A. V. Bobylev, Exact solutions of the nonlinear Boltzmann equation and the theory of relaxation of a Maxwellian gas, *TMF*, 1984, Volume 60, Number 2, 280–310

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 2
август, 1984

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И ТЕОРИЯ РЕЛАКСАЦИИ МАКСВЕЛЛОВСКОГО ГАЗА

Бобылев А. В.

Дан обзор результатов последних лет по теории нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул. Изложена общая теория пространственно однородной релаксации, основанная на преобразовании Фурье по скорости. Изучена асимптотика функции распределения $f(\mathbf{v}, t)$ при $|\mathbf{v}|\to\infty$ (формирование максвелловских хвостов) и при $t\to\infty$ (скорость релаксации). Построено аналитическое преобразование, связывающее нелинейное и линеаризованное уравнения. Показано, что нелинейное уравнение имеет счетное множество инвариантов, построены семейства частных решений специального вида, отмечена аналогия с уравнениями типа Кортевега – де Фриза.

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые выведенное из феноменологических соображений в 1872 г. уравнение Больцмана [1] сразу стало источником многих проблем как принципиального (как примирить обратимость во времени уравнений классической механики с необратимым поведением решения уравнения Больцмана?), так и более практического (как решать это уравнение?) характера. В вопросе обоснования уравнения Больцмана основополагающую роль сыграла монография Н. Н. Боголюбова [2], в которой, кроме того, были описаны систематические методы вывода обобщенных кинетических уравнений из уравнения Лиувилля. Развитие идей и методов Н. Н. Боголюбова привело в дальнейшем к построению новых более сложных кинетических уравнений, однако решение даже «простейшего» из них – уравнения Больцмана – все еще остается довольно трудной проблемой. С этой проблемой и связан тот сравнительно узкий круг вопросов, который рассматривается в данной работе. Здесь удобно для краткости просто постулировать уравнение Больцмана, рассматривая его как математическую модель разреженного газа и не возвращаясь более к вопросу о его последовательном выводе.

В классической кинетической теории разреженных одноатомных газов состояние газа в момент времени $t\geqslant 0$ характеризуется (одночастичной) функцией распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ его молекул по пространственным координатам $\mathbf{x}\in R^3$ и скоростям $\mathbf{v}\in R^3$, где через R^3 обозначено вещественное трехмерное евклидово пространство. Функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ представляет собой, грубо говоря, число частиц в единице объема фазового пространства $R^3\times R^3$ в момент времени t, а ее временная эволюция описывается уравнением Больцмана

$$(1.1)\qquad \frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}=I[f,f],$$

где справа стоит так называемый интеграл столкновений — нелинейный интегральный оператор, действующий на $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ только по переменной $\mathbf{v}$. Опуская здесь и ниже несущественные аргументы $\mathbf{x}$ и t, правую часть (1.1) можно представить в виде

$$(1.2)\qquad I[f,f]=\int d\mathbf{w}\,d\mathbf{n}g\left(u,\frac{\mathbf{un}}{u}\right)\{f(\mathbf{v}')f(\mathbf{w}')-f(\mathbf{v})f(\mathbf{w})\},$$

где $\mathbf{w}\in R^3$, $d\mathbf{w}$ — элемент объема R^3, $\mathbf{n}\in R^3$ — единичный вектор, т. е. $|\mathbf{n}|=1$, $d\mathbf{n}$ — элемент площади поверхности единичной сферы Ω в R^3; интегрирование проводится по всему пятимерному пространству $R^3\times\Omega$. Использованы также следующие обозначения:

$$(1.3)\qquad \begin{aligned}&\mathbf{u}=\mathbf{v}-\mathbf{w},\quad u=|\mathbf{u}|,\quad g(u,\mu)=u\sigma(u,\mu),\\ &\mathbf{v}'={}^1/_2(\mathbf{v}+\mathbf{w}+u\mathbf{n}),\quad \mathbf{w}'={}^1/_2(\mathbf{v}+\mathbf{w}-u\mathbf{n}).\end{aligned}$$

Предполагается, что столкновения молекул происходят по законам классической механики частиц, взаимодействующих с парным потенциалом $U(r)$, где r — расстояние между частицами. Функция $\sigma(u,\mu)$ в (1.3) есть выраженное как функция аргументов $u>0$ и $\mu=\cos\theta$ дифференциальное сечение рассеяния на угол $0<\theta\leqslant\pi$ в системе центра масс сталкивающихся частиц. В теории уравнения Больцмана $g(u,\mu)$ в (1.2) обычно считается просто заданной неотрицательной функцией, подчиненной некоторым ограничениям, выбираемым из физических соображений. Например, для молекул — твердых шариков радиуса r_0 получим $g(u,\mu)=ur_0^2$, а для молекул — точечных частиц, взаимодействующих по степенному закону $U(r)=\alpha/r^n$ $(\alpha>0,\ n\geqslant2)$, $g(u,\mu)=u^{1-4/n}g_n(\mu)$, где $g_n(\mu)(1-\mu)^{3/2}$ — ограниченная функция.

Именно нелинейность и сложная структура интеграла столкновений (1.2) являются основными препятствиями при попытке решения уравнения Больцмана. Для этого уравнения рассматриваются как задачи с начальными условиями, так и граничные задачи. Наиболее простая задача, в которой отчетливо проявляются все трудности, связанные с интегралом столкновений,— это пространственно однородная задача Коши

$$(1.4)\qquad \frac{\partial f}{\partial t}=I[f,f],\qquad f|_{t=0}=f_0(\mathbf{v})$$

или задача о релаксации (приближении к равновесию) однородного по пространству газа. Эта задача представляет самостоятельный интерес, и, кроме того, ее решение является необходимым промежуточных этапом для решения полного, т. е. пространственно неоднородного, уравнения (1.1).

К настоящему времени для уравнения Больцмана решены многие, хотя далеко не все, общие математические проблемы, касающиеся существования и единственности решения задачи Коши и краевых задач, разработаны различные приближенные подходы, обобщающие известные методы Гильберта, Чепмена — Энского и Грэда [3]. Однако еще сравнительно недавно характерной особенностью работ по нелинейному уравнению Больцмана можно было считать почти полное отсутствие точных аналитических результатов: так, например, первое нетривиальное точное решение этого уравнения было построено только в 1975 г. [4, 5] (см. также [6, 7]). Именно в этой связи определенный интерес могут представить результаты, обзору которых посвящена данная работа. Результаты относятся в основном к специальному случаю уравнения Больцмана — так называемой модели максвелловских молекул, но в рамках этой модели, довольно типичной с физической точки зрения, удается получить подробную аналитическую информацию о поведении решений пространственно однородного уравнения и по существу построить точную теорию процесса релаксации такого газа.

Максвелловские молекулы — это частицы, взаимодействующие с потенциалом отталкивания $U(r)=\alpha/r^4$. В этом случае сечение $\sigma(u, \mu)$ обратно пропорционально модулю относительной скорости $\mathbf{u}$, и входящая в (1.2) функция $g(u, \mu)$ не зависит от u, что приводит к некоторым упрощениям вычислений, связанных с интегралом столкновений. Эти упрощения давно известны (см., например, главу 3 книги Л. Больцмана [1]) и использовались практически всеми, кто работал с уравнением Больцмана. Однако только в 1975 г. было обнаружено [4, 8], что здесь может быть достигнуто гораздо более серьезное упрощение нелинейного оператора (1.2), чем предполагалось ранее, и это упрощение достигается с помощью обычного преобразования Фурье по скорости. Именно преобразование Фурье впервые позволило построить точное решение [4] и послужило ключевым методом для получения большинства результатов, описанных ниже.

Идея подхода состоит в следующем. Перейдем в (1.1) к фурье-представлению, полагая

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{v} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \tag{1.5}$$

и в результате получим следующее уравнение для $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{k}\, \partial \mathbf{x}} = J[\varphi, \varphi] = \int d\mathbf{v} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}} I[f, f]. \tag{1.6}$$

Оказывается, что в исключительном случае максвелловских молекул (точнее, для любой не зависящей от u функции $g(u, \mu)$ в (1.2)) оператор $J[\varphi, \varphi]$ сильно упрощается по сравнению с оператором $I[f, f]$ (см. раздел 2), благодаря чему работать с преобразованным уравнением становится гораздо легче. К сожалению, появление смешанной производной в (1.6) мешает эффективно воспользоваться этим свойством для решения пространственно неоднородных задач. Однако для задачи о релаксации (1.4), имеющей в фурье-представлении вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = J[\varphi, \varphi], \qquad \varphi|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{k}), \tag{1.7}$$

эта трудность отсутствует, и упрощение оказывается решающим. Указанные обстоятельства объясняют причины, по которым мы далее ограничиваемся в основном максвелловскими молекулами и пространственно однородной задачей.

Преобразование Фурье дало возможность получить ряд новых результатов [4, 5, 8—18] и в конечном счете построить сравнительно полную теорию пространственно однородного уравнения Больцмана для максвелловских молекул, включающую и обобщения ранее известных фактов. Основная цель статьи состоит в том, чтобы кратко изложить эту теорию. Отметим, что после первых работ [4—9], опубликованных в 1975—1977 г. быстро появилось довольно большое число публикаций по тематике, которую можно условно назвать «точные решения нелинейных моделей уравнения Больцмана». Многие из них весьма интересны, но стоят в стороне от целей данной статьи. Поэтому мы ограничиваемся цитированием лишь отдельных работ, учитывая, что имеются довольно полные обзоры [16, 17], посвященные в основном модельным уравнениям.

Схема изложения материала состоит в следующем. В разделе 2, который можно рассматривать как «элементарную теорию» уравнения Больцмана для максвелловских молекул, проведено преобразование Фурье и описаны новые факты (симметрия, свойства линеаризованного уравнения, моментная система, автомодельные решения), получающиеся сравнительно просто после перехода к фурье-представлению. Эти результаты выражаются явными формулами, но носят несколько частный характер. Более общие вопросы, такие как разрешимость задачи Коши для нелинейного уравнения Больцмана, асимптотики решения при $|\mathbf{v}|\to\infty$ и при $t\to\infty$, рассмотрены в разделе 3. В разделе 4 построено аналитическое преобразование, связывающее нелинейное и линеаризованное уравнения в фурье-представлении, установлена эквивалентность этих уравнений в определенном классе функций и описаны следствия этой эквивалентности.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СЛЕДСТВИЯ

Преобразование Фурье. По своему физическому смыслу функция распределения $f(\mathbf{v})$ должна быть неотрицательной и обладать конечными моментами вплоть до второго порядка

$$\int d\mathbf{v} f(\mathbf{v})\,(1+v^2)<\infty. \tag{2.1}$$

Считая сначала для краткости выполненными все дополнительные условия, требуемые по ходу дела для сходимости интегралов и т. п., проведем преобразование Фурье интеграла столкновений общего вида, т. е. упростим правую часть уравнения (1.6). Для этого используем стандартное тождество

$$\int d\mathbf{v} I[f,f]h(\mathbf{v})=\int d\mathbf{v}\, d\mathbf{w} f(\mathbf{v})f(\mathbf{w})\int d\mathbf{n}\, g\left(u,\frac{\mathbf{un}}{u}\right)[h(\mathbf{v}')-h(\mathbf{v})], \tag{2.2}$$

записанное в обозначениях (1.3). При $h(\mathbf{v})=\exp(-i\mathbf{kv})$ правая часть имеет вид

$$\int d\mathbf{v}\, d\mathbf{w} f(\mathbf{v}) f(\mathbf{w})\, e^{-i\mathbf{k}\frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2}}\int d\mathbf{n}\, g\left(u, \frac{\mathbf{un}}{u}\right)[e^{-i\mathbf{k}\frac{u\mathbf{n}}{2}}-e^{-i\mathbf{k}\frac{\mathbf{u}}{2}}]. \tag{2.3}$$

Рассмотрим здесь внутренний интеграл и убедимся в том, что

$$(2.4)\qquad \int d\mathbf{n} g\left(u, \frac{\mathbf{un}}{u}\right)\left[e^{-i\mathbf{k}\frac{u\mathbf{n}}{2}} - e^{-i\mathbf{k}\frac{\mathbf{u}}{2}}\right] = \int d\mathbf{n} g\left(u, \frac{\mathbf{kn}}{k}\right)\left[e^{-ik\frac{\mathbf{un}}{2}} - e^{-ik\frac{\mathbf{u}}{2}}\right].$$

Действительно, левая часть (2.4) представляет собой изотропную скалярную функцию двух векторов **k** и **u** и, следовательно, зависит только от их абсолютных величин $k=|\mathbf{k}|$ и $u=|\mathbf{u}|$ и скалярного произведения **ku**. Такая функция, очевидно, не меняется при перестановке направлений векторов **k** и **u** (но не их абсолютных величин), а правая часть (2.4) есть как раз результат такой перестановки.

