Я. А. Ройтберг, В. А. Сердюк, Теория разрешимости в обобщенных функциях эллиптических задач с параметром для общих систем уравнений, *Тр. ММО*, 1990, том 53, 229–258

УДК 517.946

ТЕОРИЯ РАЗРЕШИМОСТИ В ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ОБЩИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Я. А. Ройтберг, В. А. Сердюк

Введение

Эллиптические задачи с параметром изучались в известных работах [1] и [2], результаты которых развивались и обобщались многими математиками. При этом эллиптические задачи рассматривались в классах достаточно гладких функций, по меньшей мере принадлежащих $H^{2m}(G)$, где $2m$ — порядок уравнения. В классах обобщенных функций такие задачи для одного уравнения изучались в работе [3], где доказана теорема о полном наборе изоморфизмов: построено семейство пар пространств, зависящих от действительного параметра s, такое, что оператор задачи устанавливает изоморфизм между пространствами каждой пары с номером s. В виде приложения в [3] получена оценка для резольвенты работ [1, 4] также и в классах обобщенных функций и доказана теорема о существовании и единственности решения задачи, полученной возмущением сингулярными членами эллиптической задачи с параметром.

В данной работе эти результаты устанавливаются для систем уравнений с параметром, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу. Отметим, что метод транспонирования, обычно применявшийся для доказательства теорем о полном наборе изоморфизмов (см., например, [5, 6]), здесь неприменим. Поэтому предлагается новая методика, которая может оказаться полезной и в других случаях.

§ 1. Определение эллиптической задачи с параметром

В ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$ с границей ∂G рассматривается система уравнений

$$l(x, D, q)u=f \quad (\text{в } G). \tag{1.1}$$

Здесь $l=l(x, D, q)=(l_{rj}(x, D, q))_{r,j=1}^{N}$ — квадратная матрица порядка N дифференциальных выражений с комплексными коэффициентами, достаточно гладкими по x и зависящими полиномиальным образом от параметра, имеющая структуру Дуглиса—Ниренберга [7—9]:

$$l_{rj}(x, D, q)=\sum_{|\mu|+k\leqslant s_r+t_j} a_{\mu k}^{rj}(x)(qe^{i\theta})^k D^{\mu} \quad (\forall r, j: s_r+t_j\geqslant 0), \tag{1.2}$$

$$l_{rj}(x, D, q)\equiv 0 \quad (\forall r, j: s_r+t_j<0);$$

$\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $|\mu|=\mu_1+\ldots+\mu_n$, $D^{\mu}=D_1^{\mu_1}\ldots D_n^{\mu_n}$, $D_k=i\partial/\partial x_k$, $q\in\mathbb{R}$, $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$ (не исключается случай $\theta_1=\theta_2=\theta$); $t_1\geqslant\ldots\geqslant t_N\geqslant 0=$

$=s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_N$; u и f — искомый и заданный функциональные столбцы высоты N.

Систему (1.1) будем называть эллиптической с параметром, если в каждой точке $x \in \bar{G}$ для произвольных $\xi \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}$ $(|\xi|+|q| \neq 0)$, и $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$L(x, \xi, q) = \det (l^0_{rj}(x, \xi, q))^N_{r,j=1} \neq 0, \tag{1.3}$$

где

$$l^0_{rj}(x, \xi, q) = \sum_{|\alpha|+k=s_r+t_j} a^{rj}_{\alpha k}(x)(qe^{i\theta})^k \xi^\alpha \ (\forall r, j : s_r + t_j \geqslant 0),$$

$$l^0_{rj}(x, \xi, q) \equiv 0 \ (\forall r, j : s_r + t_j < 0).$$

Она называется правильно эллиптической с параметром, если в каждой точке $x \in \partial G$ многочлен $L(\eta) = L(x, \tau + \eta\nu, q)$ имеет четную степень $2m = t_1 + \ldots + t_N + s_1 + \ldots + s_N$ и m его корней имеют положительную мнимую часть; здесь $\tau \in \mathbf{R}^n$ — произвольный вектор, касательный к ∂G в точке x, а ν — орт внутренней нормали в этой точке, $|\tau| + |q| \neq 0$. $L(\eta) = L_+(\eta) L_-(\eta)$, где $L_+(\eta)$ $(L_-(\eta))$ — многочлен степени m, все корни которого лежат выше (ниже) вещественной оси.

На ∂G заданы граничные условия

$$b(x, D, q) u|_{\partial G} = g. \tag{1.4}$$

Здесь $b = b(x, D, q) = (b_{hj}(x, D, q))_{\substack{h=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,N}}$ — прямоугольная матрица размера $m \times N$; $g(x)$ $(x \in \partial G)$ — заданный функциональный столбец высоты m,

$$b_{hj}(x, D, q) = \sum_{|\alpha|+k \leqslant \sigma_h + t_j} b^{hj}_{\alpha k}(x)(qe^{i\theta})^k D^\alpha \ (\forall h, j : \sigma_h + t_j \geqslant 0),$$

$$b_{hj}(x, D, q) \equiv 0 \ (\forall h, j : \sigma_h + t_j < 0), \tag{1.5}$$

$\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — произвольные заданные целые числа.

Определение 1. *Граничную задачу* (1.1), (1.4) *будем называть эллиптической с параметром, если система* (1.1) *правильно эллиптическая с параметром и выполнены условия Лопатинского: в каждой точке $x \in \partial G$ для каждого $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ строки матрицы*

$$\left(\sum_{j=1}^N b^0_{hj}(x, \tau + \nu\eta, q) L_{rj}(x, \tau + \nu\eta, q)\right)_{h=1,\ldots,m;\, r=1,\ldots,N},$$

элементы которой рассматриваются как многочлены от η, *линейно независимы по модулю* $L^+(\eta)$ $(|\tau| + |q| \neq 0)$. *Здесь*

$$b^0_{hj}(x, \xi, q) = \sum_{|\mu|+k=\sigma_h+t_j} b^{hj}_{\mu k}(x)(qe^{i\theta})^k \xi^\mu,$$

если $\sigma_h + t_j \geqslant 0$; $b^0_{hj}(x, \xi, q) \equiv 0$, *если* $\sigma_h + t_j < 0$, $L_{rj}(x, \tau + \eta\nu, q)$ — *алгебраическое дополнение элемента* $l^0_{rj}(x, \tau + \eta\nu, q)$ *определителя* (1.3).

Всюду в данной работе предполагается, что граничная задача (1.1), (1.4) — эллиптическая с параметром. В обозначениях (1.1), (1.4) для краткости опущено θ, хотя его вхождение предполагается (см. (1.2), (1.5)).

§ 2. Функциональные пространства

2.1. Пространства $H^s(\mathbf{R}^n)=H^s(\mathbf{R}^n, q)$

Пусть s, q — действительные числа. Через $H^s(\mathbf{R}^n)$ обозначим пространство распределений u таких, что

$$\|u, \mathbf{R}^n, q\|_s=\Big(\int\limits_{R_n} (1+|\xi|^2+|q|^2)^s\, |(Fu)(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{1/2}<\infty, \tag{2.1}$$

$\Big((Fu)(\xi)$ — преобразование Фурье элемента u, $(Fu)(\xi)=\int u(x)\exp i(x_1\xi_1+\ldots$ $\ldots+x_n\xi_n\Big)\,dx$, если u — достаточно регулярная функция. Нетрудно видеть, что для каждого фиксированного $q\in\mathbf{R}$ норма (2.1) эквивалентна обычной соболевской норме $\|\cdot, \mathbf{R}^n, 0\|_s=\|\cdot, \mathbf{R}^n\|_s$, и поэтому пространство $H^s(\mathbf{R}^n)$ не зависит от q. Однако в данной работе удобно рассматривать лишь такие нормы, эквивалентные (2.1), для которых постоянные в соответствующих двусторонних оценках можно выбрать не зависящими от $q\in\mathbf{R}$. Пространство $H^s(\mathbf{R}^n)$ с нормой (2.1) будем обозначать также через $H^s(\mathbf{R}^n, q)$. Из (2.1) непосредственно следует, что

$$\|u, \mathbf{R}^n, q\|_s\geqslant |q|^t\, \|u, \mathbf{R}^n, q\|_{s-t}\ (t, q, s\in\mathbf{R};\ t\geqslant 0;\ u\in H^s(\mathbf{R}^n)). \tag{2.2}$$

Через $H^{s,t}(\mathbf{R}^n)=H^{s,t}(\mathbf{R}^n, q)$ $(s, t\in\mathbf{R})$ обозначим пространство распределений u таких, что

$$\|u, \mathbf{R}^n, q\|^2_{s,t}=\int (1+|\xi|^2+q^2)^s\,(1+|\xi'|^2+q^2)^t\, |(Fu)(\xi)|^2\, d\xi<\infty. \tag{2.3}$$

2.2. Оператор θ^+

Пусть $\mathbf{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_{n-1}, x_n)=(x', x_n)\in\mathbf{R}^n : x_n>0\}$, $\mathbf{R}^n_-=\mathbf{R}^n\diagdown\overline{R}^n_+$, $H^s_\pm(\mathbf{R}^n)=\{u\in H^s(\mathbf{R}^n) : \operatorname{supp} u\in\overline{\mathbf{R}}^n_\pm\}$ — подпространство $H^s(\mathbf{R}^n)$. Элемент w входит в $H^s_+(\mathbf{R}^n)$ в том и только в том случае, когда преобразование Фурье $(Fw)(\xi', \xi_n)$ допускает при почти всех $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$ аналитическое продолжение по ξ_n в верхнюю полуплоскость $\zeta=\xi_n+i\eta$, $\eta>0$, с оценкой

$$\int (1+|\xi|^2+\eta^2)^s\, |(Fw)(\xi', \xi_n+i\eta)|^2\, d\xi' d\xi_n\leqslant c, \tag{2.4}$$

где $c>0$ не зависит от η (теорема Палея—Винера).

Пусть $\theta^+(x)$ — функция, равная 1 при $x_n>0$ и равная 0 при $x_n<0$. Замыкание θ^+ отображения $u\mapsto\theta^+(x)u$ $(u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n))$ непрерывно действует из $H^s(\mathbf{R}^n)$ в $H\ (R^n)$ $(s\in\mathbf{R},\ |s|<1/2)$. Расширим оператор θ^+. Если

$$w=w_1+w_2,\ w_1\in H^s(\mathbf{R}^n)\ (|s|<1/2),\ w_2\in H^t_-(\mathbf{R}^n)\ (t\in\mathbf{R}), \tag{2.5}$$

то положим

$$\theta^+w=\theta^+w_1\in H^s_+(\mathbf{R}^n). \tag{2.6}$$

Иными словами, по определению $\theta^+H_-^t=0$ $(\forall t\in\mathbf{R})$ и линейным образом θ^+ распространяется на суммы вида (2.5). Например, если $w\in H^s(\mathbf{R}^n)$, $|s|<1/2$, а $\delta(x_n)$ — дельта-функция, то $\theta^+(w+\delta(x_n))=\theta^+w$. Подчеркнем, что θ^+ определен лишь на таких элементах $w\in H^t(\mathbf{R}^n)$ $(t\leqslant -1/2)$, которые представимы в виде (2.5).

2.3. Пространства $C_0^\infty(\bar\Omega)$, $H^s(\Omega, q)$

Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ — область, $\partial\Omega$ — ее граница. В работе рассматриваются случаи: 1. $\Omega=G$ — ограниченная область, $\partial\Omega=\partial G$ и 2. $\Omega=R_\pm{}^n=\{x=(x', x_n)\in\mathbf{R}^n : x_n\gtrless 0\}$.

Через $C_0^\infty(\bar\Omega)$ обозначим множество ограничений на $\bar\Omega$ функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Ясно, что если Ω — ограниченная область, то $C_0^\infty(\bar\Omega)=C^\infty(\bar\Omega)$.

Если $s\geqslant 0$, то через $H^s(\Omega)=H^s(\Omega, q)$ обозначим пространство ограничений на Ω функций из $H^s(\mathbf{R}^n, q)$ с нормой фактор-пространства

$$\|w, \Omega, q\|_s=\inf\|v, \mathbf{R}^n, q\|_s \quad (s\geqslant 0,\ q\in\mathbf{R}), \tag{2.7}$$

где inf берется по всем $v\in H^s(\mathbf{R}^n)$, равным w в Ω. Ясно, что для каждого $q\in\mathbf{R}$ норма $\|w, \Omega, q\|_s$ эквивалентна соболевской $\|w, \Omega, 0\|_s=\|w, \Omega\|_s$, и поэтому пространства $H^s(\Omega, q)$ не зависят от q. Снова отметим, что в данной работе удобно рассматривать лишь такие нормы, эквивалентные (2.7), для которых постоянные в соответствующих двусторонних оценках не зависят от q. Норма (2.7) эквивалентна в указанном смысле норме

$$(\|u, \Omega\|_s^2+(q^2)^s\|u, \Omega\|_0^2)^{1/2} \quad (s\geqslant 0,\ q\in\mathbf{R}), \tag{2.8}$$

а если $s\geqslant 0$ — целое, норме [2]

$$\Big(\sum_{k=0}^{s} q^{2k}\|u, \Omega\|_{s-k}^2\Big)^{1/2}, \tag{2.9}$$

где $\|u, \Omega\|_{s-k}$ — обычная соболевская норма. Существует линейный оператор продолжения T, действующий из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\mathbf{R}^n)$ $(s\geqslant 0)$, такой, что $\|Tu, \mathbf{R}^n, q\|_s\leqslant c_s\|u, \Omega, q\|_s$ $(s\geqslant 0)$, постоянная $c_s>0$ не зависит от q и u [2].

Через $H^{-s}(\Omega)=H^{-s}(\Omega, q)$ $(s\geqslant 0)$ обозначим пространство, сопряженное $H^s(\Omega, q)$ относительно расширения $(\cdot, \cdot)$ скалярного произведения в $L_2(\Omega)$;

$$\|u, \Omega, q\|_{-s}=\sup_{v\in H^s(\Omega,q)}\frac{|(u, v)|}{\|v, \Omega, q\|_s} \quad (s\geqslant 0,\ q\in\mathbf{R})— \tag{2.10}$$

норма в $H^{-s}(\Omega, q)$. Поскольку $H^s(\Omega, q)$ — фактор-пространство пространства $H^s(\mathbf{R}^n, q)$, то $H^{-s}(\Omega, q)=(H^s(\Omega, q))^*$ $(s\geqslant 0)$ изометрически эквивалентно подпространству $H_{\bar\Omega}^{-s}(\mathbf{R}^n, q)$ пространства $H^{-s}(\mathbf{R}^n, q)$, состоящему из элементов с носителями в $\bar\Omega$ (см. [10], § 5, п. 4). В частности $H^s(R_+^n, q)$ $(s\leqslant 0)$ изометрически эквивалентно $H_+^s(\mathbf{R}^n, q)$. Если элемент $f\in H^s(\Omega)$ $(s\leqslant 0)$ будем рассматривать как элемент из $H^s(\mathbf{R}^n)$, то обозначим его через f^+. Если $f\in H^s(\Omega)$ $(s\geqslant 0)$, то $f^+\in H^0(R^n)$ — продолжение f нулем на все $\mathbf{R}^n$. Таким образом, во всех случаях запись f^+ означает, что f^+ определена в $\mathbf{R}^n$ и $\operatorname{supp} f^+\subset\bar\Omega$.

