A. N. Khaikin, Week graded analogues of Gauss lemma and Eisenstein criterion, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1995, Volume 1, Issue 3, 813–816

https://www.mathnet.ru/eng/fpm96

Слабо градуированные аналоги леммы Гаусса и критерия Эйзенштейна

А. Н. ХАЙКИН

Ключевые слова: критерий Эйзенштейна, градуированные кольца, кольца с дифференцированиями.

Аннотация

Данная работа является продолжением цикла работ, посвященных общим формам леммы Гаусса и критерия Эйзенштейна. Так, в работах [1] и [2] даны формулировки для колец с дифференцированием, а в [3] — для Z- и Z^+-градуированных колец. В данной работе рассматриваются Z^+-слабо градуированные кольца, включающие в себя два предыдущих класса колец. Теорема 1 является аналогом критерия Эйзенштейна, теорема 2 — аналог леммы Гаусса, следствие из них — некоторое улучшение основного результата статьи Ковачича [1]. В теореме 3 показана частичная необходимость некоторых достаточных условий, предложенных в работе.

Abstract

A. N. Khaikin, Week graded analogues of Gauss lemma and Eisenstein criterion, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 813–816.

This paper continues a series of investigations, devoted to generalized forms of Gauss lemma and Eisenstein criterion. Thus in papers [1] and [2] statements for rings with derivations are given, and in [3] those for Z- and Z^+-graded rings. In this paper Z^+-weak graded rings (which include two previous classes) are considered. Theorem 1 is an analog of Eisenstein criterion, theorem 2 is an analog of Gauss lemma. Some improvement of the result of Kovachich [1] follows from these theorems. Partial necessity of some sufficient conditions introduced in the paper has been demonstrated in theorem 3.

Определение. Кольцо $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ называется Z^+-слабо градуированным, если для умножения однородных элементов выполняется следующее условие:

$$a_t b_s = c_0 + \dots + c_{t+s}, \quad \text{где } a_t \in A_t,\ b_s \in A_s,\ c_i \in A_i.$$

Параллельно рассмотрим Z^+-градуированное кольцо A^*, состоящее из элементов кольца A со следующим умножением на однородных элементах $a_t \in A_t$, $b_s \in A_s$: $a_t * b_s = c_{t+s}$, где c_{t+s} — однородный элемент из A_{t+s} в разложении $a_t b_s$. Если рассмотреть каноническую фильтрацию кольца A ($A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$, где $A^n = \bigoplus_{k=0}^{n} A_k$), то кольцо A^* изоморфно ассоциированному с данной фильтрацией градуированному кольцу.

Определение. Назовем идеал I однородным в A, если из того, что

$$a = a_0 + \dots + a_n \in I \quad (a_i \in A_i),$$

следует, что $a_i \in I$ для всех i.

Из определения следует, что если I — однородный идеал в A, то I — однородный идеал в A^*.

Определение. Элемент $L \in A$ называется неразложимым, если из того, что $L = MN$, следует, что или M, или N лежат в A_0.

Теорема 1. *Пусть A^* — целостное, I — однородный идеал в A, I — вполне первичный идеал в A^*. Элемент $L = c_0 + \dots + c_l \in A$. Если $c_0 \notin I$, $c_i \in I$ $(i \geqslant 1)$, $c_l \notin I^2$, то тогда L неразложим.*

Доказательство. Допустим, что это не так.

$L = c_0 + \dots + c_l = (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_m) = MN$. $l = n + m$, $c_l = a_n * b_m$. Так как I — вполне первичный идеал в A^* и $c_l \notin I^2$, $c_l \in I$, то имеем два случая: 1) $a_n \in I$, $b_m \notin I$; 2) $a_n \notin I$, $b_m \in I$.

1). Пусть для любого $i \geqslant r$ $a_i \in I$. Так как $L \notin I$, то $M \notin I$, то есть $r > 0$. Рассмотрим $c_{m+r-1} = \mathfrak{J}_{m+r-1}\left(\sum_{i+k\geqslant m+r-1} a_i b_k\right) \in I$, где $\mathfrak{J}_{m+r-1}$ — проекция на A_{m+r-1}, $i \geqslant r + (m-1-k)$. Если $i \geqslant r$, то $a_i \in I \Longrightarrow a_i b_k \in I \Longrightarrow \mathfrak{J}_{m+r-1}(a_i b_k) \in I$. $i < r$ только тогда, когда $i = r-1$, $k = m$. Следовательно, $\mathfrak{J}_{m+r-1}(a_{r-1} b_m) = a_{r-1} * b_m \in I$. Так как $a_{r-1}, b_m \notin I$, то имеем противоречие с целостностью A^*/I.