Подставляя (2.4) в (2.3) и меняя порядок интегрирования, получим

$$(2.5)\qquad \int d\mathbf{n} \int d\mathbf{v}\, d\mathbf{w} f(\mathbf{v}) f(\mathbf{w}) g\left(u, \frac{\mathbf{kn}}{k}\right)\left[\exp\left(-i\mathbf{v}\frac{\mathbf{k}+k\mathbf{n}}{2} - i\mathbf{w}\frac{\mathbf{k}-k\mathbf{n}}{2}\right) - \exp(-i\mathbf{kv})\right].$$

Отсюда ясно, что преобразование Фурье приводит к определенному упрощению интеграла столкновений для молекул, взаимодействующих по степенному закону и твердых шариков (см., например, [19]), а наиболее сильное упрощение достигается для максвелловских молекул, когда $g(u, \mu) \equiv g(\mu)$. В этом случае внутренний (шестикратный) интеграл в (2.5) сводится просто к умноженной на $g(\mathbf{kn}/k)$ разности произведений фурье-образов функции распределения, т. е. окончательный результат — правая часть (1.6) — имеет вид

$$(2.6)\qquad J[\varphi, \varphi] = \int d\mathbf{v} I[f, f] e^{-i\mathbf{kv}} = \int d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{kn}}{k}\right)\left\{\varphi\left(\frac{\mathbf{k}+k\mathbf{n}}{2}\right) \times \varphi\left(\frac{\mathbf{k}-k\mathbf{n}}{2}\right) - \varphi(0)\varphi(\mathbf{k})\right\},$$

где $f(\mathbf{v})$ и $\varphi(\mathbf{k})$ связаны преобразованием Фурье (1.5) (аргументы **x** и t несущественны).

Итак, для рассматриваемой модели переход к фурье-представлению привел к двум существенным упрощениям: 1) вместо пятикратного интеграла (1.2) возник двукратный интеграл (2.6) и 2) подынтегральное выражение также заметно упростилось. Эти преимущества наиболее сильно проявляются для изотропных по **v** функций распределения $f \equiv f(|\mathbf{v}|)$. Тогда можно положить в (2.6) $\varphi = \varphi(k^2/2)$ и, вводя обозначение $x = k^2/2$, привести (2.6) к очень простому виду

$$(2.7)\qquad J[\varphi, \varphi] = \int_0^1 ds \rho(s)\{\varphi(sx)\varphi[(1-s)x] - \varphi(0)\varphi(x)\}, \quad x \geqslant 0,$$

$$\rho(s) = 4\pi g(1-2s),$$

позволяющему легко оценить достигнутое по сравнению с (1.2) продвижение.

Нетрудно проверить, что для $g \equiv g(\mu)$ условие (2.1) и неравенство

$$(2.8)\qquad 0 \leqslant g(\mu) \leqslant \text{const}\,(1-\mu)^{-1/2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

гарантирует законность всех преобразований (изменение порядка интегрирования и т. п.), проделанных выше при переходе от (2.2) к (2.6). Всюду ниже, где не оговорены дополнительные требования, будем предполагать выполненными условия (2.1), (2.8). Неравенство (2.8) справедливо, в частности, для истинных максвелловских молекул, т. е. для потенциала $U(r)\sim r^{-4}$, при всех $0<\varepsilon<{}^1/_4$.

Задача о релаксации. Будем далее рассматривать задачу Коши для записанного в обозначениях (1.3) пространственно однородного уравнения Больцмана

$$(2.9)\qquad f_t=I[f,f]=\int d\mathbf{w}\,d\mathbf{n}g\left(\frac{\mathbf{un}}{u}\right)\{f(\mathbf{v}')f(\mathbf{w}')-f(\mathbf{v})f(\mathbf{w})\},$$

где нижним индексом обозначена производная по t, с начальным условием, которое без ограничения общности можно считать удовлетворяющим условиям нормировки

$$(2.10)\qquad f|_{t=0}=f_0(\mathbf{v}):\quad \int d\mathbf{v}f_0(\mathbf{v})=1,\quad \int d\mathbf{v}\mathbf{v}f_0(\mathbf{v})=0,\quad \int d\mathbf{v}\mathbf{v}^2f_0(\mathbf{v})=3.$$

В силу законов сохранения числа частиц, импульса и энергии решение $f(\mathbf{v},\ t)$ задачи (2.9)—(2.10) будет удовлетворять тем же требованиям при всех $t>0$:

$$(2.11)\qquad \int d\mathbf{v}f(\mathbf{v},t)=1,\quad \int d\mathbf{v}\mathbf{v}f(\mathbf{v},t)=0,\quad \int d\mathbf{v}\mathbf{v}^2f(\mathbf{v},t)=3,$$

а соответствующее распределение Максвелла имеет вид

$$(2.12)\qquad f_M(\mathbf{v})=(2\pi)^{-3/2}\exp(-v^2/2).$$

Формальный подход к решению рассматриваемой задачи, а также к любой другой проблеме, связанной с уравнением (2.9), довольно очевиден. Переходя к фурье-представлению

$$(2.13)\qquad \varphi(\mathbf{k},t)=\int d\mathbf{v}f(\mathbf{v},t)\exp(-i\mathbf{kv}),$$

получим вместо (2.9) более простое уравнение

$$(2.14)\qquad \varphi_t=J[\varphi,\varphi]=\int d\mathbf{n}g\left(\frac{\mathbf{kn}}{k}\right)\left\{\varphi\left(\frac{\mathbf{k}+k\mathbf{n}}{2}\right)\varphi\left(\frac{\mathbf{k}-k\mathbf{n}}{2}\right)-\varphi(0)\varphi(\mathbf{k})\right\}$$

с начальным условием

$$(2.15)\qquad \varphi|_{t=0}=\varphi_0(\mathbf{k})=\int d\mathbf{v}f_0(\mathbf{v})\exp(-i\mathbf{kv}):$$

$$\varphi_0|_{\mathbf{k}=0}=1,\qquad \left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathbf{k}}\right|_{\mathbf{k}=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\mathbf{k}^2}\right|_{\mathbf{k}=0}=-3,$$

затем изучим решение $\varphi(\mathbf{k},\ t)$ задачи (2.14)—(2.15) и наконец сформулируем окончательные результаты для функции распределения $f(\mathbf{v},t)$, воспользовавшись, например, формулой обращения

$$(2.16)\qquad f(\mathbf{v},t)=(2\pi)^{-3}\int d\mathbf{v}\varphi(\mathbf{k},t)\exp(i\mathbf{kv})$$

в предположении, что этот интеграл сходится. Такая формальная схема для целей этого раздела вполне достаточна, а строгие определения понятий функции распределения и решения задачи Коши (2.9)—(2.10) будут даны в разделе 3.

Фурье-аналоги формул (2.11) — (2.12) имеют вид

$$(2.17)\qquad \varphi(0,t)=1,\quad \left.\frac{\partial\varphi(\mathbf{k},t)}{\partial\mathbf{k}}\right|_{\mathbf{k}=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{k},t)}{\partial\mathbf{k}^2}\right|_{\mathbf{k}=0}=-3;$$

$$\varphi_M(\mathbf{k})=\exp\left(-\frac{k^2}{2}\right).$$

Замечание. Для краткости мы не останавливаемся здесь на решении задачи о релаксации при малых отклонениях от равновесия, когда можно использовать линеаризованное уравнение. Отметим только, что преобразование Фурье позволило существенно обобщить классические результаты [3] для этого уравнения — дать полное решение задачи на собственные значения для линеаризованного оператора столкновений [4, 8] и построить в явном виде решение линейной задачи о релаксации в максимально широком, с физической точки зрения, классе начальных условий [11].

Опишем теперь некоторые свойства нелинейного уравнения (2.9), доказательство которых в фурье-представлении является очень простым.

Свойство симметрии. Уравнение (2.9) инвариантно относительно однопараметрической полугруппы преобразований

$$(2.18)\qquad T_\theta f=\exp\left[\frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{v}^2}\right]f=$$

$$=(2\pi\theta)^{-3/2}\int d\mathbf{w}\, f(\mathbf{w},t)\exp\left[-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2}{2\theta}\right],\qquad \theta\geqslant 0,$$

оставляющих функцию распределения неотрицательной.

Для доказательства достаточно заметить, что соответствующие преобразования $\varphi(\mathbf{k}, t)$ имеют вид

$$(2.19)\qquad \tilde{T}_\theta\varphi=\exp(-\theta k^2/2)\varphi(\mathbf{k}, t),\qquad \theta\geqslant 0,$$

и, очевидно, не изменяют уравнения (2.14).

Это свойство, присущее только максвелловским молекулам, имеет ряд интересных следствий. Простейшее из них состоит в том, что, помимо классической H-функции Больцмана, можно указать однопараметрическое семейство функционалов $H_\theta[f]$ на решении $f(\mathbf{v}, t)$ уравнения (2.9)

$$(2.20)\qquad H_\theta[f]=\int d\mathbf{v}\, f_\theta(\mathbf{v},t)\ln f_\theta(\mathbf{v},t),\qquad f_\theta=T_\theta f,\qquad \theta>0,$$

обладающих тем же свойством, т. е. не возрастающих с ростом t. Преимущество этих функционалов состоит в том, что, в отличие от обычной H-функции, они определены и на обобщенных решениях уравнения Больцмана (см. раздел 3). Отметим, что этот результат не обобщается на пространственно неоднородное уравнение (1.1), для которого классическая H-функция Больцмана является единственным невозрастающим функционалом [20].

Другое тривиальное следствие этой симметрии, на котором мы подробнее остановимся ниже, сводится к совпадению уравнений для нормированных специальным образом моментов функции $f(\mathbf{v}, t)$ и для коэффициентов ее разложения в ряд по полиномам Эрмита (Лагерра — в изотропном по $\mathbf{v}$ случае).

Наконец, объединив (2.19) с преобразованиями подобия $\mathbf{k}\to\alpha\mathbf{k}$ и сдвига $t\to t+\tau$, также не меняющими уравнения (2.14), можно легко построить двухпараметрическое семейство преобразований, оставляющих инвариантными не только само уравнение (2.14), но и условия нормировки (2.17). В экспоненциальной форме эти преобразования имеют вид

$$(2.21)\qquad \tilde{U}_{\tau,\mu}\varphi=\exp\left\{\tau\left[-\frac{\partial}{\partial t}-\mu\left(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right)\right]\right\}\varphi(\mathbf{k},t),$$

а для $f(\mathbf{v},\ t)$ им соответствуют операторы

$$(2.22)\qquad U_{\tau,\mu}f=\exp\left\{\tau\left[-\frac{\partial}{\partial t}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{v}^2}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{v}\right)\right]\right\}f(\mathbf{v},t).$$

Мы опишем в этом разделе инвариантные решения уравнения Больцмана, являющиеся неподвижными точками преобразований (2.22).

Отметим, что инвариантность нелинейного уравнения (2.9) относительно преобразований (2.18) была впервые установлена в [4, 8], однако аналог этого свойства для линейного уравнения был известен гораздо раньше [21].

Уравнения для моментов. Далее мы будем в основном рассматривать изотропные решения $f(|\mathbf{v}|,\ t)$ задачи Коши (2.9)–(2.10).

В фурье-представлении удобно ввести переменную $x=k^2/2$, положить $\varphi\equiv\varphi(x,\ t)$ и переписать (2.14)–(2.15) в виде

$$(2.23)\qquad \varphi_t=\int_0^1 ds\,\rho(s)\,\{\varphi(sx)\varphi[(1-s)x]-\varphi(0)\varphi(x)\},\quad \rho(s)=4\pi g(1-2s);$$

$$(2.24)\qquad \varphi|_{t=0}=\varphi_0(x):\quad \varphi_0(0)=1,\quad \varphi_0'(0)=-1,$$

где штрихом обозначена производная по x.

Сформулируем теперь два свойства изотропных решений уравнения Больцмана (2.9); простое обращение к фурье-представлению (2.23) делает эти свойства совершенно очевидными.

А. Положим

$$(2.25)\qquad z_n(t)=\frac{1}{(2n+1)!!}\int d\mathbf{v}\,f(|\mathbf{v}|,t)\mathbf{v}^{2n},\quad n=0,1,\ldots;$$

тогда уравнения для $z_n(t)$ имеют вид

$$(2.26)\qquad \dot z_0=\dot z_1=0,\quad \dot z_n=\sum_{k=1}^{n-1}H_{k,n-k}(z_kz_{n-k}-z_0z_n),\quad n=2,3,\ldots,$$

где точкой обозначена производная по t,

$$(2.27)\qquad H_{k,l}=H(k,l)=\binom{k+l}{k}\int_0^1 ds\,\rho(s)s^k(1-s)^l;\quad k,l=1,2,\ldots.$$

Б. Пусть $f(|\mathbf{v}|,\ t)$ представима рядом Фурье по полиномам Лагерра

$$(2.28)\qquad f(|\mathbf{v}|,t)=(2\pi)^{-3/2}e^{-v^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\mathscr{L}_n^{1/2}(v^2/2),$$

сходящимся по метрике гильбертова пространства L_2 с нормой

$$(2.29)\qquad \|f\|^2=(2\pi)^{3/2}\int d\mathbf{v}\, e^{v^2/2}|f(\mathbf{v})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}|u_n|^2<\infty;$$

тогда система уравнений для коэффициентов $u_n(t)$ получается из моментной системы (2.26) простой заменой в (2.26) $z_n(t)$ на $u_n(t)$, $n=0, 1, \ldots$.

