И. Н. Балаба, О слабо примитивных градуированных кольцах,
УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 139–140

https://www.mathnet.ru/rm456

О СЛАБО ПРИМИТИВНЫХ ГРАДУИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ

И. Н. Балаба

Наиболее сильным обобщением классической теоремы плотности Джекобсона для первичных колец является теорема Зельмановича, опубликованная в [1], где было дано полное описание слабо примитивных колец. В работе дано описание градуированных слабо примитивных колец, основанное на градуированной версии теоремы Зельмановича [2].

Пусть G – полугруппа, H – группа и A – (H,G)-полигон. Следуя [3], назовем полигон A_G *строго точным*, если из того, что $ag_1 = ag_2$ $(a \in A,\ g_1, g_2 \in G)$, следует, что $g_1 = g_2$. Далее будем считать, что A является строго точным правым G-полигоном и левым H-полигоном, и полугруппа G действует на нем инъективно, т.е. если $a_1 g = a_2 g$, то $a_1 = a_2$.

Всюду далее R – G-градуированное кольцо, M – A-градуированный правый R-модуль, $\mathrm{END}(M_R)$ – H-градуированное кольцо эндоморфизмов, $h(R)$ – множество однородных элементов кольца R. Градуированным по группе G кольцам посвящена монография [4], в [5] градуировка колец и модулей рассматривалась по полугруппе, а в [6] были рассмотрены модули, градуированные множеством, на котором действует группа G.

Напомним некоторые определения.

Модуль M называется *критически сжимаемым*, если он вкладывается однородным гомоморфизмом в каждый свой ненулевой градуированный подмодуль и не вкладывается ни в какой свой собственный фактор-модуль. Градуированное кольцо называется *слабо примитивным*, если оно обладает точным критически сжимаемым градуированным модулем. Градуированное кольцо R называется *первичным*, если для любых градуированных идеалов I и J кольца R из $IJ = 0$ следует, что либо $I = 0$, либо $J = 0$.

Предложение 1. *Градуированное слабо примитивное кольцо первично.*

Доказательство. Пусть M_R – точный критически сжимаемый градуированный R-модуль. Если $I \neq 0$ и $J \neq 0$ – градуированные идеалы кольца R, то $MI \neq 0$ и $MJ \neq 0$. Так как M_R сжимаем, то существует мономорфизм $f \in h(\mathrm{HOM}_R(M, MI))$. Тогда $0 \neq f(MJ) = f(M)J \subseteq MIJ$. Таким образом, $IJ \neq 0$ и, следовательно, R – первичное кольцо.

Пусть, далее, полигон ${}_H A_G$ обладает следующим свойством: для любых $a_1, \dots, a_n \in A$, $h \in H$ существуют такие элементы $g_{ij} \in G$, что $ha_i = a_j g_{ij}$.

Легко видеть, что в этом случае кольцо матриц $M_n(S)$ над H-градуированным кольцом S можно рассматривать как G-градуированное кольцо $M_n(S)(a_1, \dots, a_n)$, где

$$M_n(S)_g(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} S_{a_1 g a_1^{-1}} & S_{a_1 g a_2^{-1}} & \dots & S_{a_1 g a_n^{-1}} \\ S_{a_2 g a_1^{-1}} & S_{a_2 g a_2^{-1}} & \dots & S_{a_2 g a_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{a_n g a_1^{-1}} & S_{a_n g a_2^{-1}} & \dots & S_{a_n g a_n^{-1}} \end{pmatrix},$$

здесь через $a_i g a_j^{-1}$ обозначен такой элемент $h \in H$, для которого $ha_j = a_i g$, если же такого h не существует, то положим $S_{a_i g a_j^{-1}} = 0$.

Предложение 2. *Пусть V – конечномерное A-градуированное векторное пространство над H-градуированным телом Δ с базисом $v_1, \dots, v_n$, где $v_i \in V_{a_i}$. Тогда* $\mathrm{End}({}_\Delta V) = \mathrm{END}({}_\Delta V) \approx M_n(\Delta)(a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{End}({}_\Delta V)$, тогда $(v_i)f = \sum_{j=1}^n d_{ij} v_j$, где $d_{ij} \in \Delta$, и пусть $d_{ij} = \sum_{k=1}^{t_{ij}} d_{ij}^k$, где $d_{ij}^k \in \Delta_{h_{ij}^k}$. В силу условий, наложенных на полигон, существуют такие $g_{ij}^k \in G$, что $h_{ij}^k a_j = a_i g_{ij}^k$. Легко проверить, что $(V_a)f \subseteq \sum_{g \in T} V_{ag}$, где $T = \{g_{ij}^k\}$, и, следовательно, $\mathrm{End}({}_\Delta V) = \mathrm{END}({}_\Delta V)$.

Если же $f \in \mathrm{END}({}_\Delta V)_g$, то в представлении $(v_i)f = \sum_{i=1}^n d_{ij}v_j$ все элементы d_{ij} можно считать однородными и $\deg(d_{ij})a_j = a_i g$. Таким образом, отображение $\Phi\colon f \mapsto (d_{ij})$ определяет изоморфизм градуированных колец $\mathrm{END}({}_\Delta V)$ и $M_n(\Delta)(a_1,\dots,a_n)$.