Отметим, что из (2.2), (2.7) и (2.10) следует, что

$$\|u, \Omega, q\|_s\geqslant|q|^t\|u, \Omega, q\|_{s-t}\ (s, t\in\mathbf{R},\ t\geqslant 0,\ u\in H^s(\Omega)). \tag{2.11}$$

2.4. Оператор $\Lambda_\pm^t=\Lambda_\pm^t(q)$

Обозначим через $\Lambda_\pm^t=\Lambda_\pm^t(q)$ $(t\in R)$ оператор

$$\Lambda_\pm^t(q)=F^{-1}\langle\xi\rangle_\pm^t F, \tag{2.12}$$

здесь $\langle\xi\rangle_\pm=\xi_n\pm i\sqrt{1+|\xi'|^2+q^2}$, F, F^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье, $\langle\xi\rangle_+^t=\exp(t\ln\langle\xi\rangle_+)$, где ветвь логарифма выбрана так, чтобы $\operatorname{Im}\ln\langle\xi\rangle_+=\arg\langle\xi\rangle_+\to 0$ при $\xi_n\to+\infty$. Поскольку $|\langle\xi\rangle_\pm|^2=1+|\xi|^2+q^2$, то оператор $\Lambda_\pm^t$ осуществляет изометрию между $H^s(\mathbf{R}^n, q)$ и $H^{s-t}(\mathbf{R}^n, q)$ $(s, t\in\mathbf{R})$. Поскольку функция $\langle\xi\rangle_+^t$ допускает аналитическое продолжение по ξ_n в верхнюю полуплоскость $\zeta=\xi_n+i\eta$, $\eta>0$, то из сказанного в начале п. 2.2 следует, что $\Lambda_+^t(q)$ изометрически отображает $H_+^s(\mathbf{R}^n, q)$ на $H_+^{s-t}(\mathbf{R}^n, q)$. Аналогично $\Lambda_-^t(q)$ изометрически отображает $H_-^s(\mathbf{R}^n, q)$ на $H_-^{s-t}(R^n, q)$.

Если $w_1\in H^s(\mathbf{R}^n)$, $w_2\in H^t(\mathbf{R}^n)$ $(s\geqslant t)$, а $w_1-w_2\in H_-^t(\mathbf{R}^n)$, то $\Lambda_-^s(w_1-w_2)\in H_-^{t-s}(\mathbf{R}^n)$, и поэтому согласно (2.6) $\theta^+\Lambda_-^s(w_1-w_2)=0$ и $\theta^+\Lambda_-^s w_1=\theta^+\Lambda_-^s w_2$. Поэтому если $w\in H^s(\mathbf{R}_+^n)$ $(s\geqslant 0)$ и $w_1\in H^t(\mathbf{R}^n)$ $(t\leqslant s)$ — любое продолжение w, то $\theta^+\Lambda_-^s w_1$ не зависит от способа продолжения w. Следовательно, оператор $w\mapsto\theta^+\Lambda_-^s w_1$ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное (а потому и взаимно непрерывное по теореме Банаха об обратном операторе) отображение $H^s(\mathbf{R}_+^n, q)$ на $H_+^0(\mathbf{R}^n)$. Поэтому норма $\|w, \mathbf{R}_+^n, q\|_s$ $(s\geqslant 0)$ эквивалентна норме $\|\theta^+\Lambda_-^s(q)w^+, \mathbf{R}^n\|_0$. Эквивалентны также следующие нормы:

$$\|w, \mathbf{R}^n, q\|_s\sim\|\theta^+\Lambda_-^{s-\delta}w^+, \mathbf{R}^n, q\|_\delta\quad (s\geqslant 0,\ |\delta|<1/2), \tag{2.13}$$

здесь w^+ — продолжение w нулем в $\mathbf{R}_-^n$.

Заметим, что если $|q|\geqslant q_0>0$, то удобно в приведенных рассмотрениях заменить оператор $F^{-1}\langle\xi\rangle_\pm^t F$ на «однородный» оператор $F^{-1}(\xi_n\pm\sqrt{|\xi'|^2+q^2})^t F$, который также будем обозначать через $\Lambda_\pm^t(q)$. При этом соответствующие нормы заменятся на эквивалентные, а постоянные в двусторонних оценках не будут зависеть от q $(|q|\geqslant q_0)$; они будут, конечно, зависеть от q_0.

2.5. Пространства $H^s(\partial\Omega)=H^s(\partial\Omega, q)$

Норма $\|u, \mathbf{R}^{n-1}, q\|_s$ $(s\in\mathbf{R})$ с помощью разложения единицы и локального распрямления границы определяет «граничную» норму $\langle\!\langle u, \partial\Omega, q\rangle\!\rangle_s$ на $\partial\Omega$ и пространство $H^s(\partial\Omega, q)$ с этой нормой. Для каждого $s\in\mathbf{R}$ пространства $H^s(\partial\Omega, q)$ и $H^{-s}(\partial\Omega, q)$ взаимно сопряжены относительно расширения $\langle\cdot, \cdot\rangle$ скалярного произведения в $L_2(\partial\Omega)$. Если $u\in H^s(\Omega)$, $s>1/2$, то определен след $u\in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ и $\langle\!\langle u, \partial\Omega, q\rangle\!\rangle_{s-1/2}\leqslant c_s\|u, \Omega, q\|_s$, где $c_s>0$ не зависит от u и q [2]. Из (2.11) легко следует, что

$$\langle\!\langle u, \partial\Omega, q\rangle\!\rangle_s\geqslant|q|^t\langle\!\langle u, \partial\Omega, q\rangle\!\rangle_{s-t}\quad (u\in H^s(\partial\Omega),\ t\geqslant 0). \tag{2.14}$$

2.6. Пространства $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)=\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega, q)$

2.6.1. Зафиксируем натуральное число r и пусть $s\in R$, $s\neq k+1/2$ $(k=0, \ldots, r-1)$. Через $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega, q)$ обозначим пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$|\!|\!|u, \Omega, q|\!|\!|_{s,(r)}=\Big(\|u, \Omega, q\|_s^2+\sum_{j=1}^r\langle\!\langle D_\nu^{j-1}u, \partial\Omega, q\rangle\!\rangle_{s-j+1/2}^2\Big)^{1/2}; \tag{2.15}$$

здесь $D_\nu=i\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\nu$ — производная по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$.

Если $s=k+1/2$ $(k=0, \ldots, r-1)$, то определим $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega, q)$ и норму $|||\cdot, \Omega, q|||_{s,(r)}$ с помощью комплексной интерполяции ([11; 6, гл. 3, § 6, п. 9]) между $\widetilde{H}^{s-1/2,(r)}(\Omega, q)$ и $\widetilde{H}^{s+1/2,(r)}(\Omega, q)$. Наконец, при $r=0$ положим, что $\widetilde{H}^{s,(0)}(\Omega, q)=H^s(\Omega, q)$ и $|||u, \Omega, q|||_{s,(0)}=\|u, \Omega, q\|_s$.

Пространства $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ введены в [12] и подробно изучены в [13] (см. также [6, гл. 3, § 6, п. 8]). При $s>r-1/2$ норма $|||\cdot, \Omega, q|||_{s,(r)}$ эквивалентна норме $\|\cdot, \Omega, q\|_s$ и $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega, q)=H^s(\Omega, q)$. При $s<r-1/2$ эти нормы не эквивалентны. Из определения нормы (2.15) следует, что замыкание $S=S_r$ отображения

$$u \mapsto (u|_{\bar{\Omega}}, u|_{\partial\Omega}, \ldots, D_\nu^{r-1} u|_{\partial\Omega}) \quad (u \in C_0^\infty(\bar{\Omega}))$$

устанавливает изометрическое соответствие между $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega, q)$ и подпространством прямого произведения $H^s(\Omega, q) \times \prod_{1\leqslant j\leqslant r} H^{s-j+1/2}(\partial\Omega, q)$. При этом если $s\neq k+1$ $(k=0, \ldots, r-1)$, то $S\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega, q)=\{(u_0, \ldots, u_r)\}$, где $u_0 \in H^s(\Omega, q)$, $u_j=D_\nu^{j-1}u_0|_{\partial\Omega}$, если $s-j+1/2>0$, и u_j — произвольный элемент из $H^{s-j+1/2}(\partial\Omega, q)$, если $s-j+1/2<0$. Если $s<1/2$, то $S\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)=H^s(\Omega)\times \prod_{1\leqslant j\leqslant r} H^{s-j+1/2}(\partial\Omega)$ [13]. Для каждого $u \in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ компоненты вектора $Su=(u_0, \ldots, u_r)$ будем называть также компонентами элемента u.

2.6.2. Если $M(x, D, q)=\sum_{|\alpha|+k\leqslant p} a_{\alpha k}(x) q^k D^\alpha$ $(x\in\Omega,\ p\leqslant r)$, $N(x, D, q)=\sum_{|\alpha|+k\leqslant t} b_{\alpha k}(x) q^k D^\alpha$ $(x\in\partial\Omega,\ t\leqslant r-1)$ — дифференциальные выражения с достаточно гладкими коэффициентами, то

$$\|M(x, D, q)u, \Omega, q\|_{s-p} \leqslant c_s |||u, \Omega, q|||_{s,(r)},$$

$$\langle\langle N(x, D, q)u, \partial\Omega, q\rangle\rangle_{s-t-1/2} \leqslant c_s |||u, \Omega, q|||_{s,(r)} \quad (u\in C_0^\infty(\bar{\Omega})), \qquad (2.16)$$

где $c_s>0$ не зависит от u и q (ср., например, [6, гл. 3, §6, п. 8]), поэтому замыкания M, N отображения $u\mapsto Mu$, $u\mapsto Nu|_{\partial\Omega}$ $(u\in C_0^\infty(\bar{\Omega}))$ непрерывно действуют из всего $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ соответственно в $H^{s-p}(\Omega)$, $H^{s-t-1/2}(\partial\Omega)$. В этом (сильном) смысле для каждого $u\in\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ определены $Mu \in H^{s-p}(\Omega)$, $Nu|_{\partial\Omega} \in H^{s-t-1/2}(\partial\Omega)$. Отсюда следует, что замыкание M отображения $u\mapsto Mu$ $(u\in C_0^\infty(\bar{\Omega}))$ непрерывно действует из всего $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ в $\widetilde{H}^{s-p,(r-p)}(\Omega)$ и

$$|||Mu, \Omega, q|||_{s-p,(r-p)} \leqslant c_s |||u, \Omega, q|||_{s,(r)} \quad (u\in\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega, q)); \qquad (2.17)$$

здесь s — произвольное действительное, $c_s>0$ не зависит от u и q.

Отметим также, что если $u\in\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$, $Su=(u_0, \ldots, u_r)$, то в сильном смысле

$$u_j=D_\nu^{j-1}u|_{\partial\Omega} \quad (j=1, \ldots, r), \qquad (2.18)$$

т. е. для каждой последовательности $u_n\in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, сходящейся к u в $\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$, последовательность $D_\nu^{j-1}u_n|_{\partial\Omega}$ сходится к u_j в $H^{s-j+1/2}\partial\Omega$. Поэтому компоненты элемента $u\in\widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ будем обозначать $u|_{\bar{\Omega}}, u|_{\partial\Omega}, \ldots, D_\nu^{r-1}u|_{\partial\Omega}$.

2.6.3. Применение дифференциальных выражений к элементам $u \in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$ можно понимать и в другом (слабом) смысле. Пусть дифференциальное выражение $M(x, D, q)$ порядка $p \leqslant r$ имеет в некоторой окрестности в $\bar{\Omega}$ границы $\partial\Omega$ вид

$$M(x, D, q) = \sum_{j=0}^{p} M_j(x, D', q) D_\nu^j, \tag{2.19}$$

где $M_j(x, D', q)$ — тангенциальное выражение порядка $p-j$. Пусть $M^+(x, D, q)$, $M_j^+(x, D', q)$ — выражения, формально сопряженные выражениям M и M_j. Интегрируя по частям, получаем

$$(Mw, v) = (w, M^+v) - i\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{j} \langle D_\nu^{k-1} w, D_\nu^{j-k} M_j^+ v\rangle \quad (w, v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})). \tag{2.20}$$

Если $w \in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$, $Sw = (w_0, \ldots, w_r)$, то с помощью предельного перехода в (2.20) убеждаемся, что $Mw = f \in H^{s-p}(\Omega)$ в том и только в том случае, когда

$$(f, v) = (w_0, M^+v) - i\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{j} \langle w_k, D_\nu^{j-k} M_j^+ v\rangle \quad (v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})). \tag{2.21}$$

Равенство (2.21) показывает, как дифференциальное выражение M действует (в слабом смысле) на элемент $w \in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$.

Введем в множество выражений вида (2.19) оператор J: $JM(x, D, q) = 0$, если $p = 0$; $JM(x, D, q) = \sum_{j=1}^{p} M_j(x, D', q) D_\nu^{j-1}$, если $p \geqslant 1$. Тогда, учитывая определение дельта-функции $\delta(\partial G)$:

$$(M_j D_\nu^{j-k} \rho(x') \times \delta(\partial\Omega), v) = \langle \rho(x'), D_\nu^{j-k} M_j^+ v\rangle \quad (x' \in \partial\Omega),$$

можно (2.20) записать в виде

$$(Mw)^+ = Mw^+ - i\sum_{k=1}^{p} (J^k M(x, D, q))(D_\nu^{k-1} w|_{\partial\Omega} \times \delta(\partial\Omega)). \tag{2.22}$$

Здесь $w \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, w^+ и $(Mw)^+$ — продолжения нулем функций w, Mw с $\bar{\Omega}$ на все R^n. Мы здесь считаем, что коэффициенты выражения $M(x, D, q)$ продолжены на все R^n. Равенство (2.21) можно теперь записать в виде

$$(Mw)^+ = Mw_0^+ - i\sum_{k=1}^{p} (J^k M(x, D, q))(w_k \times \delta(\partial\Omega))$$
$$(w \in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega),\ Sw = (w_0, \ldots, w_r),\ Mw \in H^{s-p}(\Omega)). \tag{2.23}$$

Напомним, что если $s-p \leqslant 0$, то $H^{s-p}(\Omega)$ изометрично подпространству пространства $H^{s-p}(R^n)$, состоящему из элементов с носителями в $\bar{\Omega}$, поэтому в этом случае можно считать, что $Mw = (Mw)^+$. Если $s-p > 0$, то $(Mw)^+$ — продолжение нулем Mw с Ω на R^n. Формула (2.23), таким образом, дает способ вычисления Mw для каждого $w \in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$.