Для доказательства свойств **А** и **Б** достаточно заметить, что соответствующее решение $\varphi(x, t)$ уравнения (2.23) представимо в виде степенных рядов

$$(2.30)\qquad \varphi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z_n(t)\frac{x^n}{n!}=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\frac{x^n}{n!},$$

подстановка которых в (2.23) сразу приводит к уравнениям вида (2.26). Совпадение уравнений для $z_n(t)$ и $u_n(t)$ является очевидным следствием инвариантности (2.23) относительно умножения $\varphi(x, t)$ на $\exp(-x)$ и замены x на $(-x)$.

Из условий (2.24) и первых уравнений (2.26) следует, что $z_0=z_1=1$, $u_0=0$, $u_1=0$. Поэтому уравнения для $u_n(t)$ при $n=2,\ldots$ приводятся к виду

$$(2.31)\qquad \dot u_{2,3}+\lambda_{2,3}u_{2,3}=0,\quad \dot u_n+\lambda_n u_n=\sum_{k=2}^{n-2}H_{k,n-k}u_k u_{n-k},\quad n=4,\ldots,$$

где использованы обозначения (2.27) и

$$(2.27\text{a})\qquad \lambda_n=\lambda(n)=\sum_{k=1}^{n-1}H_{k,n-k}=\int_0^1 ds\,\rho(s)\,[1-s^n-(1-s)^n].$$

Решение задачи Коши для системы (2.31), очевидно, дается в следующей рекуррентной форме:

$$(2.32)\qquad u_{2,3}(t)=u_{2,3}(0)\exp(-\lambda_{2,3}t),\quad u_n(t)=u_n(0)\exp(-\lambda_n t)+$$
$$+\sum_{k=2}^{n-2}H_{k,n-k}\int_0^t d\tau\, u_k(\tau)\,u_{n-k}(\tau)\exp[-\lambda_n(t-\tau)],\quad n=4,\ldots.$$

Аналогичные формулы можно выписать и для $z_n(t)$, $n=2,\ldots$.

Таким образом, мы располагаем теперь простыми формулами, позволяющими в принципе выписать в виде конечной суммы экспонент выражение для момента $z_n(t)$ (или коэффициента $u_n(t)$ ряда (2.28)) произвольного порядка $n=0, 1,\ldots$. В действительности такая процедура эффективна лишь для сравнительно небольших значений $n\leqslant 10$, т. к. число слагаемых в этих суммах очень быстро растет с ростом n. Поэтому в разделе 4 будет описан другой подход к решению системы (2.31).

Метод решения нелинейного уравнения Больцмана путем разложения в ряды типа (2.28), где в общем случае фигурируют тензорные полиномы Эрмита

$$H_{(n)}(\mathbf{v})=(-1)^n\exp(v^2/2)\frac{\partial^n}{\partial\mathbf{v}^n}\exp(-v^2/2)$$

или их неприводимые представления

$$F_{n,l,m}(\mathbf{v})=v^l\mathscr{L}_n^{l+1/2}(v^2/2)\,Y_{l,m}(\mathbf{v}/v),$$

был впервые предложен в 1949 г. Грэдом [22]. В частности, для максвелловских молекул, когда последняя формула определяет собственные функции линеаризованного оператора столкновений, в [22] была установлена структура уравнений для коэффициентов разложения и было показано, что пространственно однородная задача может быть решена по рекуррентной схеме, аналогичной (2.32). Соответствующие формулы для решения $f(\mathbf{v}, t)$ задачи Коши (2.9)–(2.10) были, по-видимому, впервые явно указаны в [23] (см. также более раннюю работу М. Каца [24] по предложенной им одномерной модели). Однако исследования такого рода долго носили формальный характер, поскольку постоянные коэффициенты в моментных системах типа (2.31) выражались очень громоздкими кратными интегралами, оценка которых была делом затруднительным. В этом отношении использование преобразования Фурье сильно изменило ситуацию и позволило получить окончательную, т. е. не допускающую дальнейших упрощений, форму уравнений для коэффициентов разложения в ряды типа (2.28). Для изотропного случая результат — система (2.31) — совершенно очевиден и впервые указан в [4] (см. также [10]), а для анизотропного случая аналогичная проблема решена в [25] (см. также [26]). Уравнения (2.26) для нормированных моментов (2.25) в частном случае $\rho(s)=1$ были впервые явно указаны в [6, 7], где не использовалось преобразование Фурье. Описанный здесь очевидный вывод уравнений (2.26) в общем случае был дан в [10], где отмечалось совпадение систем для $z_n(t)$ и $u_n(t)$, следующее из свойств симметрии.

Далее будет показано, что для многих практически интересных начальных условий, представимых в виде ряда (2.28) при $t=0$, соответствующий ряд для решения $f(|\mathbf{v}|, t)$ сходится лишь на очень малом временном интервале $0\leqslant t<t_0\ll 1$. По этой причине использование пространства L_2 с нормой (2.29) неудобно для решения нелинейной задачи (2.9)–(2.10), и мы заменим его в разделе 3 более широким классом функций.

Таким образом, преобразование Фурье заметно упростило процедуру вычисления любого конечного числа моментов решения $f(\mathbf{v}, t)$ уравнения Больцмана (2.9), но не сделало тривиальным построение самой функции $f(\mathbf{v}, t)$, зависящей от бесконечного числа моментов. Для исследования свойств этой функции необходимо (в изотропном по $\mathbf{v}$ случае) уметь одновременно описывать свойства всей совокупности величин $u_n(t)$ или $z_n(t)$ при $n=0, 1, \ldots$. Сделаем это сейчас в специальном случае, связанном со свойствами симметрии.

Автомодельные решения. Простейшая схема построения таких решений уравнения (2.14) сводится к следующему. Естественно искать решение в виде $\varphi(\mathbf{k}, t)=\psi[\mathbf{k}\theta(t)]$, откуда после подстановки в (2.14) находим, что $\theta(t)=\exp(-\mu t)$, где μ — некоторая постоянная. Но нас интересуют лишь решения, имеющие физический смысл и описывающие процесс релаксации, т. е. стремящиеся при $t\to\infty$ к равновесной функции $\varphi_M(\mathbf{k})$ и удовлетворяющие законам сохранения (2.17). Этим условиям явно не удовлетворяет автомодельная функция $\psi[\mathbf{k}\exp(-\mu t)]$, но положение легко исправляется использованием свойства симметрии (2.19). Окончательный вид, в котором мы будем искать решение (2.14), удобно выразить через соответствующее начальное условие $\varphi_0(\mathbf{k})$:

$$(2.33)\qquad \varphi(\mathbf{k},t)=\varphi_0(\mathbf{k}e^{-\mu t})\exp\left[-\frac{k^2}{2}(1-e^{-2\mu t})\right],$$

где функция $\varphi_0(\mathbf{k})$ и постоянная μ пока неизвестны. Подставляя (2.33) в (2.14), получим уравнение для их определения

$$(2.34)\qquad \mu\left(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right)\varphi_0+J[\varphi_0,\varphi_0]=0.$$

Функции (2.33), очевидно, являются неподвижными точками групповых преобразований (2.21).

Ограничимся изотропным по $\mathbf{k}$ случаем, т. е. рассмотрим уравнение (2.23) и опишем его решения вида (2.33)

$$(2.35)\qquad \varphi(x,\ t)=y(xe^{-\beta t})\exp[-x(1-e^{-\beta t})],\qquad x=k^2/2,\qquad \beta=2\mu.$$

Для $y(x)$ получаем из (2.23) уравнение

$$(2.36)\qquad \beta x[y'(x)+y(x)]+\int_0^1 ds\,\rho(s)\,\{y(sx)\,y[(1-s)x]-y(0)\,y(x)\}=0.$$

Естественно искать решение в виде ряда

$$(2.37)\qquad y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n\frac{x^n}{n!},\qquad y_0=y_1=1,$$

где для определенности считаются выполненными условия (2.24).

Подстановка (2.37) в (2.36) приводит к простой алгебраической системе

$$(2.38)\qquad y_n(\beta n-\lambda_n)=\beta n y_{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}H_{k,n-k}y_k y_{n-k},\qquad y_1=1,$$

где $n=2,\ 3,\ldots$ и использованы обозначения системы (2.31). Тривиальное решение системы (2.38) имеет вид $y_n=1$ для всех $n=2,\ 3,\ldots$. Нетривиальные решения, как нетрудно заключить после элементарного исследования (2.38), могут существовать лишь при определенных значениях параметра β:

$$(2.39)\qquad \beta=\beta_p=\frac{\lambda_p}{p}=\frac{1}{p}\int_0^1 ds\,\rho(s)\,[1-s^p-(1-s)^p],\qquad p=2,3,\ldots,$$

связанных с собственными значениями линеаризованного оператора.

При $p\geqslant4$ решение системы (2.38), где $\beta=\beta_p$, устроено следующим образом: $y_n=1$ при $2\leqslant n\leqslant p-1$, y_p можно выбрать произвольным, а y_n при $n\geqslant p+1$ определяются по рекуррентным формулам, полученным из (2.38) почленным делением этого равенства на положительный при $n \geqslant p+1$ множитель $n(\beta_p-\beta_n)$, фигурирующий в левой части (2.38).

Случай $p=2$, 3 требует специального рассмотрения, поскольку $\beta_2=\beta_3$. В этом случае можно произвольно выбрать не одно, а два значения — y_2 и y_3 в (2.38), а вычисление y_n при $n \geqslant 4$ проводится так же, как описано выше. В частности, можно положить $y_2=y_3=0$ и заключить, что тогда $y_n \equiv 0$ для всех $n=2, 3, \ldots$. Это единственный случай, когда ряд (2.37) обрывается, и мы получаем простейшее решение уравнения (2.23), представимое в форме (2.35):

$$\varphi(x,t)=(1-\theta x e^{-\lambda t})\exp[-x(1-\theta e^{-\lambda t})], \quad \lambda=\beta_{2,3}=\int_0^1 ds\,\rho(s)s(1-s), \tag{2.40}$$

где постоянная $\theta=\exp(-\lambda t_0)$ учитывает возможность произвольного выбора начала отсчета времени. При $x=k^2/2$, $\rho(s)=4\pi g(1-2s)$ формула (2.40) определяет решение уравнения (2.14), а обращая преобразование Фурье по формуле (2.16), получим решение исходного уравнения Больцмана (2.9):

$$f(\mathrm{v},t)=(2\pi\tau)^{-3/2}\exp\left(-\frac{v^2}{2\tau}\right)\left[1+\frac{1-\tau}{\tau}\left(\frac{v^2}{2\tau}-\frac{3}{2}\right)\right], \tag{2.41}$$

$$\tau=\tau(t)=1-\theta e^{-\lambda t}, \quad \lambda=(\pi/2)\int_{-1}^{1} d\mu\, g(\mu)(1-\mu^2), \quad t\geqslant 0,$$

причем $f(v, t)\geqslant 0$ при $0\leqslant\theta\leqslant 2/5$, но в дальнейшем окажутся полезными и неположительные решения, отвечающие значениям $2/5<\theta<1$.

Это первое и пока единственное нетривиальное (т. е. немаксвелловское) решение нелинейного уравнения Больцмана, которое удается в конечной форме выразить через элементарные и специальные функции. Приведем здесь также точные решения моментных уравнений (2.26) и (2.31), отвечающие разложениям в ряды (2.30) функции (2.40):

$$z_0=z_1=1, \qquad z_n(t)=(1-\theta e^{-\lambda t})^{n-1}[1+(n-1)\theta e^{-\lambda t}]; \tag{2.42}$$

$$u_n(t)=(1-n)\theta^n e^{-n\lambda t}; \qquad \lambda=\lambda_2/2=\lambda_3/3, \qquad n=2,\ 3, \ldots .$$

Решение (2.41) впервые было построено в [4] описанным здесь способом, а затем в [5] был дан совершенно элементарный вывод формулы (2.41), не использующий преобразование Фурье. Несколько позже то же решение для частного случая $\rho(s)\equiv 1$ было независимо построено в [6] на основе полученной в этой работе моментной системы (2.26) при $\rho(s)=1$, а затем обобщено в [7] на произвольные функции $\rho(s)$. Автомодельные решения также сначала были построены в [4], а затем в [9] групповые свойства соответствующих решений $f(|\mathrm{v}|, t)$ уравнения Больцмана изучались более подробно. Эти результаты были повторены позже в [27, 28]. Точное решение в элементарных функциях и автомодельные решения много обсуждались в литературе [16], поэтому не будем на них останавливаться и перейдем к более общим вопросам.

