1976 г. март — апрель *т. XXXI, вып. 2 (188)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ ОДНОЙ КАТЕГОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ В НЕЙ

А. Д. Бендиков

1. В предлагаемой статье мы рассматриваем некоторую категорию $\mathscr{M}$ непрерывных марковских процессов и устанавливаем свойства непрерывности и компактности семейства гармонических функций для процессов из этой категории, аналогичные соответствующим свойствам обычных гармонических функций. Мы изучаем также проективные пределы в этой категории. Категория $\mathscr{M}$, вообще говоря, не замкнута относительно проективного предельного перехода. Мы приводим условия, необходимые и достаточные, обеспечивающие существование в этой категории проективного предела у заданной последовательности процессов.

2. В этом пункте мы напомним определения некоторых понятий, которыми будем пользоваться. Пусть E — локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой, $E_\delta = E \cup \{\delta\}$ — его компактификация Александрова и C_0 — банахово пространство непрерывных функций на E_δ, обращающихся в 0 в точке δ.

Однородный марковский процесс $X = (x_t, \xi, M_t, P^x)$ называется C_0-процессом, если семейство операторов $\{P_t\}_{t>0}$ $P_t\colon f \to M_\cdot(f(x_t))$ переводит пространство C_0 в себя и образует там непрерывную полугруппу сжатий.

Однородный марковский процесс $\hat{X} = (\hat{x_t}, \hat{\xi}, \hat{\mathscr{M}}_t, \hat{P}^x)$ называется двойственным к X относительно некоторой меры Радона ν, если для любых ограниченных борелевских функций f и g выполняется равенство $\int P_t f(x)\, g(x)\, \nu(dx) = \int f(x)\, \hat{P}_t g(x)\, \nu(dx)$.

Функцию $N(z)$ $(z \in E \times E)$ мы будем называть взаимной функцией Грина процессов X и $\hat{X}$, если выполняются условия

1°. При фиксированном y функция $N(x, y)$ эксцессивна для X и при фиксированном x эксцессивна для $\hat{X}$.

2°. Для любой ограниченной борелевской функции f

$$\int N(x, y)\, f(y)\, \nu(dy) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt.$$

3. Будем обозначать через $\mathscr{M}$ категорию, множеством объектов которой $\mathrm{Ob}\,\mathscr{M} = \{A, B, \ldots\}$ служит семейство упорядоченных наборов $A = \{E, \nu; X, \hat{X}\}$, где E — локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой, ν — плотная мера Радона на E, X и $\hat{X}$ — непрерывные C_0-процессы, двойственные относительно меры ν, взаимная функция Грина которых $N(x, y)$ удовлетворяет условиям

(N.1) Функция $N(z)$ непрерывна в расширенном смысле на $E \times E$, конечна вне диагонали $\Delta = \{x = y\}$ и на Δ равна $+\infty$.

(N.2) Для любой ограниченной борелевской функции f с компактным носителем функции $x \to \int N(x, y) f(y) \nu(dy)$, $x \to \int N(y, x) f(y) \nu(dy)$ ограничены и непрерывны.

Множество $\mathrm{Hom}(A, B)$ объектов $A = \{E, \nu, X, \hat{X}\}$ и $B = \{E', \nu'; X', \hat{X}'\}$ состоит из отображений π: $E' \to E$, удовлетворяющих условиям

(П.1) Отображение π непрерывно.

(П.2) Каков бы ни был компакт $K \subset E$, множество $\pi^{-1}(K)$ компактно в E'.

(П.3) $X = \pi(X')$, $\hat{X} = \pi(\hat{X}')$ (см. [1], стр. 448).

4. Теперь мы можем перейти к описанию свойств гармонических функций для процесса X, участвующего в определении категории $\mathscr{M}$.

Открытое относительно компактное множество $V \subset E$ мы назовем регулярным, если выполняется условие $P^x\{\tau > 0\} = 0$ ($\forall\, x \in \partial V$), в котором τ — момент первого выхода траектории процесса X из V после $+0$, ∂V — топологическая граница множества V.

Теорема 1. *Пусть $\{E, \nu; X, \hat{X}\} \in \mathcal{O}\, b\mathscr{M}$ и V — открытое подмножество E, тогда* а) *гармонические функции для процесса X в V непрерывны,* б) *если V — регулярное множество и φ — непрерывная функция на ∂V, то функция $f(x) = M_x\, \varphi(x_\tau)$ является единственной непрерывной функцией на $V \cup \partial V$, гармонической в V и равной φ на ∂V,* в) *семейство регулярных множеств образует базу топологии E,* г) *любая монотонно возрастающая последовательность гармонических функций в области V для процесса X сходится к гармонической функции, если она ограничена хотя бы в одной точке.*

Отметим, что хотя в формулировке теоремы 1 двойственный процесс $\hat{X}$ не участвует, в доказательстве ее существование этого процесса существенно используется. При наличии у процесса X свойств а) — г) и условия пропорциональности потенциалов с точечными носителями может быть доказано (см. [2]) существование процесса $\hat{X}$, причем взаимная функция Грина $N(x, y)$ будет обладать свойствами (N.1) и (N.2), кроме, быть может, особенности на Δ.

5. Перейдем к изучению проективных пределов в категории $\mathscr{M}$. Пусть $\{A_n; \pi_{mn}\}$ — проективная последовательность объектов $A_n = \{E_n, \nu_n, X_n, \hat{X}_n\}$ из категории $\mathscr{M}$. Обозначим через E проективный предел последовательности $\{E_n; \pi_{mn}\}$ топологических пространств E_n. В силу свойств (П.1) и (П.2) E — локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой. Пусть $\pi_{n\infty}$ — каноническое отображение E на E_n и $p(t, x; -)$ и $\hat{p}(t, x; -)$ — переходные функции на E, которые определяются следующим образом:

$$p(t, x; \pi_{n\infty}^{-1}(\Gamma)) = p_n(t, \pi_{n\infty}(x); \Gamma), \quad \hat{p}(t, x; \pi_{n\infty}^{-1}(\Gamma)) = \hat{p}_n(t, \pi_{n\infty}(x); \Gamma),$$

где p_n и $\hat{p}_n$ — переходные функции процессов X_n и $\hat{X}_n$. Пусть X и $\hat{X}$ — однородные марковские процессы, соответствующие переходным функциям p и $\hat{p}$.

Теорема 2. *Марковские процессы X и $\hat{X}$ являются непрерывными C_0-процессами, двойственными относительно некоторой плотной меры Радона ν на E.*

Примеры показывают (см. [3]), что набор $\{E, \nu; X, \hat{X}\}$, вообще говоря, не принадлежит множеству $\mathcal{O}b\mathscr{M}$. Пусть $N_n(z)$ ($z \in E_n \times E_n$) — взаимная функция Грина процессов X_n и $\hat{X}_n$. Для функции $N_n \circ (\pi_{n\infty} \times \pi_{n\infty})(z)$ ($z \in E \times E$) мы сохраним обозначение $N_n(z)$. Образуем функцию $N(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf N_n(z)$.

Теорема 3. *Набор $\{E, \nu; X, \hat{X}\}$ принадлежит множеству $\mathcal{O}b\mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда функция Nz удовлетворяет условиям (N.1) и (N.2).*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Маровские процессы, М., Физатгиз, 1963.

[2] J. Taylor, Duality and the Martin compactifification, Ann. Inst. Fourier 22: 3(1972).

[3] А. Д. Бендиков, Пространственно однородные, непрерывные марковские процессы на абелевых группах и гармонические структуры, УМН 29: 5(1974), 260—261.

Поступило в Правление общества 10 ноября 1974 г.