Случай 2) рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Если A_0 лежит в множестве неделителей нуля в A и удовлетворяет левому условию Оре (т. е. для любых $a_0 \in A_0$, $M \in A$ существуют такие $b_0 \in A_0$, $N \in A$, что $Na_0 = b_0 M$), то можно рассмотреть соответствующее кольцо частных $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$, где $B_i = A_0^{-1} A_i$. Далее, пусть для любых $a_0 \in A_0$, $a_i \in A_i$ выполняется включение $a_0 a_i \in A_i$ и для любого необратимого элемента $a_0 \in A_0$ существует такой необратимый элемент $c \in A_0$, что идеал, порожденный a_0, лежит в cA. В дальнейшем будем рассматривать такое кольцо A.

Определение. Однородные элементы $\{a_0 \dots, a_n\}$ называются взаимно простыми, если не существует такого необратимого $c \in A_0$, что $a_i \in cA$ для любого i.

Рассмотрим условия, которые мы будем накладывать в дальнейшем на кольцо A.

Условие 1. Пусть $c \in A_0$, a_k и b_m — однородные элементы. Из взаимной простоты пар $\{c, a_k\}$ и $\{c, b_m\}$ следует, что $\{c, a_k * b_m\}$ взаимно просты.

Условие 2. Для любых однородных элементов $\{a_0, \dots, a_n\}$ существует такой элемент $c \in A_0$, что $a_i \in cb_i$, $\{b_0, \dots, b_n\}$ взаимно просты и c однозначно определен (с точностью до умножения справа на обратимый элемент).

Предложение. *Пусть на кольце A выполнено условие* 1) $c_0 + \dots + c_l = (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_m)$. *Предположим, что $\{a_0, \dots, a_n\}$ и $\{b_0, \dots, b_m\}$ взаимно просты. Тогда элементы $\{c_0, \dots, c_l\}$ взаимно просты.*

Доказательство. Пусть $\{c_0, \dots, c_l\} \in aA$, где $a \in A_0$ и a необратим. Пусть a_i — такой элемент, что $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}\}$ не взаимно простые, а при добавлении a_i становятся взаимно простыми. Аналогично пусть $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}, b_m, \dots, b_{j+1}\}$ не взаимно простые, а при добавлении b_j становятся взаимно простыми. Тогда $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}, b_m, \dots, b_{j+1}\} \in cA$, $c \in A_0$, c необратим. Пусть $e \in A_0$ — такой необратимый элемент, что идеал, порожденный c, лежит в eA.

$$c_{i+j} = \mathfrak{J}_{i+j}\Big(\sum_{k+t \geqslant i+j} a_k b_t\Big), \quad \text{где } \mathfrak{J}_{i+j} \text{ — проекция на } A_{i+j}.$$

Если $k > i$, то $a_k \in eA$, поэтому $a_k b_t \in eA$, а так как $eA_{i+j} \in A_{i+j}$, то $\mathfrak{J}_{i+j}(a_k b_t) \in eA$. Если $t > j$, то $b_t \in cA$, и поэтому $a_k b_t \in eA$ $(Ac \subseteq eA) \Longrightarrow \Longrightarrow \mathfrak{J}_{i+j}(a_k b_t) \in eA$. Так как $c_{i+j} \in eA$, то $\mathfrak{J}_{i+j}(a_i b_j) \in eA$, то есть $a_i * b_j \in eA$. Но $\{c, a_i\}$ и $\{c, b_j\}$ взаимно просты, так как добавление a_i или b_j в $\{a, a_n, \dots, a_{i+1}, b_m, \dots, b_{j+1}\}$ дает взаимно простые наборы. Значит, из условия 1 элементы $\{c, a_i * b_j\}$ взаимно просты, что приводит в противоречию.

Теорема 2. *Пусть в кольце A выполнены условия 1 и 2. Тогда, если элемент $L \in A$ разложим в B, то L разложим и в A.*

Доказательство. Пусть $L = MN$, M и $N \in B$. Используя условие 2, можно получить $L = p^{-1}q\tilde{M}\tilde{N}$, где $p, q \in A_0$, $\tilde{M}, \tilde{N} \in A$ и наборы однородных элементов в $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ взаимно просты. Далее, $q\tilde{M}\tilde{N} = pL = pt\tilde{L}$ (однородные элементы в $\tilde{L}$ взаимно просты). По предложению однородные элементы в $\tilde{M}\tilde{N}$ взаимно просты. То есть $q = pts$, где s обратим (условие 2). Значит, $L = ts\tilde{M}\tilde{N}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть R — дифференциальная область целостности, F — ее поле частных. $\mathbb{D}$ — дифференцирование кольца R, $\mathbb{Q}$ — автоморфизм кольца R, P — простой дифференциальный (инвариантен относительно $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^{-1}$) идеал R. Пусть для любого конечнопорожденного идеала локального кольца R_p существует наименьший главный, содержащий его, и идеал PR_p главный. Рассмотрим $R[\mathbb{D}]$, где $\mathbb{D}r = \mathbb{Q}\,(r)\,\mathbb{D} + \mathbb{D}(r)$ для $r \in R$ — умножение в $R[\mathbb{D}]$.*