3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕЛАКСАЦИИ

Уточним понятия функции распределения и решения задачи Коши (2.9)–(2.10). Заметим, что из уравнения (2.9) с учетом равенства (2.2) следует известное уравнение эволюции среднего значения функции $h(\mathbf{v})$

$$(3.1)\qquad \frac{d}{dt}\langle h(\mathbf{v})\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \int d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{un}}{u}\right)[h(\mathbf{v}')-h(\mathbf{v})] \right\rangle\!\!\right\rangle,$$

где использованы обозначения

$$\langle h(\mathbf{v})\rangle = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v},t)h(\mathbf{v}),$$

$$\langle\!\langle H(\mathbf{v},\mathbf{w})\rangle\!\rangle = \int d\mathbf{v}\, d\mathbf{w}\, f(\mathbf{v},t)f(\mathbf{w},t)H(\mathbf{v},\mathbf{w}).$$

Уравнение (3.1) имеет ясную физическую (вероятностную) интерпретацию: изменение среднего значения $h(\mathbf{v})$ в единицу времени равно среднему изменению $h(\mathbf{v})$ при одном столкновении, усредненному затем по числу столкновений. На основе этой интерпретации можно дать феноменологический вывод (3.1), не обращаясь к уравнению Больцмана (2.9), но используя при подсчете числа столкновений те же гипотезы, что и при выводе уравнения (2.9). Рассматривая $\mathbf{v}\in R^3$ как случайную величину, заметим далее, что основным инструментом для вычисления средних значений функций такой величины является вероятностная мера $\omega(\mathbf{v};\ t)$ в R^3, которая в данном случае параметрически зависит от времени $t\geqslant 0$. Тогда среднее значение функции $h(\mathbf{v})$ определяется как интеграл по мере

$$(3.2)\qquad \langle h(\mathbf{v})\rangle = \int d\omega(\mathbf{v};t)h(\mathbf{v}),$$

а среднее значение $\langle\!\langle H(\mathbf{v},\ \mathbf{w})\rangle\!\rangle$ в правой части (3.1) определим как интеграл по произведению мер

$$(3.3)\qquad \langle\!\langle H(\mathbf{v},\mathbf{w})\rangle\!\rangle = \int d\omega(\mathbf{v};t)d\omega(\mathbf{w};t)H(\mathbf{v},\mathbf{w}),$$

рассматривая $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ как одинаково распределенные независимые случайные величины. Такое правило вычисления $\langle\!\langle H(\mathbf{v},\ \mathbf{w})\rangle\!\rangle$ в (3.1), очевидно, эквивалентно основной гипотезе Больцмана о том, что сталкивающиеся частицы можно считать независимыми.

Уравнение (3.1), записанное в обозначениях (3.2)–(3.3), можно принять за основу, требуя, чтобы оно удовлетворялось на любой финитной непрерывно дифференцируемой функции $h(\mathbf{v})$; дифференцируемость $h(\mathbf{v})$ нужна только при рассмотрении истинных максвелловских молекул, когда $g(\mu)$ имеет неинтегрируемую особенность при $\mu=1$. Зависимость меры $\omega(\mathbf{v};\ t)$ от параметра $t\geqslant 0$ должна быть такова, чтобы обеспечить непрерывную дифференцируемость по t величины $\langle h(\mathbf{v})\rangle$. Начальное условие также можно считать заданным в виде меры $\omega(\mathbf{v};\ 0)=\omega_0(\mathbf{v})$.

В такой постановке основным объектом исследования является вероятностная мера $\omega(\mathbf{v};\ t)$, описывающая распределение по скоростям случайно выбранной молекулы газа. Однако более удобно работать не с мерой — функцией множества, а с обычной функцией точки. Это можно сделать двумя способами. Во-первых, можно предположить, что мера $\omega(\mathbf{v};\ t)$ обладает интегрируемой по $\mathbf{v}$ и дифференцируемой по t плотностью

$f(\mathbf{v}, t)$, называемой в кинетической теории функцией распределения. Тогда мы, естественно, вернемся к исходному уравнению Больцмана (2.9). Другой — более общий — способ состоит в том, чтобы рассмотреть характеристическую функцию меры $\omega(\mathbf{v}; t)$, т. е. ее преобразование Фурье

$$(3.4)\qquad \varphi(\mathbf{k}, t) = \langle e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}}\rangle = \int d\omega(\mathbf{v}; t)\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}};$$

такой путь, очевидно, приводит к более простому уравнению (2.14) и не требует никаких дополнительных ограничений на локальные свойства $\omega(\mathbf{v}; t)$. Для того чтобы не отказываться от обычной записи уравнения Больцмана, введем должным образом понятие его обобщенного решения.

Определение 1. Пусть $\omega(\mathbf{v})$ — вероятностная мера в R^3. **Функцией распределения, или обобщенной плотностью меры $\omega(\mathbf{v})$, будем называть линейный функционал f, определенный на интегрируемых по мере $\omega(\mathbf{v})$ функциях $h(\mathbf{v})$ равенством**

$$(3.5)\qquad (f, h) = \langle h(\mathbf{v})\rangle = \int d\omega(\mathbf{v})\, h(\mathbf{v});$$

характеристической функцией $\varphi(\mathbf{k})$ будем называть преобразование Фурье меры $\omega(\mathbf{v})$, т. е. $\varphi(\mathbf{k}) = \langle \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v})\rangle$.

Будем далее использовать обозначение $f(\mathbf{v})$ для функции распределения f и записывать (3.5) в форме

$$(f, h) = \langle h(\mathbf{v})\rangle = \int d\mathbf{v}\, f(\mathbf{v})\, h(\mathbf{v}),$$

независимо от того, является ли обобщенная функция f регулярной, т. е. $f(\mathbf{v}) \in L(R^3)$, или нет.

Рассмотрим теперь задачу Коши (2.9)—(2.10), считая, что $f_0(\mathbf{v})$ — функция распределения.

Определение 2. Функцию распределения $f(\mathbf{v}, t)$, параметрически зависящую от $t \geqslant 0$, будем называть (обобщенным положительным) решением задачи Коши (2.9)—(2.10), если соответствующая характеристическая функция $\varphi(\mathbf{k}, t)$ при всех $\mathbf{k} \in R^3$, $t \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению (2.14) и при любом $\mathbf{k} \in R^3$

$$\lim_{t\to+0} \varphi(\mathbf{k}, t) = \varphi_0(\mathbf{k}) = (f_0, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}}).$$

Очевидно, что для того чтобы построить таким образом определенное решение $f(\mathbf{v}, t)$ задачи (2.9)—(2.10), достаточно: 1) построить классическое решение $\varphi(\mathbf{k}, t)$ задачи (2.14)—(2.15), 2) убедиться в том, что функция $\varphi(\mathbf{k}, t)$ является характеристической при любом $t > 0$ и 3) использовать известный факт взаимно однозначного соответствия между вероятностной мерой (функцией распределения) и ее характеристической функцией [29]. Такой подход дает возможность, опираясь на простоту уравнения (2.14) и известные свойства характеристических функций, довольно просто доказать теорему существования и единственности обобщенного положительного решения задачи Коши (2.9)—(2.10) и теорему стабилизации при $t \to \infty$ этого решения к распределению Максвелла (2.12). Мы не будем здесь этого делать в общем случае, поскольку цель статьи состоит в том, чтобы описать более тонкие свойства решений хотя бы для сравнительно узкого класса функций распределения. Ограничиваясь изотропными $f=f(|\mathbf{v}|)$ функциями, введем такой класс B_* следующим образом [15].

Быстро убывающие функции распределения. Через B_* обозначим множество изотропных функций распределения $f(|\mathbf{v}|)$, для которых при некотором $r>0$ сходится интеграл

$$\Psi(r)=\int d\mathbf{v}\, f(|\mathbf{v}|)\exp(r v^2/2)<\infty$$

и выполнены два условия нормировки

$$(3.6)\qquad \int d\mathbf{v}\, f(|\mathbf{v}|)=1,\quad \int d\mathbf{v} f(|\mathbf{v}|)v^2=3.$$

Функция $f\in B_*$ обладает естественной характеристикой асимптотики при $|\mathbf{v}|\to\infty$, которую мы будем называть температурой хвоста τ и определим равенством

$$(3.7)\qquad \tau^{-1}=\sup \tau,$$

где верхняя грань берется по тем значениям $r>0$, для которых $\Psi(r)<\infty$.

В частности, класс B_* содержит все неотрицательные функции гильбертова пространства L_2 с нормой (2.29), для которых выполнены условия (3.6). Таким функциям отвечают значения $\tau\leqslant 2$.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения Больцмана (2.9) с начальным условием $f_0(|\mathbf{v}|)\in B_*$ (2.10), считая выполненным неравенство (2.8).

Предложение 1. *Решение $f(|\mathbf{v}|, t)$ задачи* (2.9)–(2.10) *существует, причем $f(|\mathbf{v}|, t)\in B_*$ при всех $t\geqslant 0$. При $t\to\infty$ решение $f(|\mathbf{v}|, t)$ слабо сходится к распределению Максвелла $f_M(|\mathbf{v}|)$* (2.12), *т. е. $(f, h)\to(f_M, h)$ при $t\to\infty$ для любой ограниченной непрерывной функции $h(\mathbf{v})$.*

Основные этапы доказательства будут кратко описаны ниже в процессе построения решения соответствующей задачи Коши в фурье-представлении. Предварительно отметим некоторые свойства характеристических функций, отвечающих быстро убывающим функциям распределения.

Через A_* обозначим множество функций $\varphi(x)$, определенных при $x\geqslant 0$ равенством

$$(3.8)\qquad \varphi(x)=4\pi\int_0^\infty dv\, v^2 f(v)\frac{\sin v\sqrt{x}}{v\sqrt{x}}=\left[\int d\mathbf{v} f(|\mathbf{v}|)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}}\right]_{x=k^2/2},\quad f\in B_*.$$

Важное свойство функций $\varphi(x)\in A_*$ состоит в том, что $\varphi(x)$ может быть аналитически продолжена на всю плоскость комплексного переменного x и является целой функцией экспоненциального типа [29], причем тип σ этой функции совпадает с температурой хвоста τ соответствующей функции распределения $f(|\mathbf{v}|)\in B_*$. Если $\varphi\in A_*$ и $f\in B_*$ связаны преобразованием (3.8), то

$$(3.9)\qquad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z_n\frac{x^n}{n!},\quad z_n=\frac{4\pi}{(2n+1)!!}\int_0^\infty dv f(v)v^{2(n+1)},$$
$$n=0,1,\ldots,$$

$$\sigma=\limsup_{x\to\infty}\frac{\ln\varphi(-x)}{x}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n}=\tau<\infty.$$

Определим также естественное расширение класса A_*, обозначив через A множество функций, представимых в виде

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z_n\frac{x^n}{n!},\quad z_0=z_1=1,\quad \sup\sqrt[n]{|z_n|}<\infty. \tag{3.10}$$

Очевидно, что $A_*\subset A$ состоит из таких функций класса A, которые являются характеристическими (с учетом замены x на $k^2/2$).

Для решения уравнения Больцмана (2.9) с начальным условием (2.10) $f_0\in B_*$ надо рассмотреть следующую задачу Коши для функции $\varphi(x,t)$:

$$\varphi_t=\int_0^1 ds\,\rho(s)\,\{\varphi(sx)\varphi[(1-s)x]-\varphi(0)\varphi(x)\},\quad \varphi|_{t=0}=\varphi_0(x)\in A_*, \tag{3.11}$$

где $\varphi_0(x)$ и $f_0(|\mathbf{v}|)$ связаны преобразованием (3.8). Естественно искать решение (3.11) в виде ряда

$$\varphi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z_n(t)\frac{x^n}{n!};\quad z_n(0)=z_n^{(0)},\quad n=0,1,\dots. \tag{3.12}$$

Подставляя этот ряд в (3.11), получим систему (2.26), которую здесь удобно переписать в обозначениях (2.27), (2.27a) в виде

$$\dot z_0=\dot z_1=0,\quad z_n+\lambda_n z_0 z_n=\sum_{k=1}^{n-1}H_{k,n-k}z_k z_{n-k},\quad n=2,\dots. \tag{3.13}$$

Решение этих уравнений, отвечающее начальным условиям (3.12), выписывается немедленно:

$$z_n(t)=z_n^{(0)}e^{-\lambda_n t}+\sum_{k=1}^{n-1}H_{k,n-k}\int_0^t d\tau\, e^{-\lambda_n(t-\tau)}z_k(\tau)z_{n-k}(\tau),\quad n=2,\dots. \tag{3.14}$$

Ряд (3.12) с коэффициентами (3.14), очевидно, определяет формальное решение $\varphi(x, t)$ задачи Коши (3.11), и нам остается оценить рост $|z_n(t)|$ и $|\dot z_n(t)|$ при $n\to\infty$ (удобно пока не пользоваться тем, что $z_n(t)>0$ для $\varphi_0\in A_*$, рассматривая более общий случай — $\varphi_0\in A$ в (3.11)). Такая оценка приводит к неравенствам

$$|z_n(t)|\leqslant a^n,\quad |\dot z(t)|\leqslant 2\delta n a^n;\quad a=\sup\sqrt[n]{|z_n^{(0)}|},\quad \delta=\int_0^1 ds\,\rho(s)\,s, \tag{3.15}$$

справедливым для всех $t\geqslant 0$, $n=2,\dots$. Доказательство (3.15) основано на элементарном применении индукции к (3.14) с учетом связи (2.27a) между λ_n и $H_{k,l}$ и простой оценки $\lambda_n\leqslant n\delta$ при $n=2,\dots$.