Градуированное подкольцо R кольца Q назовем *градуированным правым порядком в* Q, если Q содержит единицу и для любого $q \in h(Q)$ найдутся такие $r,s \in h(R)$, причем s – обратимый в Q, для которых $q = rs^{-1}$.

Теорема 3. *Пусть R – градуированное слабо примитивное кольцо. Тогда: либо (1) R – правый порядок в матричном кольце $M_n(\Delta)$ для некоторого градуированного тела Δ (в этом случае R содержит градуированное подкольцо, изоморфное $M_n(D)$ для некоторого градуированного правого порядка D в Δ); либо (2) для каждого положительного целого числа n существуют градуированный правый порядок D тела Δ и градуированное подкольцо кольца R, которое гомоморфно отображается на $M_n(D)$.*

Доказательство. Пусть M_R – точный критически сжимаемый A-градуированный модуль, тогда $\Delta = \mathrm{END}(\overline{M}_R)$ – H-градуированное тело и $\overline{M} = \Delta M$ (здесь $\overline{M}$ – градуированная квазиинъективная оболочка модуля M).

Предположим, что $\dim_\Delta \overline{M} \geqslant n$, тогда можно выбрать Δ-линейно независимые элементы $m_1,\dots,m_n \in h(M)$ $(m_i \in M_{a_i})$. Для каждого $i = 1,\dots,n$ положим $A_i = \bigcap_{j\ne i} m_j^r$. По теореме слабой плотности [7] $m_iA_i \ne 0$, тогда $N = \bigcap_{i=1}^n m_iA_i \ne 0$.

Положим $D_h = \{a \in \Delta_h \mid aM \subseteq N\}$, $D = \bigoplus_{h\in H} D_h$. Если $0 \ne \lambda \in h(\Delta)$, то $\lambda^{-1}(N) \cap N \ne 0$ и существует мономорфизм $a \in h(D)$, для которого $aM \subseteq \lambda^{-1}(N) \cap N$. Следовательно, $0 \ne \lambda a \in D$ и D – градуированный правый порядок в Δ.

Пусть далее $W_n = \sum_{i=1}^n Dm_i$, $W_n' = \sum_{i=1}^n D^1 m_i$ (D^1 – теоретико-множественное объединение D и множества рациональных чисел) и $\varphi \in \mathrm{HOM}_D(W',W)_g$. Тогда $(m_i)\varphi = \sum_{j=1}^n d_{ij}m_j$ для подходящих $d_{ij} \in h(D)$. Поскольку $d_{ij}m_j \in h(N)$, то $d_{ij}m_j = m_ir_{ij}$ для некоторых $r_{ij} \in (A_i)_g$. Таким образом, $(m_i)\varphi = \sum_{j=1}^n m_ir_{ij} = m_ir_i$, где $r_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \in (A_i)_g$. Положив $r = \sum_{i=1}^n r_i$, получим, что $(m_i)\varphi = m_ir$ для всех $i = 1,\dots,n$.

Легко видеть, что $S = \{s \in R \mid W's \subseteq W\}$ является градуированным подкольцом кольца R. Отображение $s \mapsto r_s|_{W'}$, где r_s – правое умножение на элемент s, определяет гомоморфизм кольца S на $\mathrm{HOM}_D(W',W) \approx M_n(D)(a_1,\dots,a_n)$ с ядром $K = \{r \in R \mid W'r = 0\}$.

Если же $\dim_\Delta \overline{M} = n$, то элементы $m_1,\dots,m_n \in h(M)$ образуют базис ${}_\Delta\overline{M}$ и $K = 0$. Таким образом, R содержит градуированное подкольцо, изоморфное $M_n(D)(a_1,\dots,a_n)$ для некоторого градуированного правого порядка D в Δ.

Полагая $U = U' = \overline{M}$ в условии (3) теоремы из [2], получим, что для любого $f \in \mathrm{END}({}_\Delta\overline{M})$ существуют такие $r,s \in R$, что $(fr - s)|_U = 0$ и $r|_{U'}$ является градуированным автоморфизмом. Таким образом, R является правым порядком в кольце $\mathrm{END}({}_\Delta\overline{M}) = \mathrm{End}({}_\Delta\overline{M}) \approx M_n(\Delta)$.

В заключение приношу искреннюю благодарность А. В. Михалёву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] J. Zelmanowitz // Comm. Algebra. 1981. V. 9. №1. P. 23–45. [**2**] С. В. Зеленов // УМН. 2001. Т. 56. №3. С. 167–168. [**3**] M. Kilp, U. Krauner, A. V. Mikhalev. Monoids, Acts and Categories. Berlin: de Gruyter, 2000. [**4**] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen. Graded Ring Theory. Amsterdam: North-Holland, 1982. [**5**] G. Abrams, C. Menini, A. del Rio // Comm. Algebra. 1994. V. 22. №13. P. 5343–5388. [**6**] C. Năstăsescu, S. Raianu, F. van Oystaeyen // Math. Z. 1990. V. 203. №4. P. 605–627. [**7**] С. В. Зеленов // Труды 6-х математических чтений МГСУ. М.: МГСУ, 1999. С. 107–110.

Тульский государственный
педагогический университет им. Л. Н. Толстого
E-mail: `IBalaba@mail.ru`

Принято редколлегией
24.09.2001