З. Д. Ломакина, С. С. Рышков, Одномерные и двумерные грани полиэдра $\mu(5)$,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, том 151, 95–103

З.Д.Ломакина, С.С.Рышков

ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ ГРАНИ ПОЛИЭДРА $\mathcal{M}(5)$

В предлагаемой работе через $\mathcal{M}(n)$ обозначена полиэдральная поверхность, лежащая в пространстве коэффициентов квадратичных форм вида $f(\bar{X})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, точки которой отвечают положительно определенным квадратичным формам (ПКФ) с арифметическим минимумом, равным единице [4, 2, 5].

В работе найдены все одномерные и двумерные конечные грани полиэдра $\mathcal{M}(5)$ с целью применения их к исследованию квазисовершенных форм от пяти переменных и форм, минимизирующих дзета-функцию по Филдсу [7, 9]. Даны (§ 3) первые такие применения.

Основным методом работы является сведение на основе дуальности полиэдров $\Pi(n)$ и $\mathcal{M}(n)$ [4, 2] вопроса о гранях полиэдра $\mathcal{M}(n)$ к изученным в работе [3] граням совершенных граней полиэдра $\Pi(n)$.

В изложении мы предполагаем знакомство читателя с основами теории полиэдров $\Pi(n)$ и $\mathcal{M}(n)$, например, по статьям [6, 2, 5]. Всюду мы без дополнительных оговорок называем гранями полиэдра $\mathcal{M}(n)$ только конечные грани.

§ I. Одномерные грани.

Согласно исследованию Вороного [I], см.также [6, § I4, § I5], I5-мерный полиэдр $\Pi(5)$ имеет три и только три попарно неэквивалентных совершенных I4-мерных грани. Мы будем обозначать их через $\Pi_1(5)$, $\Pi_2(5)$, $\Pi_3(5)$. Грани $\Pi_1(5)$ и $\Pi_3(5)$ смежны каждая только с гранями, эквивалентными грани $\Pi_2(5)$. То есть каждая I3-мерная грань полиэдра $\Pi(5)$ эквивалентна одной из I3-мерных граней полиэдра $\Pi_2(5)$. Таким образом, в силу дуальности полиэдров $\Pi(n)$ и $\mathcal{M}(n)$, полиэдр $\mathcal{M}(5)$ имеет три и только три попарно неэквивалентных вершины, соответствующих граням $\Pi_1(5)$, $\Pi_2(5)$, $\Pi_3(5)$. Мы будем обозначать вершины, эквивалентные этим вершинам, римскими цифрами I, II, III. В силу той же дуальности каждое ребро и тем самым вообще каждая грань полиэдра $\mathcal{M}(5)$ содержит вершину II (класса эквивалентности II).

Грань $\Pi_2(5)$ имеет четыре и только четыре попарно неэквивалентных I3-мерных грани ("стенки") [I, 6], которым отвечают символы с дополнительными символами, изображенными на рисунке I (см. [6]). Соответственно с этим имеем четыре ребра (одномер-