Таким образом, мы построили решение $\varphi(x, t)$ задачи Коши (3.11) для $\varphi_0\in A$ и доказали, что $\varphi(x, t)\in A$ при всех $t>0$. Построенное решение, очевидно, единственно в классе функций, представимых сходящимися степенными рядами. Остается доказать, что $\varphi(x, t) \in A_*$ при всех $t>0$, если только $\varphi_0 \in A_*$. Иначе говоря, надо доказать, что построенная функция $\varphi(x, t)$ будет характеристической (3.8) при всех t, если она была таковой при $t=0$. Если $\rho(s) \geqslant 0$ в (3.11) — интегрируемая на $[0, 1]$ функция, то для доказательства можно воспользоваться представлением $\varphi(x, t)$ в виде суммы Вайлда [30]

$$\varphi(x, t) = e^{-\rho_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} (1-e^{-\rho_0 t})^n \varphi_n(x), \quad \rho_0 = \int_0^1 ds\, \rho(s), \tag{3.16}$$

где $\varphi_0(x)$ — начальное условие из (3.11),

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)\rho_0} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 ds\, \rho(s) \varphi_k(sx) \varphi_{n-k}[(1-s)x]. \tag{3.17}$$

Сходимость ряда (3.16) при $0 \leqslant x < \infty$ и совпадение (3.16), (3.17) с построенным выше решением (3.12), (3.14) проверяется вполне элементарно. Из известных свойств характеристических функций [29] вытекает, что при всех $n=0, 1, \ldots$ функции $\varphi_n(x)$ являются характеристическими, а, следовательно, таковой является и сумма ряда (3.16) для любого $t \geqslant 0$, что и требовалось. Для доказательства включения $\varphi(x, t) \in A_*$ в случае неинтегрируемой функции $\rho(s)$ (см. условие (2.8)) достаточно рассмотреть последовательность решений $\varphi(x, t; \varepsilon_n)$ задач (3.11), где нижний предел в интеграле заменен значением $s=\varepsilon_n$, $0<\varepsilon_n<1$, $n=0, 1, \ldots$. Переходя затем к пределу $\varepsilon_n \to 0$ и пользуясь тем, что непрерывный при $x=0$ предел последовательности характеристических функций также есть характеристическая функция, легко установим, что $\varphi(x, t) = \varphi(x, t; +0) \in A_*$.

Для исследования поведения $\varphi(x, t)$ при $t \to \infty$ можно воспользоваться представлением этой функции в виде ряда (2.30) с коэффициентами $u_n(t)$, $n=0, 1, \ldots$. Из рекуррентных формул (2.32) легко заключить, что $u_n \to 0$ при $t \to \infty$ для любого фиксированного $n=2, \ldots$. С другой стороны, оценка, аналогичная (3.15), показывает, что $|u_n(t)| \leqslant (a+1)^n$, $n=0, 1, \ldots$. Отсюда следует, что $\varphi(x, t) \to \exp(-x)$ при $t \to \infty$, причем сходимость равномерна на любом конечном отрезке $[0, X]$ (или в любом круге $|x|<R$, если x рассматривать как комплексную переменную).

Теперь для завершения доказательства предложения 1 достаточно учесть известную связь между сходимостью характеристических функций и сходимостью соответствующих вероятностных мер [29].

Таким образом, выше мы установили однозначную разрешимость (в целом) задачи Коши (2.9)—(2.10) на функциях класса B_* и слабую сходимость при $t \to \infty$ ее решения $f(|\mathbf{v}|, t)$ к распределению Максвелла (2.12). Основной интерес для физических приложений уравнения Больцмана представляют асимптотические свойства функции распределения $f(|\mathbf{v}|, t)$ при $|\mathbf{v}| \to \infty$ (формирование максвелловских хвостов) и при $t \to \infty$ (скорость релаксации). Перейдем к исследованию этих свойств.

Асимптотика при $|\mathbf{v}| \to \infty$. Вопрос об асимптотике при $|\mathbf{v}| \to \infty$ решения $f(|\mathbf{v}|, t) \in B_*$ задачи (2.9)—(2.10) может быть сформулирован следующим образом: что можно сказать о температуре хвоста $\tau(t)$, определяемой равенством

$$(3.18)\qquad \tau^{-1}=\sup r:\quad \int d\mathbf{v} f(|\mathbf{v}|,t)\exp(r v^2/2)<\infty,\quad r>0,$$

по заданному начальному условию $f_0(|\mathbf{v}|)\in B_*$? Опишем здесь наиболее простой метод построения верхних и нижних оценок величины $\tau(t)$ [15].

Метод основан на формуле (3.9), связывающей $\tau(t)$ с нормированными моментами $z_n(t)$:

$$(3.19)\qquad \tau(t)=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n(t)},\qquad z_n(t)=\frac{4\pi}{(2n+1)!!}\int_0^\infty dv f(v,t)v^{2(n+1)},$$

и на монотонной зависимости неотрицательного решения $z_n(t)$, $n=0, 1,\dots,$ системы (3.13) от коэффициентов λ_n, $H_{k,l}$ и начальных условий $z_n(0)$. Применение индукции к рекуррентным формулам (3.14) позволяет легко установить следующий факт.

Лемма. *Пусть $\tilde z_n(t)$ — решение системы уравнений, полученной из* (3.12)—(3.13) *заменой λ_n, $H_{k,l}$ и $z_n^{(0)}$ соответственно на $\tilde\lambda_n$, $\tilde H_{k,l}$ и $\tilde z$ для всех $n=0,1,\dots$; $k,l=1,2,\dots$. Тогда, если $\tilde\lambda_n\geqslant\lambda_n$, $0\leqslant\tilde H_{k,l}\leqslant H_{k,l}$, $0\leqslant\tilde z_n^{(0)}\leqslant z_n^{(0)}$, то $\tilde z_n(t)\leqslant z_n(t)$ при всех $t>0$; наоборот, если $\tilde\lambda_n\leqslant\lambda_n$, $\tilde H_{k,l}\geqslant H_{k,l}$, $\tilde z_n^{(0)}\geqslant z_n^{(0)}$, то $\tilde z_n(t)\geqslant z_n(t)$ при всех $t>0$.*

Лемма дает возможность оценивать сверху и снизу всю совокупность нормированных моментов $z_n(t)$, $n=0, 1,\dots,$ но для краткости будем ниже ограничиваться формулировками результатов только для температуры хвоста $\tau(t)$ (3.19). Удобно сразу иметь в виду некоторые характерные значения этой величины: 1) $\tau(0)=0$ для финитных начальных условий $f_0\in B_*$, т. е. в случае, когда $f_0(|\mathbf{v}|)=0$ при $|v|>v_0$, где v_0 — некоторая предельная скорость; 2) $\tau=\tau_M=1$ для распределения Максвелла (2.12); 3) $\tau(t)\leqslant 2$ для неотрицательных решений $f(|\mathbf{v}|, t)\in L_2$ с нормой (2.29); 4) для точного решения (2.41)

$$(3.20)\qquad \tau(t)=1-\theta e^{-\lambda t},\qquad \lambda=\int_0^1 ds\,\rho(s)s(1-s).$$

Свойства температуры хвоста, общие для всех решений $f(|\mathbf{v}|, t)\in B_*$ задачи (2.9)—(2.10), состоят в следующем.

Предложение 2. *Функция $\tau(t)$ не убывает с ростом t, причем при всех $t\geqslant0$ имеет место неравенство*

$$(3.21)\qquad 1-\exp(-\lambda t)\leqslant\tau(t)\leqslant\sup_{n=0,1,\dots}\sqrt[n]{z_n(0)},$$

где λ определено в (3.20).

Доказательство. Верхняя оценка в (3.21) сразу следует из аналогичной оценки в (3.15). Нижняя оценка получается в результате сравнения решения системы (3.13) для начальных условий (3.12) с точным решением (2.42) этой системы, которое при $\theta=1$ отвечает в обозначениях леммы начальным условиям $\tilde z_0^{(0)}=\tilde z_1^{(0)}=1$, $\tilde z_n^{(0)}=0$ при $n=2,\dots$. Наконец, для доказательства монотонной зависимости $\tau(t)$ от времени заметим, что тривиальным следствием леммы является неравенство $z_n(t) \geqslant \geqslant z_n(0) \exp(-\lambda_n t)$, $n=2, \ldots$, которое для $\tau(t)$ (3.19) приводит к оценке

$$\tau(t) \geqslant \limsup_{n\to\infty} [\sqrt[n]{z_n(0)} \exp(-\lambda_n t/n)]. \tag{3.22}$$

Но $(\lambda_n/n) \to 0$ при $n \to \infty$, как нетрудно заключить из явной формулы (2.27a) для λ_n, воспользовавшись верхней оценкой (2.8) для $g(\mu)$. Отметим, что для истинных максвелловских молекул $\lambda_n \sim n^{1/4}$ при $n \to \infty$ [3]. Таким образом, из (3.22) следует, что $\tau(t) \geqslant \tau(0)$ при любом $t \geqslant 0$. Это неравенство эквивалентно неравенству $\tau(t_1) \geqslant \tau(t_2)$ при всех $t_1 \geqslant t_2 \geqslant 0$, поскольку начало отсчета времени можно выбирать произвольно. Предложение 2 доказано.

Интересный для приложений вопрос состоит в том, как формируется максвелловский хвост в процессе релаксации финитных начальных условий, когда $\tau(0)=0$. Нижняя оценка в (3.21) показывает, что равенство $\tau(0)=0$ возможно лишь при $t=0$, а при $t>0$ функция распределения $f(|\mathbf{v}|, t)$, грубо говоря, убывает при $|\mathbf{v}| \to \infty$ не быстрее чем $\exp[-v^2/2(1-e^{-\lambda t})]$. Тот факт, что всякое неотрицательное непрерывное решение уравнения Больцмана при $t>0$ ограничено снизу функцией вида $a \exp(-bv^{2+\varepsilon})$ при любом $\varepsilon>0$, был обнаружен еще Карлеманом [31], однако для максвелловских молекул мы можем получить гораздо более точные оценки. При этом, поскольку рассматриваются, вообще говоря, обобщенные решения, оценивается не сама функция распределения $f(|\mathbf{v}|, t)$, а некоторая ее интегральная характеристика — температура хвоста $\tau(t)$.

Приведем пример уточненных оценок $\tau(t)$ для одного класса финитных начальных условий, типичным представителем которого является моноэнергетическое распределение

$$f_0(|\mathbf{v}|) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \delta(v^2-3),$$

где постоянные выбраны так, чтобы выполнялись условия (3.6). Допуская возможность «размазывания» δ-функции на небольшом конечном интервале, получим тот класс начальных данных, к которому относится следующее

Предложение 3. *Пусть в* (2.10) $f_0(|\mathbf{v}|)=0$ *при* $|\mathbf{v}|>v_0$, *где* $3 \leqslant v_0^2 \leqslant 5$. *Тогда при* $t \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$1-e^{-\lambda t} \leqslant \tau(t) \leqslant 1-\theta e^{-\lambda t}, \quad \theta = (1-v_0^2/5)^{1/2},$$

где λ *— то же, что в предложении* 2.

Для доказательства достаточно оценить нормированные моменты при $t=0$ следующим образом:

$$z_0^{(0)} = z_1^{(0)} = 1, \quad 0 \leqslant z_n^{(0)} \leqslant \frac{3v_0^{2(n-1)}}{(2n+1)!!}, \quad n=2,3,\ldots,$$

затем провести элементарное, но несколько громоздкое, сравнение с точным решением (2.64) при $t=0$ и $\theta=(1-v_0^2/5)^{1/2}$ и, наконец, применить лемму и формулу (3.19) для $\tau(t)$.

Таким образом, указан класс начальных условий, для которых эволюция $\tau(t)$ происходит по закону, близкому к формуле (3.20) для точного решения (2.63). На первый взгляд, можно ожидать, что и для других финитных начальных условий, удовлетворяющих нормировке (3.6), величина $\tau(t)$ с ростом $t\geqslant 0$ монотонно (см. предложение 2) возрастает от начального значения $\tau(0)=0$ до значения $\tau_M=1$, которое отвечает распределению Максвелла. Оказывается, однако, что существуют финитные начальные условия, для которых $\tau(t)\to\tau_\infty>1$ при $t\to\infty$. Это, конечно, не противоречит релаксации самой функции $f(|\mathbf{v}|, t)$ к равновесному распределению (2.12). О том, насколько сильно и за какое время может быть превышено равновесное значение $\tau_M=1$ в процессе релаксации финитных начальных условий, можно судить по следующему утверждению.

Предложение 4. *Пусть в* (2.9) $g(\mu)\geqslant\varepsilon$ *для всех* $-1\leqslant\mu\leqslant 1$ *и некоторого* $\varepsilon>0$. *Тогда для любых чисел* $N>0$ *и* $t_0>0$ *можно указать такое финитное начальное условие* $f_0(|\mathbf{v}|)$ (2.10), *что при всех* $t>t_0$ *выполнено неравенство* $\tau(t)>N$.

Доказательство. Используя лемму, оценим снизу решение задачи Коши (3.12)–(3.13) следующим образом:

1) заменим начальные условия (3.12) на $\tilde{z}_0^{(0)}=1$, $\tilde{z}_2^{(0)}=z_2^{(0)}$, $\tilde{z}_1^{(0)}=z_3^{(0)}=\ldots=\tilde{z}_n^{(0)}=\ldots=0$;

2) заменим коэффициенты λ_n и $H_{k,l}$ системы (3.13) с учетом условия предложения величинами $\tilde{\lambda}_n=n\delta\geqslant\lambda_n$, $\delta=\int\limits_0^1 ds\,\rho(s)s$, $n=2,\ldots$; $\tilde{H}_{k,l}=\varepsilon(k+l+1)^{-1}\leqslant H_{k,l}$, $k, l=1, 2, \ldots$.