Формула (2.23) удобна в случае $s<1/2$; если же $1/2<s<r-1/2$ ($s\neq k+1/2$, $k=0, \ldots, r-1$), а $t=[s+1/2]$ — ближайшее к s натуральное число, то, как уже отмечалось для $w\in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$, $Sw=(w_0, \ldots, w_r)$, имеем $w_k=D_\nu^{k-1}w_0|_{\partial\Omega}$ ($k=1, \ldots, t$). Это позволяет получить другую формулу для вычисления $(Mw)^+$:

$$(Mw)^+=\sum_{j=0}^{t-1} M_j(x, D', q)\,(D_\nu^j w_0)^+ + (J^t M(x, D, q))\,(D_\nu^t w_0)^+ -$$

$$-i\sum_{k=1}^{p-t} (J^{t+k} M(x, D, q))\,(w_{t+k}\times\delta(\partial\Omega))\quad (w\in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)), \tag{2.24}$$

$$Sw=(w_0, \ldots, w_r),\ 1/2<s<r-1/2,\ s\neq k+1/2\ (k=0, \ldots, r-1).$$

С помощью предельного перехода получаем также, что если $w\in \widetilde{H}^{s,(r)}(\Omega)$, $Sw=(w_0, \ldots, w_r)$, $p\leqslant r-1$, то

$$Mw|_{\partial\Omega}=\sum_{j=0}^{p} M_j(x, D', q)\,w_{j+1}. \tag{2.25}$$

2.7. Пространства $H^s(R^n, q)$ и другие с $q\in R^k$

В п. 2.1—2.6 изучались пространства и нормы, зависящие от действительного параметра q. Во всех этих рассмотрениях можно считать, что $q=(q_1, \ldots, q_k)\in R^k$, $|q|^2=q_1^2+\ldots+q_k^2$, где k — любое натуральное число. Формулировки утверждений и их доказательства при этом не меняются.

§ 3. Теорема о полном наборе изоморфизмов

3.1. Формулировка основной теоремы

В ограниченной области $G\subset R^n$ с достаточно гладкой границей ∂G рассматривается эллиптическая с параметром граничная задача (1.1), (1.4):

$$l(x, D, q)u=f,\ b(x, D, q)u|_{\partial G}=g. \tag{3.1}$$

Пусть $\tau_j=t_j+\varkappa$, где $\varkappa=\max\{0, \sigma_1+1, \ldots, \sigma_m+1\}$; $j=1, \ldots, N$. Из сказанного в п. 2.6.2 следует, что для каждого $s\in R$ при достаточной гладкости коэффициентов и границы замыкание $A_s=A_{s,q}$ отображения

$$u\to(l(x, D, q)u,\ b(x, D, q)u|_{\partial G})\quad (u\in(C^\infty(\bar G))^N) \tag{3.2}$$

непрерывно действует в паре пространств:

$$\widetilde{H}^s(G, q)\equiv\prod_{j=1}^{N}\widetilde{H}^{t_j+s,(\tau_j)}(G, q)\to\widetilde{K}^s(G, \partial G, q)\equiv$$

$$\equiv\prod_{r=1}^{N}\widetilde{H}^{s-s_r,(\varkappa-s_r)}(G, q)\times\prod_{h=1}^{m}H^{s-\sigma_h-1/2}(\partial G, q). \tag{3.3}$$

При этом

$$\|A_s u\|_{\widetilde{K}^s(G,\partial G,q)} \leqslant c_s \|u\|_{\widetilde{H}^s(G,q)} \quad (u \in \widetilde{H}^s(G, q)), \tag{3.4}$$

где постоянная $c_s>0$ не зависит от u и q. Оказывается, что если $|q|$ достаточно большое, то A_s устанавливает изоморфизм между пространствами (3.3).

Теорема 1. *Пусть задача (3.1) — эллиптическая с параметром, s — произвольное действительное и коэффициенты и граница достаточно регулярны. Тогда существует число $q_1>0$ такое, что при $|q|\geqslant q_1$ и $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$ замыкание $A_s=A_{s,q}$ отображения (3.2) устанавливает изоморфизм между пространствами (3.3). Существует постоянное $c_s>0$, не зависящее от u и q ($|q|\geqslant q_1$), такое, что*

$$c_s^{-1}\|u\|_{\widetilde{H}^s(G,q)} \leqslant \|A_s u\|_{\widetilde{K}^s(G,\partial G,q)} \leqslant c_s \|u\|_{\widetilde{H}^s(G,q)} \quad (u \in \widetilde{H}^s(G, q)). \tag{3.5}$$

Функция $s\mapsto c_s$ ($s\in\mathbf{R}$) ограничена на любом компакте.

Предположения о регулярности коэффициентов и границы такие: $a^{rj}_{\mu k}(x) \in C^{\widehat{\eta}}(\overline{G})$, $\eta=|t_j+s-|\mu|-k|$ (*здесь и ниже $\widehat{\zeta}=\zeta$, если $\zeta\geqslant 0$ — целое, $\widehat{\zeta}=\zeta+\varepsilon$, если $\zeta>0$ — нецелое, $\varepsilon>0$ можно считать сколь угодно малым*);

$$D^t_\nu a^{rj}_{\mu k}(x) \in C^{\eta_1+\varepsilon}(\partial G), \quad \eta_1=\max\{|t_1+s-|\mu|-k+t-1/2|,$$

$$|t_j+s-|\mu|-k-\varkappa+s_r+t+1/2|\} \quad (t=0, \ldots, \varkappa-s_r-1;\ r:\varkappa-s_r\geqslant 1);$$

$$b^{hj}_{\alpha k}(x) \in C^{\widehat{\eta_2}}(\partial G), \quad \eta_2=|t_j+s-|\alpha|-k-1/2|;$$

∂G — поверхность класса C^{η_3}, $\eta_3=\max\{\widehat{|t_1+s|},\ \tau_1-1,\ \widehat{|\varkappa-s|},\ 1\}$.

Поскольку оценка (3.4) уже установлена*, то для доказательства теоремы достаточно убедиться, что существует $q_1>0$ такое, что при $|q|\geqslant q_1$ задача (3.1) имеет одно и только одно решение $u\in\widetilde{H}^s(G, q)$ для каждого $(f, g)\in\widetilde{K}^s(G, \partial G, q)$. Утверждение теоремы тогда будет следовать из теоремы Банаха об обратном операторе.

Для доказательства теоремы вначале в § 4 докажем ее аналог для модельной задачи в полупространстве. Это наиболее существенная часть доказательства. Затем с помощью стандартной методики, связанной с разложением единицы, завершим доказательство.

Рассмотрим в полупространстве $\Omega=R^n_+$ с границей $\partial\Omega=R'_{n-1}$ эллиптическую задачу с параметром вида (1.1), (1.4) с постоянными коэффициентами. Выражения $l_{rj}(D, q)$, $b_{hj}(D, q)$ предполагаются однородными относительно (D, q) порядков s_r+t_j, σ_h+t_j. Соответствующие выражения будем обозначать $l_0(D, q)$, $l^0_{rj}(D, q)$, $b_0(D, q)$, $b^0_{hj}(D, q)$. Тогда модельная задача в полупространстве имеет вид

$$l_0(D, q)\,u(x) \equiv (l^0_{rj}(D, q))_{r,j=1,\ldots,N}\,u(x)=f(x) \quad (x\in R^n_+), \tag{3.6}$$

$$b_0(D, q)\,u(x)=(b^0_{hj}(D, q))_{\substack{h=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,N}}\,u(x)\,|_{x_n=0}=g(x'), \tag{3.7}$$

* См. также ниже лемму 9.

где

$$l^0_{rj}(D, q)=\sum_{|\alpha|+k=s_r+t_j} a^{rj}_{\alpha k}(qe^{i\theta})^k D^\alpha, \tag{3.8}$$

$$b^0_{hj}(D, q)=\sum_{|\alpha|+k=\sigma_h+t_j} b^{hj}_{\alpha k}(qe^{ih})^k D^\alpha, \tag{3.9}$$

$a^{rj}_{\alpha k}$, $b^{hj}_{\alpha k}$— комплексные постоянные; они равны нулю, если соответственно $s_r+t_j<0$, $\sigma_h+t_j<0$.

Вначале рассмотрим систему (3.6) во всем R^n.

3.2. Системы с постоянными коэффициентами в R^n

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $q_0>0$ — произвольное, $|q|\geqslant q_0$. Тогда для каждой функции $\Phi=(\Phi_1, \ldots, \Phi_N)\in \prod_{1\leqslant r\leqslant N} H^{s-s_r,t}(R^n)$ существует одно и только одно решение $V=(V_1,\ldots,V_N)\in \prod_{1\leqslant j\leqslant N} H^{t_j+s,t}(R^n)$ $(s, t\in R)$ задачи*

$$l_0(D, q)V(x)=\Phi(x) \quad (x\in R^n) \tag{3.10}$$

и имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^N \|V_j, R^n, q\|_{t_j+s,t}\leqslant c\sum_{r=1}^N \|\Phi_r, R^n, q\|_{s-s_r,t}, \tag{3.11}$$

где постоянная $c=c(q_0)$ не зависит от Φ, s, t, V и q $(|q|\geqslant q_0)$.

Доказательство. Перейдем в (3.10) к фурье-образам и учтем, что вследствие эллиптичности с параметром матрица $l_0(\xi, q)$ обратима. Получим

$$V(\xi)=l_0^{-1}(\xi, q)\widetilde{\Phi}(\xi), \tag{3.12}$$

где $\widetilde{w}(\xi)=\int e^{i(x,\xi)}w(x)\,dx$— преобразование Фурье элемента w. Из однородности соответствующих выражений следует, что

$$|l^0_{rj}(\xi, q)|\leqslant c(|\xi|^2+|q|^2)^{(s_r+t_j)/2};\quad |L_{rj}(\xi, q)|\leqslant c(|\xi|^2+|q|^2)^{(-s_r-t_j+2m)/2};$$
$$c^{-1}(|\xi|^2+q^2)^m\leqslant |L(\xi, q)|\leqslant c(|\xi|^2+q^2)^m, \tag{3.13}$$

где $L(\xi, q)=\det l_0(\xi, q)$, а $L_{rj}(\xi, q)$ — алгебраическое дополнение элемента $l^0_{rj}(\xi, q)$. А так как из (3.12) следует, что

$$\widetilde{V}_j(\xi)=L^{-1}(\xi, q)\sum_{r=1}^N L_{rj}(\xi, q)\widetilde{\Phi}_r(\xi) \quad (j=1, \ldots, N), \tag{3.14}$$

то из (3.13) и (2.3) непосредственно следуют все утверждения леммы.

§ 4. Модельная задача в полупространстве

4.1. Аналог теоремы 1 для модельной задачи

Рассмотрим в R^n_+ модельную задачу (3.6), 3.7). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задача* (3.6), (3.7) — *эллиптическая с параметром. Тогда для каждого* $q\neq 0$ *и* $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$ *задача* (3.6), (3.7) *с*

$$(f, g)\in\prod_{r=1}^{N}\widetilde{H}^{s-s_r,(\varkappa-s_r)}(R^n_+, q)\times\prod_{R=1}^{m}H^{s-\sigma_h-1/2}(R'_{n-1}, q)\equiv\widetilde{K}^s$$

имеет одно и только одно решение

$$u\in\widetilde{H}(R^n_+, q)\equiv\prod_{j=1}^{N}\widetilde{H}^{t_j+s,(\tau_j)}(R^n_+, q).$$

Замыкание $A_0=A^0_{s,q}$ *отображения*

$$u\mapsto(l_0(D, q)u, b_0(D, q)u)\quad(u\in(C_0^\infty(\overline{R^n_+}))^N)\tag{4.1}$$

осуществляет изоморфизм

$$\widetilde{H}^s(R^n_+, q)\to\widetilde{K}^s\equiv\widetilde{K}^s(R^n_+, R'_{n-1}, q),\tag{4.2}$$

и для $|q|\geqslant q_0>0$ *имеет место оценка*

$$c^{-1}\|u\|_{\widetilde{H}^s(R^n_+,q)}\|A^0_{sq}u\|_{\widetilde{K}^s}\leqslant c\|u\|_{\widetilde{H}^s(R^n_+,q)},\tag{4.3}$$

где постоянная $c=c(q_0)$ *не зависит от* u, s, q $(|q|\geqslant q_0)$.