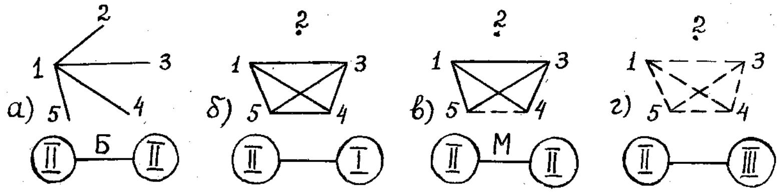

Рис.I

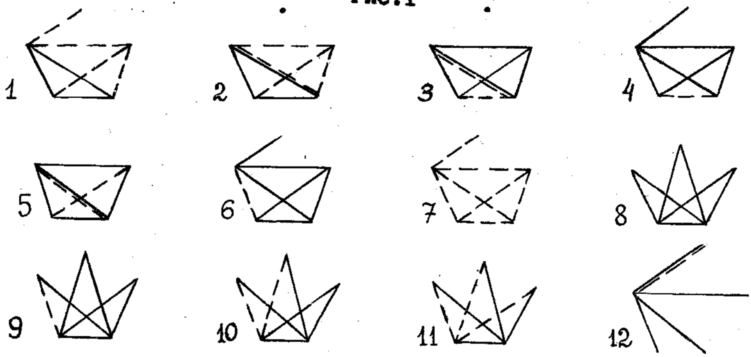

Рис.2

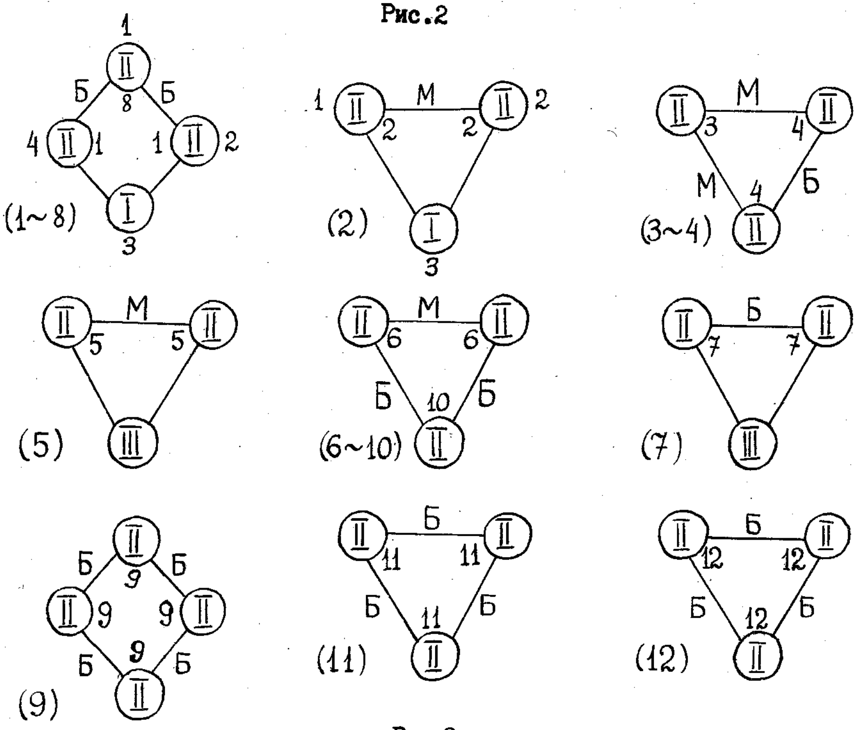

Рис.3

ных грани) полиэдра $\mu(5)$. На рисунке I под каждым из символов дана диаграмма соответствующего ребра (класса эквивалентности ребер), с указанием класса эквивалентности вершин. Обратим внимание, что имеется два неэквивалентных ребра, у которых обе вершины имеют класс эквивалентности П. Одно дуально симплициальной стенке грани $\Pi_2(5)$ и помечено на диаграмме буквой "М", другое дуально не симплициальной стенке и помечено буквой "Б".

Резюмируя сказанное, имеем теорему.

ТЕОРЕМА I. Полиэдр $\mu(5)$ имеет четыре и только четыре попарно неэквивалентных одномерных конечных грани. Эти грани описаны диаграммами рисунка I.

Сделаем несколько замечаний технического характера. Исходной гранью мы будем считать грань $\mathcal{L}_2^* \Pi_2(5)$(см. § I5 работы [6]), соответствующую форме $\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)$, записанной в выбранных в [6, § I5] переменных, то есть в "переменных второй грани". Вершины грани $\mathcal{L}_2^* \Pi_2(5)$ отвечают формам $(x_i \pm x_j)^2$, $i,j=1,2,3,4,5,\ i\neq j$. Символы а), б), в), г) рисунка I - это совокупности вершин грани $\mathcal{L}_2^* \Pi_2(5)$, которые не входят в соответствующую стенку. Прилегающая по соответствующей стенке грань, отличная от $\mathcal{L}_2^* \Pi_2(5)$, имеет своими вершинами вершины стенки (то есть совокупность $(x_i \pm x_j)^2$ без форм, отвечающих рассматриваемому символу) и еще несколько вершин. Эти последние вершины в соответствии с [6] мы перечисляем здесь для всех четырех случаев в точном соответствии с символами рисунка I.

а) $(-x_1+x_3+x_4+x_5)^2,\ (-x_1+x_2+x_4+x_5)^2, (-x_1+x_2+x_3+x_5)^2, (-x_1+x_2+x_3+x_4)^2;$

б) $(2x_2)^2$;

в) $(x_1+x_3-x_4-x_5)^2,\ (x_1+x_2-x_4-x_5)^2,\ (x_1-x_2-x_4-x_5)^2,$

$(x_2+x_3-x_4-x_5)^2,\ (-x_2+x_3-x_4-x_5)^2,\ (2x_2)^2$;

г) $(x_1+x_3-x_4-x_5)^2$.