Пусть элемент $L = \sum_{i=0}^{l} c_i\, \mathbb{D}^i \in R[\mathbb{D}]$ такой, что $c_i \in P$ $(i \geqslant 1)$, $c_0 \notin P$, $c_l \notin P^2$.

Тогда элемент L неразложим над F.

Доказательство. Ясно, что $A = R_p[\mathbb{D}]$ — слабо градуированное кольцо, где $A_0 = R_p$, $A_i = R_p\,\mathbb{D}^i$, $B = F[\mathbb{D}]$. Так как PR_p — главный идеал, то $PR_p = xR_p$. Так как P — дифференциальный идеал, то $\mathbb{D}(y) \in xR_p$ и $\mathbb{Q}(y) \in xR_p$ для любого $y \in PR_p$. Таким образом, условие, что для любого необратимого $c \in A_0$ существует такой необратимый $d \in A_0$, что идеал, порожденный c, лежит в dA, выполнено.

Также очевидно, что для любого $c \in A_0$ $cA_i \subseteq A_i$. Проверим выполнение условия 1. Пусть $\{a, b\,\mathbb{D}^n\}$ и $\{a, c\,\mathbb{D}^m\}$ — взаимно простые. Так как R_p — локальное кольцо и PR_p — главный идеал, то взаимная простота элементов $\{a, b\,\mathbb{D}^n\}$ означает, что либо a, либо b обратим.

Аналогично, из второго следует, что либо a, либо c обратим. Если a обратим, то $\{a, b\mathbb{Q}^n(c)\} = R_p$. Если обратимы b и c, то $b\mathbb{Q}^n(c)$ обратим. Условие 2 следует из того, что для любого конечнопорожденного идеала в R_p существует наименьший главный, содержащий его. Заметим, что $I = PR_p[\mathbb{D}]$ — простой однородный идеал в A. Таким образом, из теоремы 2 следует, что элемент L разложим над F, когда L разложим над R_p. А из теоремы 1 — L неразложим над R_p.

Теорема 3. *Пусть R — коммутативная область целостности. Известно, что разложимость многочлена $D \in R[x]$ над R равносильна разложимости над полем частных F. Тогда на $A = R[x]$ выполнено условие 1 (т. е. из того, что $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ взаимно просты, следует, что $\{a, bc\}$ взаимно просты).*

Доказательство. Пусть существуют такие $a, b, c \in R$, что $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ взаимно простые, но $a = \tilde{a}e$, $bc = \tilde{a}d$, $\tilde{a}$ необратим. Будем считать, что $\tilde{a} = a$, тогда $bc = ad$. Рассмотрим $(1 + a^{-1}bx)(a + cx) = a + (b + c)x + dx^2 = L$. Допустим, что $L = (a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x)$ разложим над R. Так как $F[x]$ — кольцо с единственностью разложения на простые множители, то $1+a^{-1}bx = 1+a_0^{-1}a_1x$, $a+cx = a_0b_0+a_0b_1x$. То есть $ba_0 = aa_1$, $a = a_0b_0$, $c = a_0b_1$. Так как $\{a, c\}$ взаимно просты, то a_0 обратим, $\{a, b\}$ взаимно просты, $b = aa_1a_0^{-1} \Longrightarrow a$ обратим. Получили противоречие.

Следствие. *Пусть R — коммутативная область целостности. Для любого конечнопорожденного идеала в R существует наименьший главный идеал, содержащий его. (Выполнено условие 2 на $A = R[x]$.) Тогда эквивалентны условия:*

1) любой $L \in R[x]$, разложимый над F, разложим над R;

2) из того, что $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ взаимно просты, следует, что $\{a, bc\}$ взаимно просты (т. е. выполнено условие 1 на $A = R[x]$).

Литература

[1] Kovačič J. Eisenstein criterion for noncommutative polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 34. — № 1. — P. 25–29.

[2] Беркович Л. М. Аналог критерия Эйзенштейна для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Межвузовский сборник научных статей. — Куйбышев, 1988. — С. 20–27.

[3] Бавула В. В. О некоторых обобщениях критерия Эйзенштейна // Укр. мат. журн. — Т. 42. — № 7. — С. 983–985.

Статья поступила в редакцию в январе 1995 г.