Решение $\{\tilde{z}_n(t),\ n=0, 1,\ldots\}$ «испорченной» таким образом задачи Коши выражается, как легко видеть, формулами

$$\tilde{z}_0=1,\ \tilde{z}_{2m+1}=0,\ \tilde{z}_{2m}=y_m[z_2^{(0)}]^m t^{m-1}e^{-2m\delta t},\quad m=1,\ldots, \tag{3.23}$$

где числа y_m определяются рекуррентно: $y_1=1$,

$$y_m=\frac{\varepsilon}{(m-1)(2m+1)}\sum_{k=1}^{m-1}y_k y_{m-k},\quad m=2,\ldots.$$

Отсюда после применения индукции и простых вычислений, основанных на тождестве $\sum\limits_{k=1}^{m-1}k(m-k)={}^1/_6 m(m^2-1)$, получим оценку снизу: $y_m\geqslant m(\varepsilon/12)^{m-1}$ для всех $m=1,\ldots$. Подставим теперь эту оценку в (3.23), заметим далее, что согласно лемме $z_n\geqslant\tilde{z}_n$ $(n=0, 1,\ldots)$, и, наконец, используем представление (3.19) функции $\tau(t)$. В результате получаем неравенство

$$\tau(t)\geqslant e^{-\delta t}\sqrt{t\varepsilon z_2(0)/12}, \tag{3.24}$$

связывающее нижнюю границу температуры хвоста $\tau(t)$ с моментом четвертого порядка начальной функции распределения $f_0\in B_*$, $z_2(0)=\frac{1}{15}\int d\mathbf{v}\,f_0(|\mathbf{v}|)v^4$.

Но при фиксированных $z_0(0)=z_1(0)=1$ величина $z_2(0)$ может достигать сколь угодно больших значений даже для финитных функций. Действительно, можно задать функцию $\tilde{f}_0(v)$, убывающую при $v\to\infty$ пропорционально v^{-6}, а затем «обрезать» ее хвост на достаточно большом расстоянии $R\gg1$ от начала координат. Тогда моменты z_0 и z_1 практически не будут зависеть от R, а момент z_2 будет неограниченно расти с ростом R. Выбрав теперь сколь угодно малый временной интервал t_0, мы всегда можем сделать радиус обрезания R достаточно большим, чтобы правая часть неравенства (3.24) при $t=t_0$ превысила заданное число $N\gg1$. Согласно предложению 2 $\tau(t)\geqslant\tau(t_0)$, при $t\geqslant t_0$, и поэтому предложение 4 доказано.

Замечание 1. Условие $g(\mu)>\varepsilon$ предложения 4 можно ослабить, но мы не делаем этого, т. к. оно очень наглядно и выполнено для наиболее часто используемых моделей — $g(\mu)\equiv(4\pi)^{-1}$ для изотропного рассеяния и $g(\mu)\geqslant g(-1)$ для истинных максвелловских молекул.

Замечание 2. Предложение 4 показывает, что выбранный нами класс B_* является в определенном смысле минимальным классом функций распределения, содержащим все решения задачи Коши (2.9)—(2.10) для финитных начальных условий. Иначе говоря, ограничение (3.5) на асимптотику при $|\mathbf{v}|\to\infty$ не может быть ослаблено.

Замечание 3. Представление решения в виде ряда (2.28) при всех $t\geqslant0$ имеет смысл лишь в том случае, когда начальное условие $f_0(|\mathbf{v}|)$ находится в сравнительно небольшой окрестности равновесия $\|f_0-f_M\|<r_0$ (на оценке величины r_0 мы не будем останавливаться). В противном случае, как показывает предложение 4, необходимое условие $\tau(t)\leqslant2$ сходимости интеграла (2.29) может быть нарушено при всех $t>t_0$, где $t_0>0$ можно выбрать сколь угодно малым. Понятно, что пример начального распределения $f_0(|\mathbf{v}|)$, построенный при доказательстве предложения 4, принадлежит пространству L_2.

На этом мы окончим изучение асимптотики при $|\mathbf{v}|\to\infty$. Отметим, что немонотонное (во времени) поведение функции распределения при больших скоростях впервые проявилось в численных экспериментах [32] и много обсуждалось в литературе на физическом уровне строгости [13, 16]. Точный смысл эффекта (предложение 4) стал ясен только после введения в [15] понятия температуры хвоста и построения асимптотической теории, базирующейся на этом понятии.

Асимптотика при $t\to\infty$. Для изучения этого вопроса удобно преобразовать уравнение (3.11), полагая в нем

$$\varphi(x,t)=e^{-x}[1+u(x,t)]. \tag{3.25}$$

В результате получим

$$u_t+\int_0^1 ds\,\rho(s)\{u(x)-u(sx)-u[(1-s)x]\}= \tag{3.26}$$
$$=\int_0^1 ds\,\rho(s)u(sx)u[(1-s)x].$$

Через A_0 будем обозначать множество функций $u(x)$, представимых в виде

$$(3.27)\qquad u(x)=\sum_{n=2}^{\infty}u_n\frac{x^n}{n!},\quad \sup\sqrt[n]{|u_n|}<\infty.$$

Если $\varphi(x)$ и $u(x)$ связаны преобразованием (3.25), то включения $\varphi\in A$ (3.10) и $u\in A_0$, очевидно, эквивалентны.

Поскольку $u(x, t)\to 0$ при $t\to\infty$, то можно ожидать, что правая часть в (3.26) дает несущественный вклад в асимптотику. Полагая в (3.26) $u(x, t)\approx y(x, t)$ и сохраняя только линейные члены, получим линеаризованное уравнение

$$(3.28)\qquad y_t+\int\limits_0 ds\,\rho(s)\,\{y(x)-y(sx)-y[(1-s)x]\}=0.$$

Если $y(x, 0)\in A_0$, то решение задачи Коши для этого уравнения выписывается немедленно:

$$(3.29)\qquad y(x,t)=\sum_{n=2}^{\infty}y_n(0)\,e^{-\lambda_n t}\frac{x^n}{n!},\quad \lambda_n=\int\limits_0^1 ds\,\rho(s)\,[1-s^n-(1-s)^n],$$

откуда ясно, что $y(x, t)\in A_0$ для всех $t\geqslant 0$. В следующем разделе мы построим точное преобразование, связывающее решения $u(x, t)\in A_0$ нелинейного уравнения с решениями $y(x, t)\in A_0$ линеаризованного уравнения, а здесь ограничимся асимптотическими при $t\to\infty$ оценками.

Из формулы (3.29) ясно, что $y(x, t)\sim\exp(-\lambda_2 t)$ при $t\to\infty$. Аналогичной оценки можно ожидать и для решения $u(x, t)\in A_0$ нелинейного уравнения (3.26). Для получения такой оценки достаточно представить $u(x,t)$ в виде ряда (3.27), коэффициенты которого $u_n=u_n(t)$ определены формулами (2.32). Исходя из этих формул, нетрудно доказать, что при всех $t\geqslant 0$

$$(3.30)\qquad |u_n(t)|\leqslant\left(\frac{7}{3}\right)^{n/2-1}b^n e^{-\lambda_2 t},\quad b=\sup_{n=2,\dots}\sqrt[n]{|u_n(0)|},\quad n=2,\dots.$$

Отсюда для решения исходной задачи (3.11) следует

Предложение 5. *Пусть $\varphi(x, t)\in A_*$ — решение задачи Коши* (3.11). *Тогда для любого $X>0$ при всех $t\geqslant 0$*

$$(3.31)\qquad \|\varphi(x,t)-e^{-x}\|=\sup_{x\in[0,X]}|\varphi(x,t)-e^{-x}|\leqslant K(X)\,e^{-\lambda_2 t},$$

где $K(X)$ — положительное число, зависящее от X и начального условия $\varphi_0(x)$.

Из неравенств (3.30) следует справедливость предложения 5 для $K(X)=\exp[X(b\sqrt{7/3}-1)]$. Экспоненциальный рост этой величины не позволяет, вообще говоря, получить оценку типа (3.31) для функций распределения $f(|\mathbf{v}|, t)\in B_*$ путем простого применения формулы обращения (2.16). Однако для очень узкого класса функций, когда в (3.30) $b^2<3/7$, это можно сделать и получить в результате неравенство

$$(3.32)\qquad |f(|\mathbf{v}|, t)-(2\pi)^{-3/2}e^{-v^2/2}|<\mathrm{const}\,e^{-\lambda_2 t},$$

которое можно рассматривать как пример. В общем случае проблема оценки близости функций распределения на основе оценки близости соответствующих характеристических функций довольно трудна [29], и мы не будем на ней останавливаться, ограничившись неравенством (3.31).

Интересное явление — существенное замедление скорости релаксации уже на уровне характеристической функции $\varphi(x, t)$ — происходит при сильном расширении класса B_* быстро убывающих функций распределения. Действительно, линеаризованное уравнение (3.28) допускает решения вида

$$y(x,t;p)=x^p e^{-\lambda(p)t}, \quad \lambda(p)=\int_0^1 ds\,\rho(s)\{1-s^p-(1-s)^p\}, \tag{3.33}$$

причем $\lambda(p)\to+0$ при $p\to1$, так что величина $\lambda(p)>0$ может быть сделана как угодно малой. Отсюда ясно, как выбирать начальные условия для нелинейного уравнения (3.26), чтобы ожидать аналогичного поведения его решения $u(x, t)$ при $t\to\infty$. Положим

$$u_0(x)=\theta x^p, \quad \theta>0, \quad 1<p<2, \tag{3.34}$$

тогда согласно (3.25), (3.8) соответствующее начальное условие для уравнения Больцмана будет иметь вид

$$f_0(|\mathbf{v}|)=(2\pi)^{-3/2}e^{-v^2/2}\left\{1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta\,{}_1F_1\left(-p,\frac{3}{2},\frac{v^2}{2}\right)\right\}, \tag{3.35}$$

где ${}_1F_1(\ldots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Из известных свойств этой функции можно заключить, что: 1) при достаточно малых $\theta>0$ величина $f_0(|\mathbf{v}|)$ неотрицательна и 2) $f_0(|\mathbf{v}|)\sim|\mathbf{v}|^{-(3+2p)}$ при $|\mathbf{v}|\to\infty$. Таким образом, $f_0(|\mathbf{v}|)$ является изотропной функцией распределения, удовлетворяющей условиям нормировки (3.6), но, в отличие от функций класса B_*, $f_0(|\mathbf{v}|)$ убывает при $|\mathbf{v}|\to\infty$ по степенному закону.

Для построения решения уравнения Больцмана с начальным условием (3.35) надо рассмотреть уравнение (3.26) с начальным условием (3.34). Решение $u(x, t)$ естественно искать в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)(\theta x^p)^n, \quad u_n(0)=\delta_{n,1}, \tag{3.36}$$

подставляя который в (3.26) получим рекуррентные формулы типа (2.32)

$$\begin{aligned} u_n(t)&=\sum_{k=1}^{n-1}h[kp,(n-k)p]\int_0^t d\tau\,u_k(\tau)u_{n-k}(\tau)\times\\ &\times\exp[-\lambda(np)(t-\tau)], \quad n=2,\ldots,\\ u_1(t)&=\exp[-\lambda(p)t], \quad h(\alpha,\beta)=\int_0^1 ds\,\rho(s)s^\alpha(1-s)^\beta. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Предполагая для простоты доказательства функцию $\rho(s)$ ограниченной (псевдомаксвелловские молекулы — $0\leqslant\rho(s)\leqslant\rho_M$), нетрудно по индукции получить из (3.37) оценку

$$0 \leqslant u_n(t) \leqslant \left[\frac{\rho_M}{\lambda(p)}\right] \frac{[\Gamma(p-1)]^n}{\Gamma(np+1)} e^{-\lambda(p)t}, \qquad n=1,\ldots . \tag{3.38}$$

Отсюда с учетом (3.36), (3.25) для характеристической функции $\varphi(x, t)$ получим неравенство

$$\theta x^p e^{-x-\lambda(p)t} \leqslant \varphi(x, t) - e^{-x} \leqslant A x e^{(D-1)x-\lambda(p)t}, \tag{3.39}$$

$$A = \lambda(p) D/\rho_M, \qquad D^p = \theta\rho_M\Gamma(p+1)/\lambda(p).$$

При достаточно малых $\theta>0$ функция $\varphi(x, t)$ убывает экспоненциально при $x\to\infty$ и соответствующую функцию распределения $f(|\mathbf{v}|, t)$ можно получить по формуле обращения

$$f(|\mathbf{v}|, t) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k}\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}} \varphi\left(\frac{k^2}{2}, t\right), \tag{3.40}$$

чем и завершается построение решения уравнения Больцмана (2.9) с начальным условием (3.35). Оценка (3.39) позволяет легко доказать следующее

Предложение 6. *Пусть в уравнении Больцмана* (2.9) $g(\mu)$ — *ограниченная функция. Тогда для любого* $0\leqslant\delta<\lambda_2$ *можно указать неотрицательное решение* $f(|\mathbf{v}|, t)$ *этого уравнения, удовлетворяющее нормировке* (3.6) *и такое, что при всех* $t\geqslant0$

$$\|M-M_M\|_L = \int d\mathbf{v}\, |f(|\mathbf{v}|, t) - (2\pi)^{-3/2} e^{-v^2/2}| \leqslant C_1 e^{-\delta t}, \tag{3.41}$$

при этом соответствующая характеристическая функция $\varphi(k^2/2, t)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$C_1 e^{-\delta t} \leqslant \|\varphi-\varphi_M\|_C \leqslant C_2 e^{-\delta t}, \qquad \|\varphi-\varphi_M\|_C = \sup_{0\leqslant x<\infty} |\varphi(x, t) - e^{-x}|, \tag{3.42}$$

где C_1 *и* C_2 — *положительные постоянные.*

Доказательство уже фактически проведено выше явным построением такого решения. Действительно, надо просто выбрать в (3.34)—(3.35) значение $p_0>1$, такое что $\lambda(p_0)=\delta$. Тогда (3.42) вытекает из (3.39), а (3.41) следует из известного соотношения $\|\varphi-\varphi_M\|_C \leqslant \|f-f_M\|_L$ между интегрируемой функцией и ее преобразованием Фурье.