В тех же переменных соответствующие этим вершинам ПКФ имеют вид [ж]:

[ж] Здесь и далее ПКФ от пяти переменных мы задаем строкой вида $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{55}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{45}\}$, для удобства ставя общий знаменатель коэффициентов перед скобкой.

а) $\frac{1}{4}\{4,2,2,2,2,I,I,I,I,0,0,0,0,0,0\}$,

б) $\frac{1}{4}\{3,I,3,3,3,0,I,I,I,0,0,0,I,I,I\}$,

в) $\frac{1}{4}\{3,I,3,3,3,0,I,I,I,0,0,0,I,I,-I\}$,

г) $\frac{1}{8}\{5,3,5,5,5,0,-I,-I,-I,0,0,0,-I,-I,-I\}$.

обычных переменных эти ПКФ записываются в виде

а′) $\frac{1}{2}\{2,4,2,2,2,I,I,I,I,2,2,2,I,I,I\}$,

б′) $\frac{1}{2}\{2,2,2,2,2,I,I,I,I,I,I,I,I,I,I\} = \varphi_0^{(5)}(\bar{X})$,

в′) $\frac{1}{2}\{2,2,2,2,2,I,I,I,I,I,I,I,I,I,0\}$,

г′) $\frac{1}{4}\{4,4,6,I,6,1,3,3,3,3,3,3,3,3,3\}$.

ТЕОРЕМА 2. Для каждого из ребер а) и в) рисунка I существует такой автоморфизм полиэдра $\mathcal{M}(5)$, который переводит это ребро в себя и меняет местами его концы. Для ребер б) и г) таких автоморфизмов полиэдра $\mathcal{M}(5)$ нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение теоремы очевидно, поскольку вершина П не эквивалентна ни вершине I, ни вершине Ш. Легко проверить, что преобразования переменных а) и в):

$$\text{а)}\quad \begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}(-2X_1' + X_2' + X_3' + X_4' + X_5') \\ X_2 &= \tfrac{1}{2}(\quad -X_2' + X_3' + X_4' + X_5') \\ X_3 &= \tfrac{1}{2}(\quad X_2' - X_3' + X_4' + X_5') \\ X_4 &= \tfrac{1}{2}(\quad X_2' + X_3' - X_4' + X_5') \\ X_5 &= \tfrac{1}{2}(\quad X_2' + X_3' + X_4' - X_5') \end{aligned} \qquad \text{в)}\quad \begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}(2X_1' - X_4' - X_5') \\ X_2 &= \tfrac{1}{2}(\quad X_4' - X_5') \\ X_3 &= \tfrac{1}{2}(\quad 2X_3' - X_4' - X_5') \\ X_4 &= \tfrac{1}{2}(\quad 2X_2' - X_4' - X_5') \\ X_5 &= \tfrac{1}{2}(\quad -2X_2' - X_4' - X_5') \end{aligned}$$

дают автоморфизмы ребер а) и в) соответственно.

§ 2. Двумерные грани.

При разыскании двумерных граней мы существенно пользуемся наличием у каждой грани полиэдра $\mathcal{M}(5)$ вершины П и, следовательно, тем, что каждая двумерная грань дуальна одной из 12-мерных граней полиэдра $\Pi_2(5)$. Такие грани мы разыскиваем, пользуясь таблицами 2 и 3 работы [3] . Поскольку таблицей 2 описаны грани симплициальных граней многогранника $\Pi_2(5)$, то искомыми гранями являются все грани, имеющие 13 вершин, то есть мы берем из таблицы 2 все символы, имеющие 13 ребер, то есть символы с $I_3=13,\ldots$ [3, стр.158] . Дополнения к этим символам (быть может, с перенумерацией вершин и перекраской ребер, исходящих из некоторых вершин), изображены на рис.2 в виде символов 1-7. Заметим, что в каждом из символов 1-7 рисунка 2 можно однозначно выделить по два символа, эквивалентных символам а) - г) рисунка 1. Последнее и показывает, пересечением каких 13-мерных граней является данная грань.

Из таблицы 3 работы [3] мы выбираем такие символы, в дополнении к которым однозначно выделяется пара символов, эквивалентных символу а) рисунка 1. То есть здесь мы выбираем такие и только такие символы, которые отвечают пересечению ровно двух 14-мерных граней. Нетрудно убедиться, что это символы 6,7,8 и 2. Их дополнения, быть может, с перенумерацией вершин и перекраской ребер, исходящих из некоторых вершин, изображены на рис.2 в виде символов 8-12.