Для доказательства теоремы учтем, что если

$$u=(u_1, \dots, u_N)\in\prod_{j=1}^{N}\widetilde{H}^{t_j+s,(\tau_j)}(R^n_+),\ Su_j=(u_{j0}, \dots, u_{j\tau_j}),$$

$$f=(f_1, \dots, f_N)\in\prod_{r=1}^{N}\widetilde{H}^{s-s_r,(\varkappa-s_r)}(R^n_+),\ Sf_r=(f_{r0}, \dots, f_{r,\varkappa-s_r}),$$

то на основании п. 2.6.3 $lu=f$, если

$$\sum_{j=1}^{N}l^0_{rj}(D, q)u_j=f_{r0}\ (r=1, \dots, N),\tag{4.4}$$

$$D_n^{t-1}\sum_{j=1}^{N}l^0_{rj}(D, q)u_j|_{x_n=0}=f_{rt}\ (t=1, \dots, \varkappa-s_r;\ r:\varkappa-s_r\geqslant 1).\tag{4.5}$$

Воспользовавшись (2.23), запишем (4.4) в виде

$$\sum_{j=1}^{N}l^0_{rj}(D, q)u^+_{j0}-i\sum_{j:s_r+t_j\geqslant 1}\ \sum_{\beta=1}^{s_r+t_j}J^\beta(l^0_{rj}(D, q))(u_{j\beta}\times\delta(x_n))=f^+_{r0}.\tag{4.6}$$

А так как согласно (3.8)

$$l^0_{rj}(D, q)=\sum_{p=1}^{s_r+t_j+1}l^{rj}_p(D', q)D_n^{p-1},\tag{4.7}$$

где

$$l_p^{rj}(D', q) = \sum_{|\alpha'|+k=s_r+t_j-p+1} a_{\alpha k}^{rj}(qe^{i\theta})^k D^{\alpha'} \quad (\alpha=(\alpha', p-1)),$$

то из (2.25) следует, что равенства (4.5) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(D', q)\, u_{j,p+t-1}(x', 0) = f_{rt}(x', 0) \quad (t=1, \ldots$$
$$\ldots, \varkappa - s_r;\ r : \varkappa - s_r \geqslant 1). \tag{4.8}$$

Аналогично равенства (3.7) на основании (2.25) запишутся в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{\sigma_h+t_j+1} b_p^{hj}(D', q)\, u_{jp}(x', 0) = g_h(x', 0) \quad (h=1, \ldots, m). \tag{4.9}$$

Здесь

$$b_p^{hj}(D', q) = \sum_{|\alpha'|+k=\sigma_h+t_j-p+1} b_{\alpha k}^{hj}(qe^{i\theta})^k D^{\alpha'} \quad (\alpha=(\alpha', p-1)),$$

так что согласно (3.9)

$$b_{hj}^0(D, q) = \sum_{1\leqslant p\leqslant \sigma_h+t_j+1} b_p^{hj}(D', q)\, D_n^{p-1}.$$

Таким образом, получена задача (4.6), (4.8), (4.9) для определения $u_{j0}^+ (j = 1, \ldots, N)$ и $u_{j\beta} \in H^{t_j+s-\beta+1/2}(R'_{n-1})\ (j : \tau_j \geqslant 1;\ \beta=1, \ldots, \tau_j)$. Поскольку система (4.6) рассматривается во всем R^n, а система (4.8), (4.9) — в R'_{n-1}, то можно применить преобразование Фурье, решить при $q\neq 0$ задачу (4.6), (4.8), (4.9) в явном виде, получить нужные оценки. Это будет сделано в п. 4.3—4.6.

Прежде всего запишем (4.6) в виде

$$\sum_{j=1}^{N} l_{rj}^0(D, q)\, u_{j0}^+ = \Phi_r^+ \quad (r=1, \ldots, N), \tag{4.10}$$

где

$$\Phi_r^+ = f_{r0}^+ + i \sum_{j: s_r+t_j\geqslant 1} \sum_{\beta=1}^{s_r+t_j} (J^\beta l_{rj}^0(D, q))(u_{j\beta} \times \delta(x_n)). \tag{4.11}$$

Отметим, что в (4.10) носители u_{j0}^+, Φ_r^+ принадлежат $\overline{R_+^n}$, при этом (4.10) — система во всем R^n, а согласно лемме 1 она однозначно разрешима при $q\neq 0$. Возникает вопрос: когда из $\operatorname{supp}\Phi^+ \subset \overline{R_+^n}$ следует, что решение (4.10) имеет носитель в $\overline{R_+^n}$? Ответ будет дан в следующем пункте.

4.2. Условия разрешимости в $\prod_{1\leqslant j\leqslant N} H_+^{t_j+s}(R^n)$ задачи (4.10)

Рассмотрим задачу

$$l_0(D, q)V=\Phi^+=(\Phi_1^+, \dots, \Phi_N^+)\in\prod_{r=1}^{N} H_+^{s-s_r}(R^n). \tag{4.12}$$

Имеет место следующая

Лемма 2. *Для разрешимости в* $\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant N} H_+^{t_j+s}(R^n)$ *задачи* (4.12) *необходимо и достаточно чтобы при почти всех* $\xi'\in R^{n-1}$ $(|\xi'|+|q|>0)$ *выполнялись равенства*

$$\sum_{r=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} L^{-1}(\xi', \xi_n, q)\left(\xi_n+i\sqrt{|\xi'|^2+q^2}\right)^{t_j+s-m} L_{rj}(\xi', \xi_n, q)\,\widetilde{\Phi}_r^+(\xi', \xi_n)\,\xi_n^\gamma d\xi_n=0$$

$$(j=1, \dots, N;\ \gamma=0, \dots, m-1). \tag{4.13}$$

Здесь $L(\xi', \xi_n, q)=\det(l_0(\xi', \xi_n, q)$; $L_{rj}(\xi', \xi_n, q)$ — *алгебраическое дополнение элемента* $l_{rj}^0(\xi', \xi_n, q)$ *матрицы* l_0, $\widetilde{\Phi}_r^+(\xi', \xi_n)$ — *преобразование Фурье элемента* Φ_r^+.

Доказательство. Отметим вначале, что интегралы (4.13) при почти всех ξ' $(|\xi'|+|q|>0)$ абсолютно сходятся.

Докажем необходимость. Пусть задача (4.12) разрешима в $\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant N} H_+^{t_j+s}(R^n)$. Перейдем в (4.12) к фурье-образам; получим, что

$$\widetilde{V}(\xi', \xi_n)=l_0^{-1}(\xi', \xi_n, q)\,\widetilde{\Phi}^+(\xi', \xi_n),$$

или, подробнее,

$$\widetilde{V}_j(\xi', \xi_n)=L^{-1}(\xi', \xi_n, q)\sum_{r=1}^{N} L_{rj}(\xi', \xi_n, q)\,\widetilde{\Phi}_r^+(\xi', \xi_n)\quad (j=1, \dots, N), \tag{4.14}$$

тогда

$$\widetilde{V}_j(\xi', \xi_n)\,\xi_n^\gamma\left(\xi_n+i\sqrt{|\xi'|^2+q^2}\right)^{t_j+s-m}=$$

$$=L^{-1}(\xi', \xi_n, q)\sum_{r=1}^{N} L_{rj}(\xi', \xi_n, q)\,\widetilde{\Phi}_r^+(\xi', \xi_n)\,\xi_n^\gamma\langle\xi\rangle_+^{t_j+s-m}$$

$$(j=1, \dots, N;\ \gamma=0, \dots, m-1;\ \langle\xi\rangle_+=\xi_n+i\sqrt{|\xi'|^2+q^2}). \tag{4.15}$$

Так как $V_j\in H_+^{t_j+s}(R^n)$, то (см. п. 2.2) $\widetilde{V}_j(\xi', \xi_n)$ при почти всех $\xi'\in\mathbf{R}^{n-1}$ допускает аналитическое продолжение $\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)$ в верхнюю полуплоскость $\zeta=\xi_n+i\eta$, $\eta>0$; тогда ясно, что левая часть (4.15) допускает при указанных ξ' и $|\xi'|+|q|>0$ аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость. Тогда по теореме Коши

$$\int_{\Gamma_\rho}\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)\,\zeta^\gamma\left(\zeta+i\sqrt{|\xi'|^2+q^2}\right)^{t_j+s-m}d\zeta=0\quad(\gamma=0, \dots$$

$$\dots, m-1;\ j=1, \dots, N). \tag{4.16}$$

Здесь Γ_ρ — замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-\rho, \rho]$ оси ξ_n и полуокружности $|\zeta|=\rho$, $\operatorname{Im}\zeta>0$. По лемме типа Жордана интегралы по полуокружности в (4.16) стремятся к нулю при $\rho\to+\infty$. В результате из (4.16) и (4.15) получаем (4.13).

Докажем достаточность. Пусть почти для всех $\xi'\in R^{n-1}|\xi'|+|q|>>0$ выполнены равенства (4.13). По лемме 1 с $t=0$ задача (4.12) имеет одно и только одно решение $V\in\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant N} H^{t_j+s}(R^n)$. Поэтому осталось доказать, что $\operatorname{supp} V\subset\overline{R^n_+}$.

Функция $\widetilde{\Phi}^+(\xi', \xi_n)$ допускает при почти всех ξ' аналитическое продолжение $\widetilde{\Phi}^+(\xi', \zeta)$ в полуплоскость $\zeta=\xi_n+i\eta$, $\eta>0$. Тогда

$$\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)=L^{-1}(\xi', \zeta, q)\sum_{r=1}^{N} L_{rj}(\xi', \zeta, q)\,\widetilde{\Phi}_r^+(\xi', \zeta) \tag{4.17}$$

является для указанных ξ' мероморфной функцией в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ и имеет там m полюсов. Из (4.13) с помощью леммы Жордана тогда следует, что

$$\int\limits_{\Gamma}\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)\,(\zeta+i\sqrt{|\xi'|^2+q^2})^{t_j+s-m}P(\zeta)\,d\zeta=0, \tag{4.18}$$

где $P(\zeta)$ — любой многочлен степени не выше $m-1$, а $\Gamma=\Gamma(\xi', q)$ — любой замкнутый контур в верхней полуплоскости, охватывающий все m полюсов подынтегральной функции. Но функция $\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)(\zeta+ +i\sqrt{|\xi'|^2+q^2})^{t_j+s-m}$ имеет в верхней полуплоскости не более m полюсов, поэтому из (4.18) следует, что все особые точки $\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)$ — устранимые. Следовательно, можно считать, что $\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)$ по ζ аналитическая в верхней полуплоскости.

Докажем теперь, что $\operatorname{supp} V_j\subset\overline{R^n_+}$ $(j=1, \ldots, N)$. Поскольку Λ_+^{s-M} изометрически отображает $H_+^{t_j+s}(R^n)$ на $H_+^{t_j+M}(R^k)$, где M — любое действительное число (см. п. 2.4), то достаточно доказать, что

$$w_j=\Lambda_+^{s-M}V_j\in H_+^{t_j+M}(R^n), \tag{4.19}$$

где $M>0$ — достаточно большое число. Из аналитичности $\widetilde{V}_j(\xi', \zeta)$ $(\operatorname{Im}\zeta>0)$ после замены интегрирования по ξ_n интегрированием по прямой $\operatorname{Im}\zeta=\eta>0$ следует представление

$$(F'w_j)(\xi', x_n)=(2\pi)^{-1/2}\exp(\eta x_n)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\xi_n+i\eta+i\sqrt{|\xi'|^2+q^2})^{s-M}\times$$

$$\times L^{-1}(\xi', \xi_n+i\eta, q)\sum_{r=1}^{N} L_{rj}(\xi', \xi_n+i\eta, q)\,\widetilde{\Phi}_r^+(\xi', \xi_n+i\eta)\exp(-i\xi_n x_n)\,d\xi_n, \tag{4.20}$$

где $\eta>0$ произвольно, а $F'(x'\to\xi')$ — частичное преобразование Фурье. Ясно, что если $x_n<0$, то $\lim\limits_{\eta\to+\infty} e^{\eta x_n}=0$. Поэтому поскольку почти для всех ξ' модуль интеграла в (4.20) ограничен при $\eta\to+\infty$, то из (4.20) следует, что $w_j(x', x_n)=0$, если $x_n<0$. Лемма доказана.

Замечание 1. Рассмотрим задачу (4.12) с $\Phi_r^+\in H_+^{s-s_r,t}(R^n)$ $(r= =1, \ldots, N)$, где $t\in R$, $H_+^{s-s_r,t}(R^n)=\{w\in H^{s+s_r,t}(R^n): \operatorname{supp} w\subset\overline{R^n_+}\}$ — подпространство $H^{s-s_r,t}(\mathbf{R}^n)$. Согласно лемме 1 эта задача при $q \neq 0$ однозначно разрешима в $\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} H^{t_j+s,t}(\mathbf{R}^n)$. Легко видеть, что, для того чтобы решение принадлежало $\Pi H_+^{t_j+s,t}(R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы при почти всех ξ' ($|\xi'| + |q| > 0$) выполнялось условие (4.13).

Замечание 2. Применив к (4.12) частичное преобразование Фурье $F'(x' \to \xi')$ и обозначив $(F'w(x))(\xi', x_n) = \hat{w}(\xi', x_n)$, запишем вследствие (4.7) эту задачу в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(\xi', q) D_n^{p-1} \widehat{V}_j(\xi', x_n) = \widehat{\Phi}_r^+(\xi', x_n). \tag{4.21}$$

Для каждого $(\xi', q) \neq 0$ — это система обыкновенных дифференциальных уравнений на всей прямой, причем $\operatorname{supp} \widehat{\Phi}_r^+ \subset \overline{R}_+ = \{t \in R : t \geqslant 0\}$ относительно переменной x_n.

Пусть $\widehat{\Phi}_r^+ \in H_+^{s-s_r}(R, (\xi', q))$ $(r=1, \ldots, N)$ (см. п. 2.7, здесь (ξ', q) — параметр) и пусть $(\xi', q) \neq 0$. Тогда, для того чтобы задача (4.21) имела решение $V \in \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} H_+^{t_j+s}(\mathbf{R})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (4.13).

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, нужно при доказательстве леммы 2 заменить скалярный параметр q векторным (ξ', q) (см. п. 2.7).