Замечание. Предложение 5 остается верным и в общем случае (2.8), однако доказательство оценки типа (3.38) становится в этом случае довольно громоздким.

Таким образом, начальные условия со степенными хвостами могут приходить к равновесию гораздо более медленно, чем быстро убывающие при $|\mathbf{v}|\to\infty$ функции распределения. Существование решений такого типа было подсказано линейной теорией [4, 8]. Общий метод решения нелинейного уравнения Больцмана в классе медленно убывающих функций распределения, основанный на формальном «сведении» этого уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.31), описан в [33]. Другой подход к этой проблеме см. в [34].

4. ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И СЛЕДСТВИЯ

Установим теперь точное соответствие между нелинейным уравнением (3.26) и линеаризованным уравнением (3.28), рассматриваемыми на функциях класса A_0, т. е. на функциях $u(x, t)$ и $y(x, t)$, которые при всех $t\geqslant 0$ представимы степенными рядами

$$(4.1)\qquad u(x,t)=\sum_{n=2}^{\infty} u_n(t)\frac{x^n}{n!},\quad y(x,t)=\sum_{n=2}^{\infty} y_n(t)\frac{x^n}{n!},$$

$$(4.2)\qquad \sup\sqrt[n]{|u_n(t)|}<\infty,\quad \sup\sqrt[n]{|y_n(t)|}<\infty.$$

Будем для таких функций писать, что $u(x, t)\in A_0$ и $y(x, t)\in A_0$, и опускать переменную t, когда она несущественна. Ограничиваясь случаем псевдомаксвелловских молекул, сформулируем основной результат этого раздела в виде теоремы.

Теорема. *Пусть $\rho(s)\geqslant 0$ и интегрируема на $[0, 1]$. Тогда существуют нелинейные операторы (преобразования) $\hat{R}$ и $\hat{S}$, действующие по переменной x из A_0 в A_0 и такие, что:*

1) *если $y(x, t)\in A_0$ — решение (3.28), то $\hat{R}y=u(x, t)\in A_0$ — решение (3.26);*

2) *если $u(x, t)\in A_0$ — решение (3.26), то $\hat{S}u=y(x, t)\in A_0$ — решение (3.28);*

3) *$\hat{R}\hat{S}=\hat{S}\hat{R}=\hat{I}$, где $\hat{I}$ — тождественный оператор;*

4) *соответствующие преобразования коэффициентов рядов (4.1) полиномиальны:*

$$u=\hat{R}y\Leftrightarrow u_n=y_n+P_n(y_2,\ldots,y_{n-2}),\ n=2,\ldots,$$

$$y=\hat{S}u\Leftrightarrow y_n=u_n+Q_n(u_2,\ldots,u_{n-2}),\ n=2,\ldots,$$

где $P_n(\ldots)$ и $Q_n(\ldots)$ — полиномы степени $[n/2]$, не содержащие членов нулевой и первой степеней.

Доказательство можно провести в два этапа: сначала построить в явной форме преобразования $\hat{R}$ и $\hat{S}$, а затем уже проверить, что все утверждения теоремы действительно справедливы для этих преобразований.

Рассматриваемые на функциях класса A_0 уравнения (3.26) и (3.28) сводятся к соответствующим системам уравнений для коэффициентов рядов (4.1):

$$(4.4)\qquad \dot{u}_n+\lambda(n)u_n=\sum_{\substack{k_1,k_2\geqslant 2\\ k_1+k_2=n}} H(k_1,k_2)u_{k_1}u_{k_2},\quad n=2,3,\ldots,$$

$$(4.5)\qquad \dot{y}_n+\lambda(n)y_n=0,\quad n=2,3,\ldots,$$

где использованы обозначения (2.27), (2.27а). При $n=2$, 3 условие суммирования $k_1+k_2=n$ в правой части (4.4) не может удовлетвориться, и мы полагаем в таких случаях по определению правую часть (4.4) равной нулю. Рассмотрим вопрос о приведении системы (4.4) к нормальной форме. Применяя обычный метод [35], легко заключить, что для приведения этой системы к ее линейной части достаточным является следующее условие:

$$(4.6)\qquad \Delta_m(k_1,\ldots,k_m)=\lambda\left(\sum_{j=1}^{m}k_j\right)-\sum_{j=1}^{m}\lambda(k_j)\neq 0$$

для всех натуральных $m\geqslant 2$, $1\leqslant j\leqslant m$, $k_j\geqslant 2$. Иначе говоря, вследствие специального вида правой части (4.4) существенными оказываются только резонансы определенного типа, нарушающие условие (4.6). Из формулы (2.27а) для собственных чисел вытекают неравенства

$$(4.7)\qquad \lambda(n)+\lambda(m)-\lambda(n+m)\geqslant 2\lambda(2)-\lambda(4)=2\int_0^1 ds\rho(s)s^2(1-s)^2$$

для $n, m=2, 3, \ldots$. Поэтому условие (4.6) действительно выполнено. Кроме того, легко проверить, что система (4.4) приводится к нормальной форме (4.5) полиномиальными преобразованиями, т. е. ряды Пуанкаре обрываются. Если бы речь шла о конечных системах (4.4), (4.5) для $n=2,\ldots,N$, то проведенные рассуждения были бы достаточны для того, чтобы сделать вывод об эквивалентности этих систем. Однако поскольку нас интересует эквивалентность самих уравнений (3.26) и (3.28), то надо установить, что приведение к нормальной форме не выводит за пределы класса A_0, т. е. сохраняет неравенства типа (4.2). Это требует более детального знания нормализующего преобразования.

Будем искать такое преобразование — замену переменных в (4.4) — в виде

$$(4.8)\qquad u_n=\sum_{m=1}^{[n/2]}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\geqslant 2\\ k_1+\ldots+k_m=n}} r_m(k_1,\ldots,k_m)\prod_{j=1}^{m}y_{k_j},\qquad r_1(k_1)\equiv 1,\qquad n=2\ \ldots$$

Здесь коэффициент $r_1(k_1)$ при линейном слагаемом выбран равным единице, как всегда в методе нормальных форм [35], а структура нелинейных слагаемых подсказана видом правой части (4.4). Подставляя (4.8) в (4.4), и требуя, чтобы преобразование (4.8) переводило произвольное решение системы (4.5) в некоторое решение системы (4.4), получим после простых, но громоздких, выкладок следующие формулы для рекуррентного вычисления $r_m(\ldots)$:

$$(4.9)\qquad r_1(k_1)=1,\quad r_m(k_1,\ldots,k_m)\Delta_m(k_1,\ldots,k_m)=$$
$$=\sum_{l=1}^{m-1}H(k_1+\ldots+k_j,k_{j+1}+\ldots+k_m)r_j(k_1,\ldots,k_j)r_{m-j}(k_{j+1},\ldots,k_m),$$
$$m=2,\ldots,$$

где использовано обозначение (4.6).

Понятно, что $r_m(k_1,\ldots,k_m)$ в (4.8) определены лишь с точностью до любой перестановки аргументов $k_1,\ldots,k_m$. Неоднозначность можно устранить с помощью симметризации, но мы не делаем этого, а выбираем $r_m(k_1,\ldots,k_m)$ так, чтобы они определялись наиболее простыми формулами (4.9).

Совершенно аналогично строится преобразование, переводящее решение системы (4.4) в решение системы (4.5). Результат имеет вид

$$(4.10)\qquad y_n=\sum_{m=1}^{[n/2]}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\geqslant 2\\ k_1,\ldots,k_m=n}} s_m(k_1,\ldots,k_m)\prod_{j=1}^{m} u_{k_j},\quad n=2,\ldots;$$

$$(4.11)\qquad s_1(k_1)=1,\quad s_m(k_1,\ldots,k_m)\Delta_m(k_1,\ldots,k_m)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{m-1} H(k_j,k_{j+1})s_{m-1}(k_1,\ldots,k_{j-1},k_j+k_{j+1}+k_{j+2},\ldots,k_m),\ m=2,\ldots.$$

Тот факт, что преобразования (4.8)—(4.9) и (4.10)—(4.11) являются взаимно обратными, следует из единственности и однозначной обратимости нормализующего преобразования. Формулы (4.8)—(4.11) определяют явный вид полиномов P_n и Q_n в (4.3), а соответствующие преобразования $\hat{R}$ и $\hat{S}$ функций $y(x,t)\in A_0$ и $u(x,t)\in A_0$ очевидным образом определяются на основе представления этих функций в виде рядов (4.1).

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что преобразования $\hat{R}$ и $\hat{S}$ действуют из A_0 в A_0. Это можно сделать следующим образом. Сначала из рекуррентных формул (4.9), (4.11) с учетом условия теоремы и неравенства (4.7) по индукции получим оценку

$$(4.12)\qquad |r_m(k_1,\ldots,k_m)|\leqslant A^{m-1},\qquad |s_m(k_1,\ldots,k_m)|\leqslant A^{m-1},\qquad m=1,\ldots,$$

где

$$(4.13)\qquad A=\int_0^1 ds\rho(s)/2\int_0^1 ds\rho(s)s^2(1-s)^2.$$

Пусть теперь $y(x)\in A_0$, тогда в (4.1) $|y_n|\leqslant a^n$ для некоторого $a>0$ и для всех $n=2,\ldots$. Рассмотрим функцию $u=\hat{R}y$ такую, что коэффициенты u_n и y_n рядов (4.1) связаны формулами (4.8). Включение $u(x)\in A_0$ эквивалентно тому, что производящая функция

$$(4.14)\qquad F(z)=\sum_{n=2}^{\infty} u_n z^n$$

аналитична в некоторой окрестности точки $z=0$. Подставляя (4.8) в (4.14) и оценивая $|F(z)|$ с учетом (4.12), получим простое неравенство

$$|F(z)|\leqslant a^2|z|^2[1-a|z|-Aa^2|z|^2]^{-1},$$

гарантирующее сходимость ряда (4.14) в некотором круге $|z|<r$. Следовательно, $u(x)\in A_0$, т. е. преобразование $\hat{R}$ действует из A_0 в A_0. Доказательство аналогичного факта для обратного преобразования $\hat{S}$ сводится к проведенному здесь рассуждению простым изменением обозначений. Теорема доказана.

Замечание. Локальная — в достаточно малой окрестности равновесного решения — эквивалентность нелинейного и линеаризованного уравнений Каца [24] на функциях гильбертова пространства L_2 была установлена в [36], затем в [37] было сформулировано без доказательства аналогичное утверждение для уравнения Больцмана (2.9). Доказанная здесь теорема отличается от результатов [36, 37] прежде всего глобальным характером эквивалентности, а также выбором отличного от L_2 класса функций (в L_2 возможна только локальная эквивалентность) и явным представлением нормализующего преобразования.

Из этой теоремы следует, что уравнение (3.26) допускает обширные семейства частных решений, обобщающие класс автомодельных решений, который был описан в разделе 2.

Следствие 1. *Уравнение* (3.26) *для любого* $N=1,\ldots$ *и для любого набора натуральных чисел* $n_1\geqslant 2,\ldots,n_N\geqslant 2$ *имеет решения вида*

$$u_N(x,\,t)=U_N[\gamma_1 x^{n_1}e^{-\lambda_{n_1}t},\ldots,\gamma_N x^{n_N}e^{-\lambda_{n_1}t}],\qquad u_n\in A_0, \tag{4.15}$$

где $U_N(z_1,\ldots,z_N)$ — *аналитическая функция* N *переменных, а* $\gamma_1,\ldots,\gamma_N$ — *произвольные постоянные. Эти постоянные можно выбрать достаточно малыми по абсолютной величине, для того чтобы подстановка* (4.15) *в* (3.25), (3.40) *определяла решение* $f_N(|\mathbf{v}|,\,t)$ *уравнения Больцмана* (2.9).

