как $\mu_2 \neq \nu_2$. Таким образом, η_X инъективно для любого метризуемого бикомпакта X, а в силу свойства непрерывности нормальных функторов и в общем случае. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи матем. наук. 1981. **36**, вып. 3. 3—62.
2. Шапиро Л. Б. Категорная характеристика гиперпространства // Успехи матем. наук. 1988. **43**, вып. 4. 227—228.
3. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций М., 1970.
4. Haydon R. On problem of Pelczynski: Milutin spaces, Dugundji spaces and *AE* (dim 0) // Stud. Math. 1974. **52**, N 1. 23—31.
5. Непомнящий Г. М. О спектральном разложении многозначных абсолютных ретрактов//Успехи матем. наук. 1981. **36**, вып. 3. 221—222.
6. Федорчук В. В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи матем. наук. 1984. **39**, вып. 5. 169—208.
7. Иванов А. В. Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов // Докл. АН СССР. 1981. **259**, № 2. 275—278.
8. Иванов А. В. Решение проблемы Ван Милла о характеризации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Докл. АН СССР. 1982. **262**, № 3. 526—528.
9. Douwen E. K. van. Simultaneous extension of continuous functions. Amsterdam, 1975.
10. Широков Л. В. Внешняя характеристика пространств Дугунджи и каппа-метризуемых бикомпактов // Докл. АН СССР. 1982. **263**, № 5. 1073—1077.
11. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
12. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М., 1968.
13. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М., 1985.

14. Б и л л и н г с л и П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
15. O x t o b y J. C., P r a s a d V. S. Homeomorphic measures in the Hilbert cube // Pacif. J. Math. 1978. 77, N 2. 483—497.
16. Б у р б а к и Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М., 1977.

Поступила в редакцию
13.02.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 1

УДК 515.12, 517.98

В. В. Федорчук

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ БАРИЦЕНТРА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Для любого выпуклого бикомпакта K, лежащего в отделимом локально выпуклом пространстве, определено отображение $b=b_K: P(K)\to K$ барицентра вероятностных мер (см. [1]). Это отображение непрерывно, а для $K=P(X)$ имеем $b_{P(X)}=\psi_X$ (см. [1]), где $\psi_X: P^2(X)\to P(X)$ — ретракция монады вероятностных мер.

В § 1 получены необходимые и достаточные условия того, что отображение b_K открыто. С их помощью мы показываем, что ретракция монады $\psi: P^2\to P$ есть открытое преобразование. В § 3 доказано, что для выпуклого компакта K из открытости отображения $b: P(K)\to K$ вытекает, что оно является тривиальным расслоением со слоем гильбертов куб Q над дополнением до множества $E(K)$ всех экстремальных точек. Важным вспомогательным элементом в доказательстве является лемма об аппроксимационной селекции (§ 2). Недостающую информацию о пространстве мер и о ковариантных функторах читатель найдет в [1, 2]. Результаты работы сформулированы в [1].

§ 1. Об открытости отображения барицентра

Через K будем обозначать выпуклый бикомпакт, лежащий в некотором локально выпуклом пространстве E.

Л е м м а 1. *Для любой точки $x\in K$ в множестве $b^{-1}(x)$ всюду плотно множество мер с конечными носителями.*

Это утверждение фактически доказано в [3, гл. IV, § 7, предложение 3].

Точку $a=\{y_1, ..., y_n\}\in \exp_n K$ назовем *отмеченной* относительно точки $x\in K$, если $x\in \mathrm{conv}\{y_1, ..., y_n\}$. Множество всех отмеченных относительно x точек обозначим через $c_n(x)$.

Л е м м а 2. *Множество $c_n(x)$ замкнуто в* $\exp_n K$.

В самом деле, пусть $a=\{y_1, ..., y_k\}\in \exp_n K\setminus c_n(x)$. Это означает существование такой выпуклой симметричной окрестности V нуля в E, что $(x+V)\cap \mathrm{conv}\{y_1, ..., y_k\}=\varnothing$. Уменьшив в случае необходимости эту окрестность, можно считать, что $(y_i+V)\cap(y_j+V)=\varnothing$ при $i\neq j$. Положив $Oa=O\langle y_1+V, ..., y_k+V\rangle\cap \exp_n K$, несложной проверкой убеждаемся в том, что $Oa\cap c_n(x)=\varnothing$.

Таким образом, для всякого выпуклого бикомпакта K и для всякого натурального n определено отображение $c_n: K\to \exp(\exp_n K)$.

Т е о р е м а 1. *Отображение барицентра b_K открыто тогда и только тогда, когда для всякого натурального n непрерывно отображение c_n.*