4.3. Условие существования решения $u_0^+ \in \Pi H_+^{t_j+s}(R^n)$ системы (4.6)

Применим лемму 2 к задаче (4.6) или, что то же, к задаче (4.10), (4.11). Согласно п. 4.1 $f_{r0} \in H^{s-s_r}(R_+^n)$. Напомним (см. конец п. 2.3), что если $s - s_r \leqslant 0$, то $H^{s-s_r}(R_+^n, q)$ изометрически эквивалентно $H_+^{s-s_r}(\mathbf{R}^n, q)$, и поэтому в этом случае можно считать, что $f_{r0}^+ \in H_+^{s-s_r}(R^n)$. Если $0 < s - s_r < 1/2$, то $f_{r0}^+ \in H_+^{s-s_r}(\mathbf{R}^n)$ и $\|f_{r0}^+, \mathbf{R}^n, q\|_{s-s_r} \leqslant c \|f_{r0}, R_+^n, q\|_{s-s_r}$ (см. п. 2.2). Если же $f_{r0} \in H^{s-s_r}(R_+^n)$ и $s - s_r \geqslant 1/2$, то $f_{r0}^+ \in H_+^t(R^n)$ с $t < 1/2$. Поэтому вначале будем считать, что

$$s - s_r < 1/2 \quad (r = 1, \ldots, N). \tag{4.22}$$

Согласно п. 4.1 $u_{j\beta} \in H^{t_j+s-\beta+1/2}(R'_{n-1})$, тогда $u_{j\beta} \times \delta(x_n) \in H_+^{t_j+s-\beta}(R^n)$, если $-t_j - s + \beta > 1/2$:

$$|(u_{j\beta} \times \delta(x_n), v)| = |\langle u_{j\beta}, v(x', 0)\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \langle\langle u_{j\beta}, R'_{n-1}, q\rangle\rangle_{t_j+s-\beta+1/2} \langle\langle v(x', 0), R'_{n-1}, q\rangle\rangle_{-(t_j+s-\beta+1/2)} \leqslant$$
$$\leqslant \langle\langle u_{j\beta}, R'_{n-1}, q\rangle\rangle_{t_j+s-\beta+1/2} \|v(x), R^n, q\|_{-t_j-s+\beta}.$$

Поэтому

$$\|u_{j\beta} \times \delta(x_n), R^n, q\|_{t_j+s-\beta} \leqslant \langle\langle u_{j\beta}, R'_{n-1}, q\rangle\rangle_{t_j+s-\beta+1/2}, \tag{4.23}$$

если $t_j + s - \beta < -1/2$ $(j = 1, \ldots, N;\ \beta = 1, \ldots, \tau_j)$, отсюда следует, что в (4.11) $\Phi_r^+ \in H_+^{s-s_r}(R^n)$, если $s < t_1 + 1/2$. При этом

$$\|\Phi_r^+, R^n, q\|_{s-s_r} \leqslant c \left(\|f_{r0}^+, R^n, q\|_{s-s_r} + \right.$$

$$+\sum_{j:s_r+t_j\geqslant 1}\ \sum_{\beta=1}^{s_r+t_j}\langle\langle u_{j\beta},\ R'_{n-1},\ q\rangle\rangle_{t_j+s-\beta+1/2}\Big),$$

где $c>0$ не зависит от f^+, $u_{j\beta}$, q. Совершенно аналогично убеждаемся, что

$$\|\Phi_r^+,\ R^n,\ q\|_{s-s_r,t}\leqslant c\Big(\|f_{r0}^+,\ R^n,\ q\|_{s-s_r,t}+$$

$$+\sum_{j:s_r+t_j\geqslant 1}\ \sum_{\beta=1}^{s_r+t_j}\langle\langle u_{j\beta},\ R'_{n-1},\ q\rangle\rangle_{t_j+s-\beta+1/2+t}\Big)\quad (r=1,\ \ldots,\ N),\qquad (4.24)$$

где $t\in R$ произвольно.

Применив теперь лемму 2 к задаче (4.10), (4.11), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть*

$$s<-t_1+1/2,\ t\in R,\ f_{r0}^+\in H_+^{s-s_r,t}(R^n)\ (r=1,\ \ldots,\ N);\ u_{j\beta}\in$$
$$\in H^{t_j+s-\beta+1/2+t}(R'_{n-1})\ (j=1,\ \ldots,\ N;\ \beta=1,\ \ldots,\ \tau_j).$$

Тогда $\Phi_r^+\in H_+^{s-s_r,t}(R^n)$ $(r=1,\ldots,N)$ *и задача* (4.10) *имеет решение* $u_0^+=(u_{10}^+,\ \ldots,\ u_{N0}^+)$, $u_{j0}^+\in H_+^{t_j+s,t}(R^n)$ *в том и только в том случае, когда почти для всех* $\xi'\in R^{n-1}$ $(|\xi'|+|q|>0)$ *выполняются равенства*

$$\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{\beta=1}^{t_j}\Big(\sum_{r:s_r+t_j\geqslant 1} i\int_{-\infty}^{+\infty}L_{rh}(\xi',\ \xi_n,\ q)\,L^{-1}(\xi',\ \xi_n,\ q)\,\langle\xi\rangle_+^{t_h+s-m}\times$$

$$\times J^\beta\Big(\sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(\xi',\ q)\,\xi_n^{p-1}\Big)\,\xi_n^\gamma d\xi_n\Big)\,\widehat{u}_{j\beta}(\xi')=$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}L^{-1}(\xi',\ \xi_n,\ q)\,\langle\xi\rangle_+^{t_h+s-m}L_{rh}(\xi',\ \xi_n,q)\xi_n^\gamma\,\widetilde{f}_{r0}^+(\xi',\ \xi_n)d\,\xi_n$$

$$(h=1,\ \ldots,\ N;\ \gamma=0,\ \ldots,m-1;\ \langle\zeta\rangle_+=\xi_n+i\sqrt{|\xi'|^2+q^2}).\qquad (4.25)$$

Здесь N_1 *— число тех* t_j*, которые не меньше единицы.*

Доказательство в случае $t=0$ непосредственно следует из леммы 2, если в (4.13) вместо Φ_r^+ подставить правую часть (4.11), воспользоваться равенством (4.7) и поменять в левой части порядок суммирования. Мы также воспользовались тем, что $J^\beta(l_{rj}^0)\equiv 0$, если $\beta>s_r+t_j$, поэтому

$$\sum_{\beta=1}^{s_r+t_j}J^\beta(l_{rj}^0)=\sum_{\beta=1}^{t_j}J^\beta(l_{rj}^0).$$

Если $t\neq 0$, то доказательство следует из замечания 1 к лемме 2.

Обозначим правую часть равенства (4.25) через $\widehat{f}^{h\gamma}(\xi')=\widehat{f}^{h\gamma}(\xi',\ q)$, а коэффициент при $\hat{u}_{j\beta}$ в левой части этого равенства — через $c_{h\gamma j\beta}(\xi',\ q)$. Тогда равенства (4.25) запишутся в виде

$$\sum_{j=1}^{N_1} \sum_{\beta=1}^{t_j} c_{h\gamma j\beta}(\xi', q)\, \widehat{u}_{j\beta}(\xi') = \widehat{f}^{h\gamma}(\xi') \quad (h=1, \ldots, N;\ \gamma=0, \ldots, m-1). \tag{4.26}$$

Таким образом, благодаря лемме 3 мы заменили систему (4.6) эквивалентной системой (4.26).

4.4. Сведение задачи (4.6), (4.8), (4.9) **к линейной системе уравнений**

Перейдем в (4.8), (4.9) к фурье-образам. Получим

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\beta=t}^{s_r+t_j+t} l^{rj}_{\beta-t+1}(\xi', q)\, \widehat{u}_{j\beta}(\xi') = \widehat{f}_{rt}(\xi') \quad (t=1, \ldots, \varkappa-s_r;\ r: \varkappa-s_r \geqslant 1), \tag{4.27}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{\sigma_h+t_j+1} b^{hj}_{\beta}(\xi', q)\, \widehat{u}_{j\beta}(\xi') = \widehat{g}_h(\xi') \quad (h=1, \ldots, m). \tag{4.28}$$

Система (4.26)—(4.28) является линейной (переопределенной) системой относительно неизвестных $\hat{u}_{j\beta}(\xi')$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Для каждого* $(\xi', q) \neq 0$ *среди* Nm *уравнений* (4.26) *существует* m *линейно независимых, через которые остальные линейно выражаются.*

Доказательство. Пусть в лемме 2 $\Phi^+(x) \in (C_0^\infty(R^n))^N$, $\operatorname{supp} \times \Phi^+(x) \subset \overline{R^n_+}$. Тогда для разрешимости в $\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} H_+^{t_j+s}(R^n)$ задачи (4.12) небходимо и достаточно, чтобы для всех $\xi' \in R^{n-1}$ $(|\xi'| + |q| > 0)$ выполнялись условия (4.13). Заменим вначале интегрирование в (4.13) интегрированием по контуру $\Gamma^+ = \Gamma^+(\xi', q)$, расположенному в верхней ζ-полуплоскости и охватывающему все ζ-корни многочлена $L(\xi', \zeta, q)$, расположенные в этой полуплоскости (см. доказательство леммы 2), и учтем, что

$$\widetilde{\Phi}^+_r(\xi', \zeta) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{+\infty} \widehat{\Phi}^+_r(\xi', x_n)\, e^{i\zeta x_n}\, dx_n;$$

здесь $\widetilde{\Phi}^+_r(\xi', \zeta)$— аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость функции $\widetilde{\Phi}^+_r(\xi', \xi_n)$, $\widehat{\Phi}^+_r(\xi', x_n)$— частичное преобразование Фурье функции $\Phi^+_r(x)$. Тогда равенства (4.13) примут вид

$$\int_0^{+\infty} \sum_{r=1}^{N} \int_{\Gamma_+} L^{-1}(\xi', \zeta, q)\, (\zeta + i\sqrt{|\xi'|^2 + q^2})^{t_j+s-m} L_{rj}(\xi', \zeta, q)\, \zeta^\gamma e^{i\zeta x_n} \times$$
$$\times \widehat{\Phi}^+_r(\xi', x_n)\, d\zeta\, dx_n = 0 \quad (j=1, \ldots, N;\ \gamma=0, \ldots, m-1). \tag{4.29}$$

Равенства (4.29) означают ортогональность в $(L_2(R_+))^N$ вектора $\widehat{\Phi}^+ = (\widehat{\Phi}^+_1(\xi', x_n), \ldots, \widehat{\Phi}^+_N(\xi', x_n))$ к столбцам матрицы

$$\int_{\Gamma_-} e^{-i\zeta x_n} (l_0^+(\xi', \zeta, q))^{-1} \begin{pmatrix} (\zeta - i\sqrt{|\xi'|^2+q^2})^{s+t_1-m} & \dots & 0 \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & & (\zeta - i\sqrt{|\xi'|^2+q^2})^{s+t_N-m} \end{pmatrix} \times$$

$$\times (E, \zeta E, \dots, \zeta^{m-1} E)\, d\zeta, \tag{4.30}$$

здесь E — единичная матрица порядка N; Γ_- — контур, комплексно сопряженный контуру Γ_+; контур Γ_- охватывает все ζ-корни уравнения $\det l_0^+(\xi' \zeta)=0$, лежащие в нижней полуплоскости. Непосредственно проверяется, что столбцы матрицы (4.30) являются устойчивыми (т. е. убывающими при $x_n \to +\infty$) решениями на полупрямой $\bar{R}_+ : 0 \leqslant x_n < +\infty$ задачи

$$l_0^+(\xi', D_n, q)\, V(\xi', x_n) = 0. \tag{4.31}$$

Но

$$(l_0(\xi', D_n, q)\, \hat{u}_0^+(\xi', x_n),\ V(\xi' x_n))_{(L_2(R_+))^N} =$$

$$= (\hat{u}_0(\xi', x_n),\ l_0^+(\xi', D_n, q)\, V(\xi', x_n))_{(L_2(R_+))^N} = 0, \tag{4.31}$$

если $V(\xi', x_n)$ — устойчивое решение задачи (4.31), а $u_0^+ \in \in \prod\limits_{1\leqslant j\leqslant N} H_+^{t_j}(R^n)$. Поэтому для разрешимости в $\prod H_+^{t_j}(R^n)$ задачи $l_0 u_0^+ = \Phi^+$ небходимо, чтобы вектор $\hat{\Phi}^+(\xi', x_n)$ был ортогонален в $(L_2(R^+))^N$ ко всем устойчивым решениям уравнения (4.31). Отсюда благодаря замечанию 2 п. 4.2 следует, что каждое устойчивое решение задачи (4.31) является линейной комбинацией столбцов матрицы (4.30). Но если $|\xi'|+|q|>0$, то благодаря правильной эллиптичности l_0, а значит, и l_0^+ пространство устойчивых решений системы (4.31) m-мерно (см., например, [7]), поэтому для каждого $(\xi', q) \neq 0$ можно среди столбцов (4.30) выбрать m линейно независимых, через которые остальные линейно выражаются. Следовательно, для каждого $(\xi', q) \neq \neq 0$ можно из Nm условий (4.13) или (4.26) выбрать m линейно независимых, через которые остальные линейно выражаются. Лемма доказана.

Легко видеть, что минор порядка m матрицы (4.30) является непрерывной функцией (ξ', q) (ср. [7, 9, 14]). Поэтому если какие-либо m уравнений (4.26) линейно независимы в точке (ξ', q), то они же линейно независимы в некоторой окрестности этой точки.

В дальнейшем, ссылаясь на систему (4.26), будем считать, что в ней для рассматриваемой точки $(\xi', q) \neq 0$ оставлено лишь m линейно независимых уравнений.

Теперь система (4.26)—(4.28) — линейная система

$$m + (N\varkappa - s_1 - \dots - s_N) + m = 2m - (s_1 + \dots + s_N) + (\tau_1 - t_1) + \dots +$$

$$+ (\tau_N - t_N) = \tau_1 + \dots + \tau_N = |\tau|$$

уравнений с $|\tau|$ неизвестными $\hat{u}_{j\beta}(\xi')$ $(1 \leqslant \beta \leqslant \tau_j,\ j=1, \dots, N)$. Оказывается, что если задача (3.6)—(3.7) эллиптическая с параметром, то определитель $\Delta(\xi', q)$ системы (4.26)—(4.28) отличен от нуля, если $(\xi', q) \neq 0$.

Лемма 5. *Пусть задача* (3.6)—(3.7) — *эллиптическая с параметром. Тогда если* $(\xi', q)\neq 0$, *то* $\Delta(\xi', q)\neq 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждого $(\xi', q)\neq 0$ однородная задача, т. е. задача (4.26)—(4.28) с нулевыми правыми частями, имеет лишь нулевое решение. Допустим противное, пусть $(\xi', q)\neq 0$ и $\{\hat{u}_{j\beta} : j=1, \ldots, N;\ 1\leqslant\beta\leqslant t_j\}$ — ненулевое решение однородной задачи. Рассмотрим тогда задачу (4.21), в которой Φ_r^+ выражаются формулами (4.11) с $f_{r0}^+=0$ $(r=1, \ldots, N)$. Получим задачу

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(\xi', q)\, D_n^{p-1}\widehat{u}_{j0}^+(\xi', x_n)=$$

$$=i\sum_{j:s_r+t_j\geqslant 1}\sum_{\beta=1}^{s_r+t_j} J^\beta\left(\sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(\xi', q)\, D_n^{p-1}\right)(\widehat{u}_{j\beta}(\xi')\times\delta(x_n))\quad (r=1, \ldots, N). \tag{4.32}$$

Согласно замечанию 2 п. 4.2 задача (4.32) имеет единственное решение, причем $\operatorname{supp}\widehat{u}_0^+(\xi', x_n)\subset\bar{R}_+$ по переменной x_n. Пусть $\hat{u}_0(\xi', x_n)$ — сужение $\widehat{u}_0^+(\xi', x_n)$ на полупрямую $x_n>0$. Покажем, что $\hat{u}_0(\xi', x_n)\in\in H^t(R_+)$ для каждого $t\geqslant 0$ и что $\hat{u}_0(\xi', x_n)$ является отличным от нуля устойчивым решением задачи

$$l_0(\xi', D_n, q)\,\widehat{u}_0(\xi', x_n)=0, \tag{4.33}$$

$$b_0(\xi', D_n, q)\,\widehat{u}_0(\xi', x_n)|_{x_n=0}=0, \tag{4.34}$$

что противоречит условию Лопатинского (см. [7]).