Решение $u_N(x,\,t)$ строится следующим образом. Положим в (4.8)

$$y_{n_1}=\gamma_1\exp(-\lambda_{n_1}t),\ldots,\;y_{n_N}=\gamma_N\exp(-\lambda_{n_N}t),\qquad y_n=0,\qquad n\neq n_j, \tag{4.15a}$$

для всех $j=1,\ldots,N$. Подставляя результат в ряд (4.1) для $u(x,\,t)$ получим формулу

$$u_N(x,\,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{N}\frac{r_m(n_{j_1},\ldots,n_{j_m})}{(n_{j_1}+\ldots+n_{j_m})!}\prod_{k=1}^{m}\gamma_{j_k}x^{n_{j_k}}\exp(-\lambda_{n_{j_k}}t), \tag{4.16}$$

определяющую правую часть (4.15). Оценка роста $|u_n(x,\,t)|$ при $|x|\to\infty$ проводится так же, как в доказательстве теоремы. Понятно, что при $N=1$ результат сводится к автомодельным решениям, построенным в разделе 2. Формула (4.16) определяет решение уравнения (3.26) и для нецелых значений $n_1\geqslant 2,\ldots,n_N\geqslant 2$, если произвести замену $z!=\Gamma(z+1)$ для нецелых z [14].

Таким образом, прямое преобразование $u=\hat{R}y$ дает возможность выделять специальные классы частных решений. Приведем теперь пример использования обратного преобразования $y=\hat{R}u$.

Следствие 2. *Пусть* $f(|\mathbf{v}|,\,t)\in B_*$ — *решение уравнения Больцмана* (2.9). *Существует счетное множество функционалов* $\Gamma_n[f]$, $n=2,\,3,\ldots$, *сохраняющихся во времени.*

Для доказательства заметим, что всякому решению $f(|\mathbf{v}|,\,t)\in B_*$ уравнения (2.9) можно сопоставить формальный (вообще говоря, расходящийся) ряд вида (2.28), где

$$u_n(t)=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\int d\mathbf{v}f(|\mathbf{v}|,t)\mathscr{L}_n^{1/2}\left(\frac{v^2}{2}\right),\qquad n=2,\ldots. \tag{4.17}$$

Независимо от сходимости по метрике L_2 ряда (2.28), его коэффициенты (4.17) однозначно определяют по формуле (2.30) характеристическую функцию $\varphi(x,\,t)\in A_*$, а, следовательно, и функцию распределения $f(|\mathbf{v}|,\,t)\in B_*$. Временная эволюция величин (4.17) описывается системой (4.4) и согласно теореме существует набор полиномов (4.10) вида

$$y_n(t)=u_n(t)+Q_n[u_2(t),\ldots,u_{n-2}(t)],\qquad n=2,\,3,\ldots, \tag{4.18}$$

которые меняются во времени чисто экспоненциально

$$(4.19)\qquad y_n(t)=y_n(0)e^{-\lambda_n t},\quad \lambda_n=\int_0^1 ds\rho(s)[1-s^n-(1-s)^n],\quad n=2,3,\ldots.$$

Если $y_{n_0}^{(0)}\neq 0$ для некоторого n_0, то, очевидно,

$$(4.20)\qquad \Gamma_n=|y_n(t)|^{\lambda_{n0}}/|y_{n_0}(t)|^{\lambda_n}=\mathrm{const},\quad n=2,3,\ldots,$$

а формулы (4.17)—(4.18) показывают, что Γ_n — это действительно функционал, определенный на функциях класса B_*. Случай $y_n\equiv 0$ при всех $n=2, 3,\ldots$ неинтересен, т. к. ему отвечает тривиальное решение (2.12).

Практический интерес представляют не инварианты (4.20), а функции $y_n(t)$ (4.18), которые можно назвать нормальными координатами решения $f(|\mathbf{v}|, t)$ уравнения Больцмана. Преобразование, обратное к (4.18), также полиномиально (4.8) и может быть записано в форме

$$(4.21)\qquad u_n(t)=y_n(t)+P_n[y_2(t),\ldots,y_{n-2}(t)],\quad n=2,3,\ldots.$$

Опишем схему решения задачи Коши (2.9)—(2.10) для $f_0\in B_*$ методом преобразования к нормальным координатам. На первом этапе по формулам (4.17) вычисляется последовательность $\{u_n(0),\ n=2,\ldots\}$, а затем — по формулам (4.18) — последовательность $\{y_n(0),\ n=2,\ldots\}$ начальных значений нормальных координат. На втором (тривиальном) этапе по формулам (4.19) вычисляется последовательность $\{y_n(t),\ n=2,\ldots\}$ при всех $t>0$. На третьем этапе по формулам (4.21) вычисляется последовательность $\{u_n(t),\ n=2,\ldots\}$ при всех $t>0$, а затем — по формуле (2.30) — строится характеристическая функция $\varphi(x, t)\in A_*$. Проблему восстановления функции распределения $f(|\mathbf{v}|, t)\in B_*$ по ее характеристической функции $\varphi(x)\in A_*$ мы нигде в данной работе не рассматриваем, ограничиваясь замечанием о том, что эти функции связаны взаимно однозначно. Поэтому третий этап можно считать заключительным.

С практической точки зрения такая схема излишне усложнена, т. к. можно вычислить $\{u_n(t),\ n=2,\ldots\}$ по рекуррентным формулам (2.32), не прибегая к нормальным координатам. Однако схема эта полезна как для понимания структуры общего решения нелинейного уравнения Больцмана, так и для сравнения его свойств со свойствами других уравнений, в частности уравнений типа Кортевега — де Фриза (КдФ). Легко усмотреть аналогию между описанной схемой и классической схемой интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния. Нормальные координаты, эволюция которых имеет вид (4.19), отвечают здесь данным рассеяния, а преобразования (4.18) и (4.21) соответственно — решению прямой и обратной задач рассеяния. Как известно, N-солитонные решения уравнения КдФ отвечают случаю, когда совокупность данных рассеяния сводится к конечному набору чисел (безотражательные потенциалы). В рассмотренной схеме этому случаю соответствует конечный набор ненулевых нормальных координат (4.15а), а аналогом N-солитонных решений являются для уравнения Больцмана решения $f_N(|\mathbf{v}|, t)$, описанные в формулировке следствия 1. Другие аспекты формальной аналогии между уравнениями типа КдФ и Больцмана указаны в [14, 38].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим некоторые обобщения и приложения описанных здесь методов и результатов. Простейшие обобщения уравнения (2.9) — это система уравнений для смеси максвелловских газов [33, 39] и аналог этого уравнения в евклидовом пространстве произвольной размерности [10]. Преобразование Фурье приводит здесь к тем же упрощениям, и теорию релаксации можно построить совершенно аналогично. Однако для системы, как и для одного уравнения в общем — анизотропном — случае [25], могут возникать резонансы, и, следовательно, эквивалентности нелинейного и линеаризованного уравнений, вообще говоря, нет. Менее тривиально обобщение на случай зависящей от скорости частоты столкновений. Формула (2.5) указывает на упрощения, возникающие в случае, когда $g(u, \cos\theta)$ — полином по u^2. Действительно, двумерное уравнение Больцмана при $g(u, \cos\theta) = u^2|\sin\theta|$ оказывается точно решаемым для изотропных функций распределения [40, 41]. Обобщения на уравнения, связанные с теорией полимеров, обсуждаются в [16, 17].

Естественное приложение точных решений — это анализ приближенных методов. В связи с методом Грэда отметим построенные в разделе 3 примеры сходимости и расходимости рядов (2.28) в задаче о релаксации. Примеры сходящихся и расходящихся рядов Гильберта — Чепмена — Энскога, возникающих в модельных нелинейных задачах, описаны в [39, 42]. Однако основной для метода Чепмена — Энскога вопрос — это не проблема сходимости рядов, а проблема уточнения навье-стоксовской гидродинамики. Можно ли считать, отвлекаясь от краевых задач и ограничиваясь задачей Коши, что уравнения Барнетта уточняют уравнения Навье — Стокса при достаточно малых числах Кнудсена? По-видимому, ответ отрицательный. Равновесные решения уравнений Барнетта оказываются неустойчивыми относительно периодических малых возмущений с длиной волны, меньшей либо порядка свободного пробега [43]. Эта нефизическая неустойчивость приводит к тому, что поведение решений уравнений Барнетта качественно отличается от поведения решений уравнений Навье — Стокса и Больцмана. Таким образом, метод Чепмена — Энскога, несмотря на его известную логическую стройность, нуждается в определенных модификациях.

Автор глубоко благодарен Д. Н. Зубареву за полезные обсуждения.

Литература

[1] *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: Гостехиздат, 1956.
[2] *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
[3] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
[4] *Бобылев А. В.* О некоторых свойствах уравнения Больцмана для максвелловских молекул. Препринт № 51. М.: ИПМ АН СССР, 1975.
[5] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1975, *225*, № 6, 1296–1299.
[6] *Krook M., Wu T. T.*– Phys. Rev. Lett., 1976, *36*, 1107–1109.
[7] *Krook M., Wu T. T.*– Phys. Fluids, 1977, *20*, 1589–1595.
[8] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1975, *225*, № 5, 1041–1044.
[9] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1976, *231*, № 3, 571–574.
[10] *Ernst M. H.*– Phys. Lett., 1979, *69A*, 390–395.
[11] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1979, *249*, № 5, 1087–1091.
[12] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1980, *251*, № 5, 1361–1365.

[13] *Hauge E. H., Praestgaard E.*– J. Stat. Phys., 1981, *24*, 21–32.
[14] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1981, *256*, № 6, 1341–1346.
[15] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1981, *261*, № 5, 1099–1104.
[16] *Ernst M. H.*– Phys. Rep., 1981, *78*, 1–73.
[17] *Ernst M. H.*– Stadies in Statistical Mechanics, v. X. Amsterdam, North. Holland, 1983, 51–119.
[18] *Hauge E. H.*– Phys. Lett., 1979, *74A*, 183–187.
[19] *Бобылев А. В., Веденяпин В. В.* Преобразование Фурье интегралов Больцмана и Ландау. Препринт № 125. М.: ИПМ АН СССР, 1981.
[20] *Веденяпин В. В.*– ДАН СССР, 1976, *233*, № 5, 765–769.
[21] *Kihara T.*– Rev. Mod. Phys., 1953, *25*, 844–852.
[22] *Grad H.*– Commun. Pure and Appl. Math., 1949, *2*, 331–360.
[23] *Маслова Н. Б.*– Вестн. ЛГУ, 1968, № 13, 88–95.
[24] *Кас M.*– Proc. III Bercley Symp. on Math. Stat. and Prob., v. 3, 171–190. Cal. Press, 1956.
[25] *Веденяпин В. В.*– ДАН СССР, 1981, *256*, № 2, 338–342.
[26] *Hendrics E. M., Nieunhuizen T. M.*– J. Stat. Phys., 1982, *29*, 591–605.
[27] *Barnsley M., Cornille H.*– J. Math. Phys., 1980, *21*, 1176–1193.
[28] *Barnsley M., Cornille H.*– Proc. Roy. Soc. London, 1981, *A374*, 371–400.
[29] *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
[30] *Mc. Kean H. P.*– J. Comb. Theory, 1967, *2*, 358–382.
[31] *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960.
[32] *Tjon J. A.*– Phys. Lett., 1979, *70A*, 369–372.
[33] *Бобылев А. В.* Динамика разреженных газов (Труды VI Всесоюзной конференции, Новосибирск, 1979), ч. I. Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1980, 42–48.
[34] *Cornille H., Gervois A.*– J. Stat. Phys., 1981, *26*, 181–193.
[35] *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
[36] *Grunbaum F. A.*– Trans. Amer. Math. Soc., 1972, *165*, 425–449.
[37] *Grunbaum F. A.*– Bull. Amer. Math. Soc., 1972, *78*, 759–762.
[38] *Бобылев А. В.* Метод исследования нелинейных эволюционных уравнений. Препринт № 140 и 141. М.: ИПМ АН СССР, 1981.
[39] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1980, *250*, № 2, 340–343.
[40] *Ernst M. H., Hendrics E. M.*– Phys. Lett., 1979, *70A*, 183–188.
[41] *Бобылев А. В.* Молекулярная газодинамика (Труды V Всесоюзной конференции, Долгопрудный, 1978). М.: Наука, 1982, 50–53.
[42] *Bobylev A. V.* 1982 ICM Short comm. (Abstracts), v. XI. Warsaw, Poland, 1983, 29.
[43] *Бобылев А. В.*– ДАН СССР, 1982, *262*, № 1, 71–75.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3.V.1984 г.

EXACT SOLUTIONS OF THE NONLINEAR BOLTZMANN EQUATIONS AND THE THEORY OF RELAXATION OF THE MAXWELL GAS

Bobylev A. V.

Rewiew of the results obtained in the last years in the theory of nonlinear Boltzmann equation for Maxwell molecules is presented. The general theory of spatially uniform relaxation based on the Fourier transform method in the velocity space is described. Asymptotic behaviour of the distribution function $f(\mathbf{v}, t)$ with $|\mathbf{v}|\to\infty$ (formation of Maxwellian tails) and with $t\to\infty$ (rate of relaxation) is studied. The analytic transformation of the nonlinear equation into the linearized one is constructed. It is shown that the nonlinear Baltzmann equation possesses the infinite number of invariants. The classes of special type partial solutions are constructed. The analogy with the equations of KdV-type is pointed out.