Таким образом, мы получили набор граней полиэдра $\Pi(5)$, среди дуальных к которым находятся все попарно неэквивалентные двумерные грани полиэдра $\mathcal{M}(5)$. Теперь для перечисления и описания всех этих граней полиэдра $\mathcal{M}(5)$ достаточно вспомнить, что двумерную грань можно задать последовательностью ее ребер. Пользуясь техническими замечаниями § 1, преобразованиями, аналогичными преобразованиям теоремы 2, мы непосредственными вычислениями находим все двумерные грани полиэдра $\mathcal{M}(5)$. Резюме вычислений даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Полиэдр $\mathcal{M}(5)$ имеет 9 и только 9 попарно неэквивалентных конечных двумерных граней, из них две четырехугольных и семь треугольных. Диаграммы этих граней даны на рисунке 3.

Дадим пояснение к рисунку 3. Ребра граней обозначаются так же, как на рис.1. При каждой вершине класса П "внутри" диаграммы указан номер символа из рисунка 2, которому отвечает изображаемая грань, если при ее описании исходить именно из этой вершины класса П. Номера диаграмм, иногда двойные, соответствуют указанным номерам символов рисунка 2. Только на диаграммах ($1\sim 8$) и (2) рисунка 3 "снаружи" указано, как занумерованы вершины всех четырехугольных и треугольных граней.

Теперь мы перечислим вершины всех двумерных граней в "переменных второй грани". Во-первых, вершина 3 для граней ($3\sim 4$) и

(6 ~ I0), и вершина I для всех остальных граней – это ПКФ $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} x_i^2$.
Во-вторых, вершина 4 у ПКФ (I~8) – это ПКФ а), (из замечаний к теореме I), вершины 2 у граней (2), (5) и (6 ~ I0) и вершина I у грани (3 ~ 4)– это ПКФ в), вершина 3 у грани (7) – это ПКФ г), вершина 3 грани (2) – это ПКФ б). В третьих, вершина 4 грани (9) и вершины 3 граней (II) и (I2) совпадают с вершиной 4 грани (I ~ 8), которая приведена ниже. Приводим ПКФ для оставшихся вершин граней рисунка 3.

(I ~ 8)	2	$\frac{1}{4}\{2,4,2,2,2,1,0,0,0,1,1,1,0,0;0\}$
	3	$\frac{1}{4}\{4,4,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,0,0,0\}$
	4	$\frac{1}{4}\{4,2,2,2,2,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0\}$
(5)	3	$\frac{1}{8}\{5,3,5,5,5,0,-1,1,1,0,0,0,1,1,-1\}$
(6~I0)	I	$\frac{1}{4}\{2,4,2,2,2,1,0,0,0,-1,-1,1,0,0,0\}$
(7)	2	$\frac{1}{4}\{4,2,2,2,2,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0\}$
(9)	2	$\frac{1}{4}\{2,4,2,2,2,1,0,0,0,-1,0,0,0,0,0\}$
	3	$\frac{1}{4}\{4,4,2,2,2,2,1,1,1,-1,1,1,0,0,0\}$
(II)	2	$\frac{1}{4}\{2,4,2,2,2,1,0,0,0,-1,-1,-1,0,0,0\}$
(I2)	2	$\frac{1}{4}\{4,2,2,2,2,-1,1,1,1,0,0,0,0,0,0\}$

Имея ввиду сказанное выше о совпадениях ПКФ для вершин некоторых граней, приведем тот же список ПКФ в основных переменных.

(I ~ 8)	2	$\frac{1}{2}\{2,4,2,2,2,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$
	3	$\frac{1}{2}\{2,6,2,2,2,0,1,1,1,2,2,2,1,1,1\}$
	4	$\frac{1}{2}\{2,4,2,2,2,1,1,1,1,2,2,2,1,1,1\}$
(5)	3	$\frac{1}{4}\{4,4,6,4,4,1,3,2,2,3,2,2,3,3,2\}$

(6 ~ I0)	I	$\frac{1}{2}\{2,4,2,2,2,-1,0,0,1,2,2,1,1,1,1\}$
(7)	2	$\frac{1}{2}\{4,2,4,4,4,1,3,3,3,2,2,2,3,3,3\}$
(9)	2	$\frac{1}{2}\{2,4,2,2,2,-1,0,1,1,2,1,1,1,1,1\}$
	3	$\frac{1}{2}\{2,6,2,2,2,0,0,1,1,3,2,2,1,1,1\}$
(II)	2	$\frac{1}{2}\{2,4,2,2,2,-1,0,0,0,2,2,2,1,1,1\}$
(I2)	2	$\frac{1}{2}\{4,2,2,2,2,1,2,2,2,1,1,1,1,1,1\}$

ТЕОРЕМА 4. Для каждой из граней (2), (3 ~ 4), (5), (6 ~ I0), (7), (II), (I2), существует автоморфизм полиэдра $\mathcal{M}(5)$, переводящий ее в себя и меняющий местами вершины I и 2.