Действительно, пусть $t>0$ — произвольное натуральное число. Воспользовавшись формулой (2.13) (с $n=1$), учитывая, что $\widehat{u}_0^+(\xi', x_n)$ — решение задачи (4.32), получим

$$\|\widehat{u}_{j0}(\xi', x_n),\ R_+\|_t^2\sim\|\theta^+\Lambda_-^t\widehat{u}_j^+(\xi', x_n),\ R\|_0^2=$$

$$=\|\theta^+F^{-1}_{\xi_n\to x_n}\langle\xi\rangle_-^t F_{\xi_n\to x_n}\widehat{u}_j^+(\xi', x_n),\ R\|_0^2=\Big\|\theta^+F^{-1}_{x_n\to\xi_n}$$

$$\left(\langle\xi\rangle_-^t L^{-1}(\xi, q)\sum_{r=1}^{N} L_{rj}(\xi, q)\right)\times$$

$$\times\sum_{k:s_r+t_k\geqslant 1}\sum_{\beta=1}^{s_r+t_k} J^\beta\left(\sum_{p=1}^{s_r+t_k+1} l_p^{rk}(\xi', q)\,\xi_n^{p-1}\widehat{u}_{k\beta}(\xi')\right),\ R\Big\|_0^2=$$

$$=\|\theta^+F^{-1}_{\xi_n\to x_n}Q(\xi_n),\ \mathbf{R}\|_0^2, \tag{4.35}$$

где через $Q(\xi_n)=Q(\xi', \xi_n, q)$ обозначено выражение, к которому применяется F^{-1} в (4.35). $Q(\xi_n)$ — рациональная функция. Выделив целую часть, получим

$$Q(\xi_n)=P(\xi_n)+r(\xi_n)/L(\xi_n),$$

где $L(\xi_n)=L(\xi', \xi_n, q)$, а P и r — многочлены относительно ξ_n, причем $\operatorname{ord} r\leqslant 2m-1$. Поскольку $P(\xi_n)$ многочлен, то $F^{-1}P$ — линейная комбинация $\delta(x_n)$ и ее производных, т. е. $\operatorname{supp} F^{-1}P\subset\bar{R}_-$, поэтому по определению оператора θ^+ (см. п. 2.2) $\theta^+F^{-1}P=0$. Теперь из (4.35) следует, что

$$\|\widehat{u}_{j0}(\xi', x_n), R_+\|_t^2 \sim \|\theta^+F^{-1}r(\xi_n)L^{-1}(\xi_n), R\|_0^2 \leqslant c\,\|r(\xi_n)L^{-1}(\xi_n), R\|_0^2 < \infty.$$

Поэтому $\hat{u}_{j0}(\xi', x_n)\in H^t(R_+)$ $(j=1, \ldots, N)$ для любого натурального t. Пусть $v\in (C_0^\infty(R))^N$, $\operatorname{supp} v\subset \overline{R}_+$. Тогда из (4.32) следует

$$0=(l_0(\xi', D_n, q)\widehat{u}_0^+(\xi', x_n), v)_{(L_2(R))^N}=$$

$$=(\widehat{u}_0^+(\xi', x_n), l_0^+(\xi', D_n, q)v)_{(L_2(R))^N}=(\widehat{u}_0(\xi', x_n), l_0^+(\xi', D_n, q)v)_{(L_2(R_+))^N}=$$

$$=(l_0(\xi', D_n, q)\widehat{u}_0(\xi', x_n), v)_{(L_2(R_+))^N}.$$

Поэтому $\widehat{u}_0(\xi', x_n)\in (C^\infty(\overline{R}_+))^N$ — устойчивое решение задачи (4.33). Покажем теперь, что

$$D_n^{\beta-1}\widehat{u}_{k0}(\xi', x_n)|_{x_n=0}=\widehat{u}_{k\beta}(\xi')\ (k=1, \ldots, N;\ 1\leqslant\beta\leqslant\tau_k). \tag{4.36}$$

Пусть $\widehat{v}^+(\xi', x_n)$ — функция, совпадающая с $\widehat{u}_0(\xi', x_n)$ при $x_n\geqslant 0$ и равная 0 при $x_n<0$. Пусть

$$\widehat{v}_{k\beta}=D_n^{\beta-1}\widehat{u}_{0k}(\xi', x_n)|_{x_n=0}\quad (k=1, \ldots, N;\ 1\leqslant\beta\leqslant\tau_k). \tag{4.37}$$

Положим

$$\begin{gathered}\widehat{u}_{j0}^+(\xi', x_n)-\widehat{v}_{j0}^+(\xi', x_n)=\widehat{w}_{j0}^+(\xi', x_n)\quad (j=1, \ldots, N),\\ \widehat{u}_{k\beta}(\xi')-\widehat{v}_{k\beta}(\xi')=\widehat{w}_{k\beta}(\xi')\quad (k=1, \ldots, N;\ 1\leqslant\beta\leqslant\tau_k).\end{gathered} \tag{4.38}$$

Из (2.22) и (4.37) следует равенство, аналогичное (4.32), с заменой $\widehat{u}_{j0}^+$ на $\widehat{v}_{j0}^+$, $\widehat{u}_{j\beta}$ на $\widehat{v}_{j\beta}$, а тогда из него и (4.32) получим после преобразования Фурье $F(x_n\to\xi_n)$, что

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(\xi', q)\,\xi_n^{p-1}\widetilde{w}_{j0}^+(\xi)=i\sum_{j:s_r+t_j\geqslant 1}\sum_{\beta=1}^{s_r+t_j} J^\beta \sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(\xi', q)\,\xi_n^{p-1}\widehat{w}_{j\beta}(\xi')$$

$$(r=1, \ldots, N). \tag{4.39}$$

Аналогично, из (4.27) с $\hat{f}_{rt}=0$ следует, что

$$\sum_{=1}^{N}\sum_{\beta=k}^{s_r+t_j+k} l_{\beta-k+1}^{rj}(\xi', q)\,\widehat{w}_{j\beta}(\xi')=0\quad (k=1, \ldots, \varkappa-s_r;\ r:\varkappa-s_r\geqslant 1). \tag{4.40}$$

Поскольку $u_{j0}(\xi', x_n)$ — сужение элемента $v_{j0}(\xi', x_n)$ на полуось $x_n>0$, то из (4.38) непосредственно следует, что $w_{j0}(\xi', x_n)$ либо тождественно равна нулю, либо, возможно, является обобщенной функцией, сосредоточенной в точке $x_n=0$. Но тогда преобразование Фурье $\widetilde{w}_{j0}(\xi', \xi_n)$ является многочленом по ξ_n. Из (4.39), поскольку матрица $l_0(\xi, q)$ неособенная, найдем (ср. (3.12)), что

$$\widetilde{\omega}_{j0}(\xi', \xi_n) = L^{-1}(\xi, q) \sum_{r=1}^{N} L_{rj}(\xi, q) \times$$

$$\times \sum_{\alpha: s_r+t_\alpha \geqslant 1} \sum_{\beta=1}^{s_r+t_\alpha} J^\beta \sum_{p=1}^{s_r+t_\alpha+1} l_p^{r\alpha}(\xi', q)\, \xi_n^{p-1} \widehat{\omega}_{\alpha\beta}(\xi'). \tag{4.41}$$

Учитывая, что $\widetilde{\omega}_j(\xi', \xi_n)$ — многочлен по ξ_n, и оценивая порядок поведения правой части (4.41) при $\xi_n \to \infty$, $(\xi', q) \neq 0$, легко найдем, что

$$\widetilde{\omega}_{j0}(\xi', \xi_n) = 0 \quad (\forall j\colon t_j = t_1),$$

$$\widetilde{\omega}_{j0}(\xi', \xi_n) = \sum_{\beta=1}^{t_1-t_j} c_{j\beta}(\xi')\, \xi_n^{\beta-1} \quad (\forall j\colon t_j < t_1). \tag{4.42}$$

Из (4.39) и (4.42) получим

$$\sum_{j: t_j < t_1} \sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} \sum_{\beta=1}^{t_1-t_j} c_{j\beta}(\xi')\, l_p^{rj}(\xi', q)\, \xi_p^{p+\beta-2} =$$

$$= i \sum_{j: s_r+t_j \geqslant 1} \sum_{\beta=1}^{s_r+t_j} J^\beta \sum_{p=1}^{s_r+t_j+1} l_p^{rj}(\xi', q)\, \xi_n^{p-1} \widehat{\omega}_{j\beta}(\xi') \quad (r = 1, \ldots, N). \tag{4.43}$$

Приравняем теперь в (4.43) коэффициенты при одинаковых степенях ξ_n. В частности, если приравняем в каждом уравнении (4.43) коэффициенты при самых высоких степенях ξ_n, то получим

$$\sum_{j: t_j < t_1} l_{s_r+t_j+1}^{rj}(\zeta', q)\, c_{j1}(\xi') - i \sum_{j: t_j = t_1} l_{s_r+t_j+1}^{rj}(\xi', q)\, \widehat{\omega}_{j1}(\xi') = 0 \quad (r = 1, \ldots, N). \tag{4.44}$$

Благодаря невырожденности матрицы $l_0(\xi, q)$ при $(\xi, q) \neq 0$ из (4.44) выводим, что

$$c_{j1}(\xi') = 0 \ \ (\forall j:\ t_j < t_1), \quad \widehat{\omega}_{j1}(\xi') = 0 \ \ (\forall j: t_j = t_1). \tag{4.45}$$

Далее приравниваем коэффициенты при более низких степенях ξ_n, учитываем (4.45). Получим снова благодаря эллиптичности с параметром, что

$$c_{j2}(\xi') = 0 \ (\forall j\colon t_j < t_1 - 1), \quad \widetilde{\omega}_{j2}(\xi') = 0 \ (\forall j\colon t_j = t_1),$$

$$\widehat{\omega}_{j1}(\xi') = 0 \ (\forall j\colon t_j = t_1 - 1). \tag{4.46}$$

Если

$$s_1 = \ldots = s_N = 0, \tag{4.47}$$

то, продолжая эти рассуждения, выведем из (4.43), что все $c_{j\beta}(\xi') = 0$ и что $\widehat{\omega}_{j\beta}(\xi') = 0$ $(j = 1, \ldots, N;\ \beta = 1, \ldots, t_j)$. Из (4.40) следует, что также $\widehat{\omega}_{j\beta}(\xi') = 0$ $(t_j \leqslant \beta \leqslant \tau_j;\ 1 \leqslant j \leqslant N)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &c_{j\beta}(\xi') = 0 \quad (\forall j: t_j < t_1,\ 1 \leqslant \beta \leqslant t_1 - t_j), \\ &\widehat{\omega}_{jk}(\xi') = 0 \quad (j = 1, \ldots, N;\ 1 \leqslant k \leqslant \tau_j). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Если (4.47) не выполняются, то соотношения (4.48) все же верны.

Однако в этом случае рассуждения усложняются, так как не все уравнения (4.40) дают вклад в получение полной системы равенств вида (4.44). Так, например, если $s_N=-t_1$, то последнее уравнение (4.39) содержит лишь функции $\hat{w}_{j0}(\xi', \xi_n)$ с $t_j=t_1$, а из первого равенства (4.48) следует, что они равны нулю. Поэтому последнее уравнение в этом случае не дает вклада в равенства (4.44), и система (4.44) не является полной. Однако в рассматриваемом случае последнее уравнение (4.39) порождает $\varkappa-s_N$ равенств (4.40). Последовательное привлечение этих равенств позволяет пополнить нужным образом неполные системы вида (4.44) и, как и в случае (4.47), убедиться, что по-прежнему верны соотношения (4.48). Из (4.37), (4.38) и (4.48) следует (4.36).

Поскольку по допущению вектор $(\hat{u}_{j\beta}(\xi'))$ отличен от нуля, то из (4.36) следует, что $\hat{u}_0(\xi', x_n)$ — отличное от нуля устойчивое решение системы (4.33). Из (4.28) (с $\hat{g}_h=0$) и (4.36) следует, что $\hat{u}_0(\xi', x_n)$ удовлетворяет (4.34). Задача (4.33), (4.34) имеет, следовательно, отличное от нуля устойчивое решение, что противоречит условию Лопатинского для эллиптической с параметром задачи (3.6), (3.7). Лемма доказана.

Заметим, что условие $\Delta(\xi', q)\neq 0$ для каждого $(\xi', q)\neq 0$ эквивалентно условию Лопатинского для задачи с параметром. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что из $\Delta(\xi', q)\neq 0$ следует, что задача (4.33), (4.34) имеет лишь тривиальное устойчивое решение. Если допустить, что $\hat{u}_0(\xi', x_n)$ — нетривиальное устойчивое решение этой задачи, то вектор $\widehat{u}_{j\beta}(\xi')=(D_n^{\beta-1}u_{j0})(\xi', 0)$ $(j=1, \ldots, N_1;\ 1\leqslant\beta\leqslant\tau_j)$ будет отличным от нуля решением однородной задачи (4.26)—(4.28), что невозможно.

4.5. Завершение доказательства теоремы 2 для $s<-t_1+1/2$

В предыдущем пункте исходная задача для рассматриваемых s сведена к линейной системе (4.26)—(4.28) $|\tau|$ уравнений с $|\tau|$ неизвестными, определитель которой отличен от нуля в каждой точке $(\xi', q)\neq 0$. При этом для каждой точки $(\xi', q)\neq 0$ из системы (4.26) выделяется m линейно независимых уравнений, через которые остальные линейно выражаются. Изучим подробнее систему (4.26)—(4.28).

Напомним, что правая часть (4.25) обозначена через $\widehat{f}^{h\gamma}(\xi')$. Если $f_{r0}^{+}(x)\in H_{+}^{s-s_r, t}(R^n)$ $(r=1, \ldots, N;\ t\in R)$, $q\neq 0$, то

$$f^{h\gamma}(x')\in H^{m-\gamma-1/2+t}(R_{n-1}') \quad (h=1, \ldots, N;\ \gamma=0, \ldots, m-1).$$

Если $|q|\geqslant q_0>0$, то справедлива оценка

$$\langle\langle f^{h\gamma},\ R_{n-1}',\ q\rangle\rangle_{m-\gamma-1/2+t}\leqslant c\sum_{r=1}^{N}\|f_{r0}^{+},\ R^n,\ q\|_{s-s_r, t}\ , \tag{4.49}$$

где $c=c(q_0)>0$ не зависит от f^+, q $(|q|\geqslant q_0)$. Доказательство непосредственно следует из (4.25), оценок (3.13) и определения норм (см. п. 2.1, 2.5).

