

ЯВНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Лезнов А. Н., Федосеев И. А.

Найден явный вид гайзенберговских операторов двумерных моделей квантовой теории поля, описываемых системой уравнений $\square u_\alpha = g \exp(ku)_\alpha$, как функционалов асимптотических полей φ_α^{1n} , удовлетворяющих уравнениям $\square \varphi_\alpha^{1n} = 0$ и соответствующим перестановочным соотношениям. Показано, что при наличии конечномерной группы внутренних симметрий, когда k совпадает с матрицей Картана полупростой группы Ли, ряды теории возмущений для операторов $\exp(-u_\alpha)$ вырождаются в полиномы по константе связи g , степени которых связаны со строением фундаментальных представлений соответствующей группы.

1. В настоящей работе исследуется квантовый аналог обобщенной цепочки Тоды, которая описывается системой уравнений

$$(1) \quad \square u_\alpha = g \exp \left(\sum_{\beta=1}^r k_{\alpha\beta} u_\beta \right);$$

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial z^+ \partial z^-}; \quad z^\pm \equiv 1/2(t \pm x).$$

В работе [1] показано, что система (1) обладает конечномерной группой Ли внутренних симметрий, если $k_{\alpha\beta}$ совпадает с матрицей Картана полупростой группы Ли (обратное утверждение доказано в [2]). В этом случае классическая система полностью интегрируется [3], причем $\exp(-u_\alpha)$ оказываются полиномами по g . Другими словами, ряд классической теории возмущений по константе связи для $\exp(-u_\alpha)$ обрывается. Поскольку ряд теории возмущений можно рассматривать как каноническое преобразование, связывающее решения «возмущенной системы» (1) с решениями «свободной системы»

$$(2) \quad \square \varphi_\alpha = 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, r,$$

то мы фактически имеем здесь дело с преобразованием Бэклунда [4].

Мы знаем, что интегрируемость классической модели (1) обусловлена ее групповыми свойствами; это позволяет надеяться, что классические результаты можно перенести на соответствующую квантовую систему. Роль преобразования Бэклунда будет при этом играть половинная S -матрица $S_t \equiv S(t, -\infty)$. В работе авторов [5] квантовая задача решена для простейшего случая $r=1$ (уравнение Лиувилля). Решение было получено с помощью уравнения Янга — Фельдмана, которое представляет собой ин-

тегральную форму системы (1), явно учитывающую асимптотические условия. Переписанное в более удобных обозначениях, это решение имеет вид

$$(3) \quad e^{-u} = e^{-\varphi_{\text{in}}} \left[1 + \frac{2g}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2} e^{-i\hbar/2} \int_{-\infty}^{z^+} dz^{+'} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{z^-} dz^{-'} \exp(2\varphi_{\text{in}}(z^{+'}, z^{-'})) \right],$$

где φ_{in} — соответствующее асимптотическое поле. Таким образом, и в квантовой теории ряд для $\exp(-u)$ вырождается в полином по g . Заметим, что из физических соображений константа связи g должна быть положительной; мы, однако, не будем здесь фиксировать знак g , поскольку все дальнейшие вычисления не зависят от его выбора.

Отметим, что полученные в настоящей работе решения носят формальный характер. Физический (и математический) смысл полей ψ^\pm и операторов Φ^\pm (см. ниже) не вполне ясен. Для его прояснения желательно преобразовать решения к виду, допускающему непосредственную интерпретацию. Этот вопрос будет рассматриваться авторами в дальнейших публикациях. Известно, что в двумерной модели скалярного поля с нулевой массой имеют место внутренние трудности, связанные с невыполнением одной из аксиом Вайтмана. Ввиду этого необходима некоторая регуляризация; например, можно использовать ту же модель, отбирая при этом лишь решения, периодические по пространственной координате (с устремлением в конечном счете периода к бесконечности). В настоящей работе мы этих вопросов не касаемся, имея в виду лишь построение явного выражения для преобразования Бэклунда в виде половинной S -матрицы.