Для граней (II) и (I2) существуют автоморфизмы полиэдра $\mathcal{M}(5)$, переводящие их в себя и меняющие местами вершины I и 3 и 2 и 3. Для граней (2) (3 ~ 4), (5), (6 ~ I0), (7) таких дополнительных автоморфизмов нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последняя часть утверждения очевидно выводится из отсутствия соответствующей симметрии у диаграмм граней (2), (3 ~ 4), (5), (6 ~ I0), (7). Для доказательства первой части утверждения мы просто укажем соответствующие замены переменных (сперва для всех граней автоморфизмы, переставляющие вершины 1 и 2). Грани (2) и (5) – замена переменных в) из теоремы 2.

(3 ~ 4)
$$X_1 = X_1',\quad X_2 = X_2',\quad X_3 = X_5',\quad X_4 = -X_4',\quad X_5 = X_3'$$

(6 ~ I0)
$$X_1 = X_2',\quad X_2 = X_1',\quad X_3 = -X_3',\quad X_4 = -X_4',\quad X_5 = X_5'$$

(7)
$$\begin{aligned} X_1 &= -\tfrac{1}{2}(2X_1'+X_2'+X_3'+X_4'+X_5') \\ X_2 &= -\tfrac{1}{2}(X_2'-X_3'-X_4'-X_5') \\ X_3 &= -\tfrac{1}{2}(-X_2'+X_3'-X_4'-X_5') \\ X_4 &= -\tfrac{1}{2}(-X_2'-X_3'+X_4'-X_5') \\ X_5 &= -\tfrac{1}{2}(-X_2'-X_3'-X_4'+X_5') \end{aligned}$$

(II)
$$\begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}(-X_1' -X_3'-X_4'-X_5') \\ X_2 &= \tfrac{1}{2}(X_1'-2X_2'-X_3'-X_4'-X_5') \\ X_3 &= -\tfrac{1}{2}(X_1' +X_3'-X_4'-X_5') \end{aligned}$$

(I2)
$$\begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}(-2X_1'-X_2'+X_3'+X_4'+X_5) \\ X_2 &= -\tfrac{1}{2}(X_2'+X_3'+X_4'+X_5') \\ X_3 &= \tfrac{1}{2}(-X_2'-X_3'+X_4'+X_5') \end{aligned}$$

$$X_4=-\tfrac{1}{2}(X_1' \quad -X_3'+X_4'-X_5') \qquad X_4=\tfrac{1}{2}(\quad -X_2'+X_3'-X_4'+X_5')$$

$$X_5=-\tfrac{1}{2}(X_1' \quad -X_3'-X_4'+X_5') \qquad X_5=\tfrac{1}{2}(\quad -X_2'+X_3'+X_4'-X_5')$$

Дополнительные автоморфизмы граней (II) и (I2), переставляющие вершины I и 3, задаются заменой переменных а) из теоремы 2, а переставляющие вершины 2 и 3 – соответственно формулами

(II) $X_1=-X_2', \quad X_2=-X_1', \quad X_i=X_i' \ (i=3,4,5)$

(I2) $X_1=X_1', \quad X_2=-X_2', \quad X_i=X_i' \ (i=3,4,5)$

ТЕОРЕМА 5. Для каждой из граней (I $\sim$ 8) и (9) существует автоморфизм полиэдра $\mathcal{M}(5)$, переводящий ее в себя и меняющий местами вершины 2 и 4. Для грани 9 существует, кроме того, преобразование, меняющее местами вершины I и 3. Для грани (I $\sim$ 8) такого дополнительного преобразования нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последняя часть утверждения очевидно следует из отсутствия соответствующей симметрии диаграммы грани (I $\sim$ 8). Для доказательства первой части утверждения мы приведем соответствующие замены переменных.