Коэффициент $c_{h\gamma j\beta}(\xi', q)$ в (4.25), (4.26) является однородной функцией (ξ', q) порядка $-m-\beta+t_j+\gamma+s+1$, непрерывной при $(\xi', q)\neq 0$. Поэтому имеет место оценка

$$|c_{h\gamma j\beta}(\xi', q)|\leqslant c(|\xi'|^2+|q|^2)^{(-m-\beta+t_j+\gamma+s+1)/2} \tag{4.50}$$

$$(h=1, \ldots, N;\ \gamma=0, \ldots, m-1;\ j=1, \ldots, N_1;\ \beta=1, \ldots, \tau_j).$$

Зафиксируем $(\xi_0', q_0) \in S_+^{n-1} = \{(\xi', q): |\xi'|^2 + q^2 = 1\}$. Тогда среди Nm уравнений (4.26) существует m линейно независимых, через которые остальные линейно выражаются, т. е. существует минор порядка m, отличный от нуля в точке (ξ_0', q_0). Этот минор является непрерывной функцией (ξ', q), поэтому он отличен от нуля в некоторой окрестности $U(\xi_0', q_0) \subset S^{n-1}$ точки (ξ_0', q_0). Без ограничения общности можно считать, что минор отличен от 0 и в замыкании $\bar{U}$ окрестности U. Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — конечное покрытие S^{n-1} окрестностями указанного типа. Для каждой окрестности U_j выделим из (4.26) m линейно независимых уравнений и рассмотрим их для тех $(\xi', q) \neq 0$, для которых $(\xi', q)/|(\xi', q)| \subset U_j$ (множество таких (ξ', q) обозначается V_j). В дальнейшем в этом пункте, ссылаясь на (4.26) для $(\xi', q) \in V_j$, мы имеем в виду лишь выделенные m уравнений.

Из (4.27), (4.7) следует, что коэффициенты $l^{rj}_{\beta-k+1}(\xi', q)$ при $U_{j\beta}(\xi')$ системы (4.27) являются непрерывными однородными функциями (ξ', q) порядка $s_r + t_j - \beta + k$, поэтому справедлива оценка

$$|l^{rj}_{\beta-k+1}(\xi', q)| \leqslant c(|\xi'|^2 + q^2)^{(s_r+t_j-\beta+k)/2}$$

$$(k=1, \ldots, \varkappa - s_r;\ r: \varkappa - s_r \geqslant 1;\ \varkappa = \max\{0, \sigma_1+1, \ldots, \sigma_m+1\}). \quad (4.51)$$

Аналогично коэффициенты $b^{rj}_\beta(\xi, q)$ при $\widehat{u}_{j\beta}(\xi')$ в системе (4.28) являются непрерывными однородными функциями (ξ', q) порядка $\sigma_h + t_j - \beta + 1$, поэтому

$$|b^{hj}_\beta(\xi', q)| \leqslant c(|\xi'|^2 + q^2)^{(\sigma_h+t_j-\beta+1)/2}$$

$$(j=1, \ldots, N;\ h=1, \ldots, m;\ \beta=1, \ldots, \sigma_h + t_j + 1). \quad (4.52)$$

Постоянная c в (4.50)—(4.52) не зависит от (ξ', q).

Система (4.26)—(4.28) имеет структуру системы Дуглиса—Ниренберга: если столбцу коэффициентов при $u_{j\beta}$ поставить в соответствие число $t_j - \beta + 1$, а строке с номером (R, γ) системы (4.32) — число $-m + \gamma + s$; строке с номером (r, k) системы (4.33) — число $s_r + k - 1$; строке с номером h системы (4.34) — число σ_h, то вследствие (4.56)—(4.58) порядок однородности коэффициента при $\hat{u}_{j\beta}$, лежащего на пересечении указанных строк и столбцов, равен сумме соответствующих чисел. Поэтому определитель $\Delta(\xi', q)$ $((\xi', q) \in V_i)$ является однородной функцией некоторого порядка M_i и

$$c^{-1}(|\zeta'|^2 + q^2)^{M_i/2} \leqslant |\Delta(\xi', q)| \leqslant c(|\xi'|^2 + q^2)^{M_i/2} \quad ((\xi', q) \in V_i).$$

Поэтому если t_{jk} — порядок элемента $a_{jk}(\xi', q)$ рассматриваемой системы, а $A_{jk}(\xi', q)$ — алгебраическое дополнение этого элемента, то

$$|A_{jk}(\xi', q)/\Delta(\xi', q)| \leqslant c(|\xi'|^2 + |q|^2)^{-t_{jk}/2},$$

где $c > 0$ не зависит от $(\xi', q) \in V_i$. Тогда для решения $\hat{u}_{j\beta}(\xi') = \hat{u}_{j\beta}(\xi', q)$ системы (4.26)—(4.28) получаем оценку

$$|\widehat{u}_{j\beta}(\xi')| \leqslant c\Big(\sum_{n=1}^{N}\sum_{\gamma=0}^{m-1} |\widehat{f}^{h\gamma}(\xi')|(|\xi'|^2 + q^2)^{(m+\beta-t_j-\gamma-s-1)/2} +$$

$$+\sum_{r:\varkappa-s_r\geqslant 1}\sum_{k=1}^{\varkappa-s_r}|\widehat{f}_{rk}(\xi')|(|\xi'|^2+q^2)^{(-s_r-t_j+\beta-k)/2}+$$

$$+\sum_{h=1}^{m}|\widehat{g}_h(\xi')|(|\xi'|^2+q^2)^{(-\sigma_h+t_j+\beta-1)/2}\Big). \qquad (4.53)$$

Здесь $(\xi', q)\in V_1\cup\ldots\cup V_k$, т. е. $(\xi', q)\neq 0$; $c>0$ не зависит от (ξ', q).

Из (4.53), определения норм $\langle\!\langle\cdot, R^{n-1}, q\rangle\!\rangle_s$ и (4.49) непосредственно следует, что при $|q|\geqslant q_0>0$

$$\langle\langle u_{j\beta}, R'_{n-1}, q\rangle\rangle^2_{t_j+s-\beta+1/2+t}\leqslant c\Big(\sum_{r=1}^{N}\|f^+_{r0}, R^n, q\|^2_{s-s_r,t}+$$

$$+\sum_{r:\varkappa-s_r\geqslant 1}\sum_{k=1}^{\varkappa-s_r}\langle\langle f_{rk}, R'_{n-1}, q\rangle\rangle^2_{s-s_r-k+1/2+t}+$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\langle\langle g_h, R'_{n-1}, q\rangle\rangle^2_{s-\sigma_h-/12+t}\Big), \qquad (4.54)$$

где постоянная $c>0$ не зависит от f^+_0, f_{rk}, g и q ($|q|\geqslant q_0>0$). При этом предполагается, что $f^+_{r0}\in H^{s-s_r,t}_+(R^n)$, $f_{rk}\in H^{s-s_r-k+1/2+t}(R'_{n-1})$, $g_h\in \in H^{s-\sigma_h-1/2+t}(R'_{n-1})$, $t\in R$, $s<-t_1+1/2$ (см. п. 4.3).

Теперь можно из (4.6) или (4.10)—(4.11) с помощью леммы 3 найти $u^+_0\in\prod_{1\leqslant j\leqslant N}H^{t_j+s,t}_+(R^n)$. При этом из леммы 1, (4.24) и (4.54) выводим для $|q|\geqslant q_0>0$ оценку

$$\sum_{j=1}^{N}\|u^+_{j0}, R^n, q\|_{t_j+s,t}+\sum_{j:\tau_j\geqslant 1}\sum_{\beta=1}^{\tau_j}\langle\langle u_{j\beta}, R'_{n-1}, q\rangle\rangle_{t_j+s-\beta+1/2+t}\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{r=1}^{N}\|f^+_{r0}, R^n, q\|_{s-s_r,t}+\sum_{r:\varkappa-r_r\geqslant 1}\sum_{k=1}^{\varkappa-s_r}\langle\langle f_{rk}, R'_{n-1}, q\rangle\rangle_{s-s_r-k+t+1/2}+$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\langle\langle g_h, R'_{n-1}, q\rangle\rangle_{s-\sigma_h+t-1/2}\Big), \qquad (4.55)$$

где $c=c(q_0)>0$ не зависит от f_{r0}, f_{rk}, g.

Таким образом, доказана следующая

Лемма 6. *Пусть задача* (3.6), (3.7) — *эллиптическая с параметром. Пусть* $s<-t_1+1/2$, $t\in R$,

$$f_{r0}\in H^{s-s_r,t}_+(R^n)\quad (r=1, \ldots, N),$$

$$f_{rk}\in H^{s-s_r-k+t+1/2}(R'_{n-1})\,(r:\varkappa-s_r\geqslant 1;\; k=1, \ldots, \varkappa-s_r),$$

$$g_h\in H^{s-\sigma_h+t-1/2}(R'_{n-1})\quad (h=1, \ldots, m).$$

Тогда для каждого $q_0>0$ *задача* (4.6), (4.8), (4.9) *имеет при* $|q|\geqslant q_0$ *одно и только одно решение*

$$(u_0^+,\ \{u_{j\beta}\})\ \Big(u_0^+\in \prod_{1\leqslant j\leqslant N} H_+^{t_j+s,t}(R^n),\ u_{j\beta}\in H^{t_j+s-\beta+t+1/2}(R'_{n-1})\Big)$$

и справедлива оценка (4.55).

Из леммы 6 (с $t=0$) непосредственно следует утверждение теоремы 2 для $s<-t_1+1/2$.

4.6. Доказательство теоремы 2 для $s>-t_1+1/2$

4.6.1. Пусть $s\in R$, $s>-t_1+1/2$, $s\neq 1/2\,(\mathrm{mod}\,1)$,

$$f=(f_1,\ \ldots,\ f_N)\in\prod_{r=1}^{N}\widetilde{H}^{s-s_r,(\varkappa-s_r)}(R_+^n),$$

$$g=(g_1,\ \ldots,\ g_m)\in\prod_{h=1}^{m}H^{s-\sigma_h-1/2}(R'_{n-1});$$

$$Sf_r=(f_{r0},\ \ldots,\ f_{r,\varkappa-s_r}),\ f_{r0}\in H^{s-s_r}(R_+^n),$$

$$f_{rk}\in H^{s-s_r-k+1/2}(R'_{n-1})\ (r=1,\ \ldots,\ N;\ k=1,\ \ldots,\ \varkappa-s_r). \tag{4.56}$$

Тогда $f_{rk}=D_n^{k-1}f_{r0}|_{x_n=0}$, если $s-s_r-k+1/2>0$ (см. п. 2.6.1).

Для $s-s_r\leqslant 0$ пространство $H^{s-s_r}(R_+^n)$ изометрически эквивалентно подпространству $H_+^{s-s_r}(R^n)$ пространства $H^{s-s_r}(R^n)$, поэтому в этом случае $f_{r0}=f_{r0}^+$ и $\operatorname{supp} f_{r0}\subset\overline{R}_+^n$; кроме того, в этом случае из (2.3) следует, что

$$H_+^{s-s_r}(R^n)=H_+^{(-t_1-s_r+t)+(s+t_1-t)}(R^n)\subset H_+^{-t_1-s_r+t,s+t_1-t}(R^n),$$

если $s+t_1-t>0$. Если $0<s-s_r<1/2$, то $f_{r0}\in H^{s-s_r}(R_+^n)$ влечет $f_{r0}^+\in H_+^{s-s_r}(R^n)$ и $\|f_{r0},\ R_+^n,\ q\|_{s-s_r}\leqslant\|f_{r0}^+,\ R^n,\ q\|_{s-s_r}$ (см. п. 2.2). Если $s-s_r>1/2$, то из $f_{r0}\in H^{s-s_r}(R_+^n)$ следует лишь, что продолжение нулем $f_{r0}^+\in H_+^{\delta}(R^n)$ $(\delta<1/2)$. Более точно, включение $f_{r0}\in H^{s-s_r}(R_+^n)$ влечет $f_{r0}^+\subset H_+^{\delta,s-s_r-\delta}(R^n)$.

Таким образом, для $-t_1+1/2<s<0$, $s\neq 1/2$ (mod 1), включение $f_{r0}\in H^{s-s_r}(R_+^n)=H^{(-t_1-s_r+\delta)+(s+t_1-\delta)}(R_+^n)$ влечет включение $f_{r0}^+\in H_+^{-t_1-s_r+\delta,s+t_1-\delta}(R^n)$ $(0\leqslant\delta<1/2;\ r=1,\ \ldots,\ N)$, поскольку из (4.56) следует, что $s+t_1-\delta>0$. Имеет место неравенство

$$\|f_{r0}^+,\ R^n,\ q\|_{-t_1-s_r+\delta,s+t_1-\delta}\leqslant c\,\|f_{r0},\ R_+^n,\ q\|_{s-s_r}, \tag{4.57}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от f_{r0}, q.

Рассмотрим теперь задачу (3.6), (3.7), т. е. задачу (4.6), (4.8), (4.9) с f и g, удовлетворяющими (4.56). Поскольку

$$f_{r0}^{+}\in H_{+}^{-t_1-s_r+\delta,s+t_1-\delta}(R^n),\quad f_{rt}\in H^{-t_1-s_r+\delta+1/2+(s+t_1-\delta)}(R'_{n-1}),$$

$$g_h\in H^{-t_1+\delta-\delta_h-1/2+(s+t_1-\delta)}(R'_{n-1}),$$

то по лемме 6 (с $s=-t_1+\delta$) задача (4.4), (4.8), (4.9) имеет для каждого $q\neq 0$ одно и только одно решение

$$(u_0^{+},\ \{u_{j\beta}\})\left(u_0^{+}\in\prod_{1\leqslant j\leqslant N}H_{+}^{t_j-t_1+\delta,s+t_1-\delta}(R^n),\ u_{j\beta}\in H^{t_j+s-\beta+1/2}(R'_{n-1})\right)$$

и для $|q|\geqslant q_0>0$ справедлива оценка (4.55), которую на основании (4.57) и определения нормы (2.15) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{N}\|u_{j0}^{+},\ R^n,\ q\|_{t_j-t_1+\delta,s+t_1-\delta}+\sum_{j:\tau_j\geqslant 1}\sum_{\beta=1}^{\tau_j}\langle\langle u_{j\beta},\ R'_{n-1},\ q\rangle\rangle_{t_j+s-\beta+1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c(q_0)\left(\sum_{r=1}^{N}|||f_r,\ R_{+}^{n},\ q|||_{s-s_r,(\varkappa-s_r)}+\sum_{h=1}^{m}\langle\langle g_h,\ R'_{n-1},\ q\rangle\rangle_{s-\sigma_h-1/2}\right).\quad(4.58)$$

4.6.2. Докажем теперь, что

$$u_{j0}\in H^{t_j+s}(R_{+}^{n})\quad(\forall\, j:t_j+s\geqslant 0,\ s\equiv 1/2\,(\mathrm{mod}\,1));\quad(4.59)$$

здесь u_{j0} — сужение u_{j0}^{+} на R_{+}^{n}.