Квантово-полевые модели в двумерном пространстве методом обратной задачи исследовались в работах Фаддеева и др. [6]. Матрица рассеяния изучалась на аксиоматическом уровне в работе [7]. Все результаты были получены в предположении существования у рассматриваемых систем бесконечной серии интегралов движения. В настоящей работе используется традиционный аппарат квантовой теории поля. Полученные для системы (1) решения имеют методический интерес как пример двумерной модели, на котором может быть проверена согласованность основных аксиом квантовой теории поля. Кроме того, система (1) интересна тем, что непосредственно связана с калибровочными теориями в четырехмерном пространстве и в классическом пределе описывает сферически-симметричные монополи и инстантоны.

В следующем разделе приводятся необходимые сведения из теории свободных полей и теории возмущений. В п. 3–4 найден явный вид решений квантовой системы (1). В п. 5 проводится анализ структуры полученных решений и сравнение их с классическими результатами. Заключительные замечания и выводы сделаны в п. 6.

2. Системе (1) отвечает лагранжиан

$$(4) \quad \Lambda = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} w_\alpha k_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z^+} \frac{\partial u_\beta}{\partial z^-} - g \sum_\alpha w_\alpha \exp \left(\sum_\beta k_{\alpha\beta} u_\beta \right) = \Lambda_0 + \Lambda_{\text{вз}}$$

(все поля u_α считаем эрмитовыми). В лагранжевом подходе матрица $k_{\alpha\beta}$ уже не вполне произвольна (в отличие от (1)), но должна быть вещественной матрицей, симметризуемой с помощью диагональной матрицы w : $w_\alpha k_{\alpha\beta} = w_\beta k_{\beta\alpha}$. Величины u_α и $k_{\alpha\beta}$ можно считать безразмерными, g имеет размерность $[L^{-2}]$, а w_α — размерность $[\hbar]$.

Асимптотические поля $\varphi_\alpha^{\text{in}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} u_\alpha$ удовлетворяют системе (2), общее решение которой есть $\varphi_\alpha(z) = \varphi_\alpha^+(z^+) + \varphi_\alpha^-(z^-)$, φ_α^\pm — произвольные функции. Для установления перестановочных соотношений запишем гамильтониан полей Φ_{in} :

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} w_\alpha k_{\alpha\beta} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz^+ \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z^+} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^+} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz^- \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z^-} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^-} \right\}.$$

Каноническое квантование задается уравнением $i\hbar \partial \varphi_\alpha / \partial t = [\varphi_\alpha, H]$, откуда получаем

$$(5) \quad [\varphi_\alpha^\pm(z^\pm), \varphi_\beta^\pm(z^{\pm'})] = \frac{\hbar}{4i} (k^{-1})_{\alpha\beta} w_\beta^{-1} \varepsilon(z^\pm - z^{\pm'}),$$

$$[\varphi_\alpha^\pm(z^\pm), \varphi_\beta^\mp(z^{\mp'})] = 0,$$

где $\varepsilon(x)$ — обычная знаковая функция. Для дальнейшего удобно ввести поля

$$(6) \quad \psi_\alpha^\pm \equiv \sum_\beta k_{\alpha\beta} \varphi_\beta^\pm; \quad \varphi_\alpha^\pm \equiv \sum_\beta (k^{-1})_{\alpha\beta} \psi_\beta^\pm,$$

с перестановочными соотношениями

$$(7) \quad [\psi_\alpha^\pm(z^\pm), \psi_\beta^\pm(z^{\pm'})] = \frac{\hbar}{4i} \hat{k}_{\alpha\beta} \varepsilon(z^\pm - z^{\pm'}); \quad \hat{k}_{\alpha\beta} \equiv k_{\alpha\beta} w_\beta^{-1},$$

$$[\psi_\alpha^\pm(z^\pm), \varphi_\beta^\pm(z^{\pm'})] = \frac{\hbar}{4i} \frac{\delta_{\alpha\beta}}{w_\beta} \varepsilon(z^\pm - z^{\pm'}).$$

Отсюда по формуле Вейля находим важное соотношение

$$(8) \quad \exp(\psi_\alpha^\pm(z^\pm)) \exp(\psi_\beta^\pm(z^{\pm'})) = \exp\left(\frac{\hbar}{4i} \hat{k}_{\alpha\beta} \varepsilon(z^\pm - z^{\pm'})\right) \times \\ \times \exp(\psi_\beta^\pm(z^{\pm'})) \exp(\psi_\alpha^\pm(z^\pm)).$$