$$(\mathrm{I}\sim 8)\ \begin{aligned} X_1&=X_2' \\ X_2&=X_1' \\ X_3&=X_3' \\ X_4&=X_4' \\ X_5&=X_5' \end{aligned} \qquad (9)\ \begin{aligned} X_1&=X_2' \\ X_2&=X_1' \\ X_3&=-X_3' \\ X_4&=X_4' \\ X_5&=X_5' \end{aligned} \qquad (9)\ \begin{aligned} X_1&=\tfrac{1}{2}(-X_1'+X_2'+2X_3'-X_4'-X_5') \\ X_2&=\tfrac{1}{2}(-X_1'+X_2'+2X_3'+X_4'+X_5') \\ X_3&=\tfrac{1}{2}(X_1'+X_2' \quad -X_4'-X_5') \\ X_4&=\tfrac{1}{2}(-X_1'+X_2' \quad +X_4'-X_5') \\ X_5&=\tfrac{1}{2}(-X_1'+X_2' \quad -X_4'+X_5') \end{aligned}$$

§ 3. <u>Некоторые следствия</u>.

ТЕОРЕМА 6. Следующие пять ПКФ квазисовершенны

I. $\frac{1}{4}\{4,6,4,4,4,1,2,2,2,3,3,3,2,2,2\}$

2. $\frac{1}{4}\{4,4,4,4,4,1,2,2,2,2,2,2,2,2,1\}$

3. $\frac{1}{4}\{4,8,4,4,4,0,1,2,2,4,3,3,2,2,2\}$

4. $\frac{1}{6}\{6,10,6,6,6,0,2,2,2,5,5,5,3,3,3\}$

5. $\frac{1}{6}\{8,8,6,6,6,2,4,4,4,4,4,4,3,3,3\}$

ТЕОРЕМА 7. ПКФ I-5 из теоремы 6 дают локальный минимум дзета-функции Эпштейна по Филдсу при всех значениях $s>1$ $(m>\frac{5}{2})$.

Действительно, формы I,2 являются центрами тяжести соответственно граней а), в) рисунка I, а формы 3,4,5 - центрами тяжестей соответственно граней (9), (II), (I2) рисунка 3. С другой стороны, целочисленные автоморфизмы полиэдра $\mu(5)$ суть его аффинные преобразования. Таким образом, любой целочисленный автоморфизм, переводящий в себя грань а), в), (9),(II) или (I2), переводит в себя и точку I,2,3,4 или 5. Из сказанного в теоремах 2,4 и 5 следует, что на гранях а), в) ,(9), (II), (I2) никаких других точек, инвариантных относительно всех автоморфизмов полиэдра $\mu(5)$, переводящих эти грани в себя, нет. Теоремы 6 и 7 теперь достаточно очевидно следуют из выпуклости функций $\det f$ и $\zeta(f/s)$ на гранях полиэдра $\mu(5)$.

Авторы благодарят М.Х.Умарова за большую помощь при оформлении этой работы.

Литература

1. В о р о н о й Г.Ф. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Собр.соч., т.2, Киев, 1952, с.171-238.
2. Д е л о н е Б.Н., Р ы ш к о в С.С. Экстремальные задачи теории положительных квадратичных форм. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1971, т.112, с.203-223.
3. Л о м а к и н а З.Д. Полиэдр Вороного $\Pi(n)$ при $n=5$ и максимальные конечные группы целочисленных 5х5 - матриц. - Тр. мат.ин-та АН СССР, 1980, т.152, с.138-161.
4. Р ы ш к о в С.С. Полиэдр $\mu(n)$ и некоторые экстремальные задачи геометрии чисел.-Докл.АН СССР, 1970, т. 194, № 3, с.514-517.
5. Р ы ш к о в С.С. К проблеме отыскания совершенных квадратичных форм от многих переменных. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.142, с.215-239.
6. Р ы ш к о в С.С., Б а р а н о в с к и й Е.П. Классические методы теории решетчатых упаковок.-Успехи мат.наук, 1979, т.34, вып.4, с.23-63.
7. Р ы ш к о в С.С., У м а р о в М.Х. О минимизации многомерной ζ -функции по Филдсу. Тезисы докладов 2-ой респ.конф. "Метод. и прикл.асп.систем авт.проект. и упр. в отр.нар.хоз.", Ташкент, 1985.
8. Ш т о г р и н М.И. Локально квазиплотнейшие решетчатые упаковки шаров. Докл.АН СССР, 1974, т.218, № 1, с.62-65.
9. F i l d s K.L., Locally minimal Epstein zeta-fonctions. - Mathematika, 1980, v.27, p.17-24.