Пусть $r_j=[t_j+s+1/2]$ — ближайшее к t_j+s неотрицательное целое, тогда $|t_j+s-r_j|<1/2$. Из (2.13), (2.12) следует, что при $|q|\geqslant$ $\geqslant q_0>0$

$$\|u_{j0},\ R_{+}^{n},\ q\|_{t_j+s}^{2}\sim\|\theta^{+}\Lambda_{-}^{r_j}u_{j0}^{+},\ R^n,\ q\|_{t_j+s-r_j}^{2}=$$

$$=\int|F(\theta^{+}\Lambda_{-}^{r_j}u_{j0}^{+})(\xi)|^2(1+|\xi|^2+q^2)^{t_j+s-r_j}d\xi=$$

$$=\int|F\theta^{+}F^{-1}\left(\left(\xi_n-i\sqrt{|\xi'|^2+q^2}\right)^{r_j}\tilde{u}_0^{+}(\xi)\right)|^2(1+|\xi|^2+|q|^2)^{t_j+s-r_j}d\xi.\quad(4.60)$$

Подставим сюда вместо $\tilde{u}_{j0}^{+}$ выражение (4.14), в котором Φ_r^{+} определяются в (4.11); учтем, что $f_{r0}\in H^{s-s_r}(R_{+}^{n})$, поэтому при $s-s_r>1/2$ функция f_{r0}^{+} имеет скачки при $x_n=0$. Пусть

$$f_{rt}=D_n^{t-1}f_{r0}|_{x_n=0}\quad(t=1,\ \ldots,\ n_r),\ n_r=[s-s_r+1/2]-$$

ближайшее к $s-s_r$ натуральное число, а $Tf\in H^{s-s_r}(\mathbf{R}^n)$ — непрерывное продолжение f_{r0}. Тогда из (2.22) следует, что

$$\Lambda_{-}^{n_r}f_{r0}^{+}=\theta^{+}\Lambda_{-}^{n_r}Tf_{r0}+i\sum_{k=1}^{n_r}(J^k\Lambda_{-}^{n_r})(f_{rk}(x',\ 0)\times\delta(x_n))\quad(r:s-s_r>1/2),$$

при этом $\theta^{+}\Lambda_{-}^{n_r}Tf_r$ не зависит от выбора продолжения. Поэтому

$$f_{r0}^{+}=\Lambda_{-}^{-n_r}\left(\theta^{+}\Lambda_{-}^{n_r}f_{r0}^{+}+i\sum_{k=1}^{n_r}(J^k\Lambda_{-}^{n_r})(f_{rk}(x',\ 0)\times\delta(x_n))\right)\quad(r:s-s_r>1/2).$$

Оценивая полученные слагаемые подобно (4.35), получим в результате, учитывая (4.58), что

$$\|u_{j0},\ R^n_+,\ q\|_{t_j+s}\leqslant c\Big(\sum_{r=1}^{N}|||f_r,\ R^n_+,\ q|||_{s-s_r,(\varkappa-s_r)}+$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\langle\langle g_h,\ R'_{n-1},\ q\rangle\rangle_{s-\sigma_h-1/2}\Big)\quad (\forall j: t_j+s\geqslant 0), \tag{4.61}$$

и включение (4.59) доказано.

4.6.3. Предположим теперь, что $s\geqslant\varkappa$ (см. п. 3.1). Тогда из (4.61) следует, что $u_{j0}\in H^{t_j+s}(R^n_+)$ $(j=1,\ \ldots,\ N)$ и что существуют следы $D_n^{\beta-1}u_{j0}|_{x_n=0}$ $(j:\tau_j\geqslant 1,\ \beta=1,\ \ldots,\ \tau_j)$ (напомним, что $\tau_j=t_j+\varkappa$). Рассуждая точно так же, как и при доказательстве соотношения (4.36), убеждаемся, что

$$D_n^{\beta-1}u_{j0}|_{x_n=0}=u_{j\beta}\quad (j:\tau_j\geqslant 1;\ \beta=1,\ \ldots,\ \tau_j).$$

Отсюда и из (4.58), (4.61) непосредственно следует утверждение теоремы 2 для $s\geqslant\varkappa$.

4.6.4. Пусть теперь $-t_1+1/2<s<\varkappa$, $s\not\equiv 1/2 \pmod 1$. Из (4.59), (4.61) и сказанного в п. 4.6.3 с помощью аппроксимации правых частей и решений гладкими элементами следует, что

$$D_n^{\beta-1}u_{j0}|_{x_n=0}=u_{j\beta}(x')\quad (\forall j: t_j+s>1/2,\ 1\leqslant\beta<t_j+s+1/2). \tag{4.62}$$

4.6.5. Пусть снова $-t_1+1/2<s<\varkappa$. Докажем, что

$$u_{j0}\in H^{t_j+s}(R^n_+)\quad (\forall j: t_j+s<0), \tag{4.63}$$

где u_{j0} — сужение u^+_{j0} на R^n_+ (ср. с (4.59)).

Пусть $r_k=[t_k+s+1/2]$ — ближайшее к t_k+s натуральное число, а $n_j=[s-s_j+1/2]$ — ближайшее к $s-s_j$ целое число. Воспользовавшись соотношениями (4.59), (4.62), запишем уравнения системы (4.10), для которых $s-s_j<1/2$, в виде (2.24), перейдем в них к фурье-образам и умножим полученные равенства на $\xi_n^{r_1}$. Уравнения системы с номером j $(s-s_j>1/2)$ продифференцируем n_j раз по x_n, перейдем затем к фурье-образам и умножим их на $\xi_n^{t_1+s_j}$. В результате получим линейную систему относительно неизвестных

$$\{\xi_n^{t_1-t_k}\widetilde{D_n^{r_k}u_{k0}}(\xi)\}_{k:t_k+s>1/2},\quad \{\xi_n^{r_1}\tilde{u}^+_{k0}(\xi)\}_{k:t_k+s<1/2},$$

определитель (1.3) которой $L(\xi,\ q)\neq 0$, если $|\xi|+|q|>0$, благодаря эллиптичности с параметром. Это позволяет получить оценку

$$\int_{R^n}|\xi_\nu^{r_1}\widetilde{u^+_r}(\xi)|^2(1+|\xi|^2+q^2)^{t_r+s-r_1}d\xi\leqslant c\Big(\sum_{j=1}^{N}|||f_j,\ R^n_+,\ q|||^2_{s-s_j,(\varkappa-s_j)}+$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\langle\langle g_h,\ R'_{n-1},\ q\rangle\rangle^2_{s-\sigma_h-1/2}\Big)\quad (\forall r: t_r+s<1/2),$$

где $c=c(q_0)$ не зависит от f, g, q. Отсюда и из леммы 6 следует, что

$$\|u_r,\ R^n_+,\ q\|^2_{t_r+s} \leqslant c\Big(\sum_{j=1}^{N} |||f_j,\ S^n_+,\ q|||^2_{s-s_j,(\varkappa-s_j)}+$$
$$+\sum_{h=1}^{m}\langle\langle g_h,\ R'_{n-1},\ q\rangle\rangle^2_{s-\sigma_h-1/2}\Big) \quad (\forall r: t_r+s<1/2), \qquad (4.64)$$

и включение (4.63) установлено. Теорема 2 полностью доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 1

5.1. Оценка оператора умножения на функцию

Для каждого $t\geqslant 0$ обозначим через $\hat{t}$ число, равное t, если t — целое, и большее t, если t — нецелое; $[t]$ — целая часть t. Справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $t\geqslant 0$, $a\in C_0^{\hat{t}}(\bar{\Omega})$, $D^\mu a\in L_\infty(\Omega)$ $(|\mu|\leqslant[t])$, $\partial\Omega$ — поверхность класса C^1, если $\Omega=G$ — ограниченная область. Тогда существует число $q_0>0$ такое, что при $|q|\geqslant q_0$ имеет место неравенство*

$$\|au,\ \Omega,\ q\|_s \leqslant c\,\|a\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|u,\ \Omega,\ q\|_s \quad (|s|\leqslant t), \qquad (5.1)$$

где $c>0$ не зависит от u, a, q $(|q|\geqslant q_0)$.

Если $s>0$ целое, то из определения обычной соболевской нормы и формулы Лейбница для производной произведения следует существование постоянной $c_1=c_1(a)$ такой, что

$$\|au,\ \Omega,\ q\|_s \leqslant \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|u,\ \Omega,\ q\|_s + c_1\|u,\ \Omega,\ q\|_{s-1}.$$

С помощью оценки (2.11) отсюда следует требуемая оценка (5.1), если $|q|\geqslant q_0$, а $q_0>0$ выбрано достаточно большим. Подобным образом оценка (5.1) устанавливается также и для нецелых $s>0$. Для $s<0$ она следует по сопряжению.

Справедлива также следующая

Лемма 8. *Пусть $a\in C^{\widehat{|s|}}(\partial\Omega)$ и все (тангенциальные) производные до порядка $[|s|]$ ограничены, пусть $\partial\Omega$ — класса $C^{\widehat{|s|}}$, $s\in R$. Тогда существует число $q_0>0$ такое, что при $|q|\geqslant q_0$ справедливо неравенство*

$$\langle\langle au,\ \partial\Omega,\ q\rangle\rangle_s \leqslant c\,\|a\|_{L_\infty(\partial\Omega)}\langle\langle u,\ \partial\Omega,\ q\rangle\rangle_s, \qquad (5.2)$$

где постоянная $c>0$ не зависит от a, u, q $(|q|\geqslant q_0)$.

Действительно, если $\partial\Omega=R'_{n-1}$, то лемма 8 непосредственно следует из леммы 7. Если же $\partial\Omega=\partial G$ — граница ограниченной области, то утверждение леммы следует тогда с помощью разложения единицы и локального распрямления границы.

Из этих лемм и определения нормы (2.15) непосредственно следует, что для каждого $s\in R$ при достаточной регулярности $\partial\Omega$ и $a(x)$ существует число $q_0>0$ такое, что при $|q|\geqslant q_0$ справедлива оценка

$$|||au,\ \Omega,\ q|||_{s,(r)} \leqslant c\,\|a\|_{L_\infty(\Omega)}\,|||u,\ \Omega,\ q|||_{s,(r)}, \qquad (5.3)$$

где постоянная $c>0$ не зависит от a, u, q $(|q|\geqslant q_0)$.

5.2. Из (5.1) — (5.3) легко вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 9. *Пусть $s \in R$ и выполнены предположения о регулярности теоремы 1. Тогда существует число $q_0 > 0$ такое, что при $|q| \geqslant q_0$ справедлива оценка*

$$\sum_{r=1}^{N} |||(l(x, D, q)u)_r, G, q|||_{s-s_r,(\varkappa-s_r)} + \sum_{h=1}^{m} \langle\langle (b(x, D, q)u)_h, \partial G, q\rangle\rangle_{s-\sigma_h-1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c(\max\{|a_{\alpha k}^{rj}(x)| : x \in \overline{G}, |\alpha| + k = s_r + t_j, r, j = 1, \ldots, v\} +$$

$$+ \max\{|b_{\alpha k}^{hj}(x)| : x \in \partial G, |\alpha| + k = \sigma_h + t_j; h = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, v\}) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N} |||u_i, G, q|||_{t_i+s,(\tau_i)}, \tag{5.4}$$

где постоянная $c = c_s > 0$ не зависит от u, $a_{\alpha k}^{rj}$, $b_{\alpha k}^{hj}$ и q $(|q| \geqslant q_0)$.

Из этой леммы непосредственно следует второе неравенство (3.5).

5.3. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось доказать, что для каждого $s \in R$ существует число $q_0 > 0$ такое, что при $|q| \geqslant q_0$ для каждого $F \in \tilde{\mathcal{K}}^s(G, \partial G, q)$ существует один и только один элемент $u \in \tilde{H}^s(G, q)$ такой, что $A_s u = F$ и справедлива первая оценка (3.5). Это утверждение следует теперь из леммы 1, теоремы 2, где подобные утверждения установлены для задач с постоянными коэффициентами в пространстве и полупространстве, и леммы 9 с помощью достаточно мелкого разложения единицы и применения известной методики (ср. [2]).

В неравенствах (3.5) фигурируют постоянные $c_s > 0$, зависящие от $s \in R$. С помощью интерполяционной теоремы (см. [6, с. 254]) убеждаемся, что функция $s \mapsto c_s$ ограничена на любом компакте (при этом, конечно, предполагается, что условия о регулярности теоремы выполнены для всех s из рассматриваемого компакта).

Отметим в заключение, что основные результаты данной работы были ранее кратко изложены в [16] (см. также [17]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Agmon S. On the eigenfunktions and on eigenvalues of general elliptic boundary value problems//Comm. on Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119—147.
2. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида//Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 3. С. 53—161.
3. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с параметром в классах обобщенных функций//Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 2. С. 214—218.
4. Соломяк М. З. Оценка нормы резольвенты эллиптического оператора в пространствах Lp//Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 6. С. 141—148.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
7. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// //Мат. сб. 1965. Т. 68, № 3. С. 373—415.
8. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Граничные задачи с параметром в Lp для эллиптических в смысле Дуглиса—Ниренберга систем//Укр. мат. журн. 1967. Т. 19, № 1. С. 115—120.

9. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Дуглиса—Ниренберга. I.//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 3. С. 665—706.
10. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
11. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
12. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений//ДАН СССР. 1964. Т. 157, № 4. С. 798—801.
13. Ройтберг Я. А. О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений//Мат. сб. 1971. Т. 86, № 2. С. 248—267.
14. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations, satisfying general boundary conditions. I, II//Comm. on Pure and Appl. Math. 1959. V. 12. P. 623—727; 1964. V. 17. P. 35—92.
15. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
16. Ройтберг Я. А., Сердюк В. А. Теорема о полном наборе изоморфизмов для общих эллиптических задач с параметром//Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 5. С. 641—644.
17. Ройтберг Я. А., Сердюк В. А. Эллиптические задачи с параметром в пространствах обобщенных функций для общих систем уравнений. — Препринт. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1982. С. 3—60.