Нам понадобятся также «запаздывающие операторы»

$$(9) \quad \Phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^\pm(z^\pm) = \int_{-\infty}^{z^\pm} dz_1^\pm \exp(\psi_{\alpha_1}(z_1^\pm)) \times \\ \times \int_{-\infty}^{z_1^\pm} dz_2^\pm \exp(\psi_{\alpha_2}(z_2^\pm)) \times \dots \times \int_{-\infty}^{z_{m-1}^\pm} dz_m^\pm \exp(\psi_{\alpha_m}(z_m^\pm))$$

со следующими свойствами относительно эрмитова сопряжения:

$$(10) \quad [\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\pm]^\dagger = \exp\left\{\frac{i\hbar}{4} \sum_{i < j}^m \hat{k}_{\alpha_i \alpha_j}\right\} \Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^\pm.$$

Гайзенберговы поля строятся по асимптотическим следующим образом. Половинная S -матрица определяется формулой

$$S_i = T \exp \left\{ -\frac{ig}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V(t') \right\} = 1 + \frac{g}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt_1 V_1 + \\ + \left(\frac{g}{i\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 V_1 V_2 + \dots,$$

где

$$gV(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Lambda_{\text{вз}}(x, t); \quad V_i = V(t_i).$$

Для произвольной локальной функции гайзенберговских полей имеем $A(t, x) = S_i^{-1} A_{\text{in}}(t, x) S_i$; $A_{\text{in}} = A[\varphi_{\text{in}}]$. Известная техника дифференцирования по константе связи [8] дает

$$\frac{\delta^n A(t, x)}{\delta g^n} = \frac{1}{(i\hbar)^n} S_i^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n \theta(t-t_1) \dots \theta(t_{n-1}-t_n) \times \\ \times [A_{\text{in}}(t, x), V_1, \dots, V_n] S_i,$$

где $\theta(t)$ — обычная ступенчатая функция, а

$$(11) \quad [A, B, \dots, C] = [\dots [A, B], \dots], C].$$

Отсюда для n -го порядка теории возмущений получаем формулу Швингера [9]

$$(12) \quad A^{(n)}(t, x) = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n \theta(t-t_1) \dots \theta(t_{n-1}-t_n) \times \\ \times [A_{\text{in}}(t, x), V_1, \dots, V_n].$$

3. Перейдем теперь непосредственно к системе (1) с лагранжианом (4). Исходя из аналогии с классической теорией, выберем для исследования по теории возмущений величины $\exp(-u_\alpha)$. Обозначим

$$(13) \quad V_{ij} = V(z_i^+, z_j^-) = \sum_{\alpha} 2w_{\alpha} \exp(\psi_{\alpha}^+(z_i^+)) \exp(\psi_{\alpha}^-(z_j^-)).$$

С помощью формулы (8) получаем для V_{ij} следующие перестановочные соотношения:

$$(14) \quad [V_{ij}, V_{kl}] = \sum_{\alpha\beta} 4w_{\alpha} w_{\beta} \exp(\psi_{\alpha}^+(z_i^+)) \exp(\psi_{\alpha}^-(z_j^-)) \times \\ \times \exp(\psi_{\beta}^+(z_k^+)) \exp(\psi_{\beta}^-(z_l^-)) \left[1 - \exp \frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\alpha\beta}(\varepsilon(z_i^+ - z_k^+) + \right. \\ \left. + \varepsilon(z_j^- - z_l^-)) \right].$$

В частности,

$$(15) \quad [V_{ij}, V_{kl}] = 0 \quad \text{при} \quad (z_i^+ - z_k^+) (z_j^- - z_l^-) < 0.$$

В соответствии с формулой (12) в n -м порядке теории возмущений имеем ($dz_i \equiv dz_i^+ dz_i^-$)

$$(16) \quad (e^{-u\alpha})_{(n)} = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \dots dz_n \theta(t-t_1) \dots \theta(t_{n-1}-t_n) \times \\ \times [e^{-\varphi\alpha}, V_{11}, \dots, V_{nn}].$$

Выражение (16) должно иметь запаздывающий характер, т. е. должно сводиться к операторам типа (9). Чтобы выявить это обстоятельство, будем рассуждать следующим образом. Прежде всего отметим, что вследствие соотношений (8) и (15) подынтегральное выражение отлично от нуля лишь при $z^+ > z_i^+$, $z^- > z_i^-$ ($i=1, 2, \dots, n$), т. е. в него фактически входит множитель

$$(17) \quad \prod_{i=1}^n \theta(z - z_i); \quad \theta(z - z') \equiv \theta(z^+ - z'^+) \theta(z^- - z'^-).$$

Далее введем в подынтегральное выражение множители

$$\sum_{P(i_1 \dots i_n)} \prod_{k=2}^n \theta(z_{i_{k-1}}^+ - z_{i_k}^+), \quad \sum_{P(i_1 \dots i_n)} \prod_{k=2}^n \theta(z_{i_{k-1}}^- - z_{i_k}^-)$$

(сумма по всем подстановкам), каждый из которых тождественно равен единице, поскольку является разбиением полной области интегрирования (с учетом (17)) на непересекающиеся подобласти. В результате (16) превратится в сумму $n! \times n!$ членов, в каждом из которых переобозначим номера переменных интегрирования (по отдельности z_i^+ и z_i^-) таким образом, чтобы последовательность возрастающих аргументов кратного интеграла имела нормальный порядок $z^{\pm} > z_1^{\pm} > z_2^{\pm} > z_n^{\pm}$. Тогда подынтегральное выражение примет вид

$$(18) \quad \prod_{k=1}^n \theta(z_{k-1} - z_k) \sum_{P(i_1 \dots i_n)} \sum_{P'(j_1 \dots j_n)} [e^{-\varphi\alpha}, V_{i_1 j_1}, \dots, V_{i_n j_n}] \times \\ \times \prod_{s=2}^n \theta(z_{i_{s-1}}^+ + z_{j_{s-1}}^- - z_{i_s}^+ - z_{j_s}^-)$$

(сумма по всем $n! \times n!$ перестановкам индексов). Заметим, что если при $l < m$ имеет место $i_l > i_m$ и $j_l > j_m$ (при этом в кратном коммутаторе $V_{i_l j_l}$ стоит левее $V_{i_m j_m}$), то «временные» θ -функции (второе произведение в (18)) автоматически обращают такой член в нуль. Далее, если $(i_l - i_m)(j_l - j_m) < 0$, то при данной расстановке аргументов (которая фиксируется первым произведением θ -функций в (18)) в силу соотношения (15) $[V_{i_l j_l}, V_{i_m j_m}] = 0$; если в кратном коммутаторе такие V стоят рядом, то вследствие тождества Якоби их можно переставить. Таким образом, для V_{1k} имеются две воз-

возможности: для всех $V_{i_j j_l}$, стоящих левее него в кратном коммутаторе, $j_l < k$, и тогда V_{1k} можно переместить на первое место (после $\exp(-\varphi_\alpha)$), или левее него стоит какой-либо $V_{i_j j_l}$ с $j_l > k$, и тогда этот член обращается в нуль, а потому V_{1k} формально можно также переставить на первое место. Точно так же V_{2m} можно переместить на второе место (вслед за V_{1k}) и т. д. В результате сумма (18) разобьется на $n!$ операторных структур

$$[e^{-\varphi_\alpha}, V_{1k_1}, \dots, V_{n k_n}] \prod_{s=1}^n \theta(z_{s-1} - z_s).$$

(по числу перестановок $(k_1 \dots k_n)$), коэффициент при каждой из которых сводится к

$$(19) \quad \sum_{P(i_1 \dots i_n)} \prod_{m=2}^n \theta(z_{m-1}^+ + z_{i_{m-1}}^- - z_m^+ - z_{i_m}^-),$$

т. е. обращается в единицу, поскольку (19) является разбиением области (17) на непересекающиеся подобласти. Итак, мы преобразовали (16) в

$$(20) \quad (e^{-u_\alpha})_{(n)} = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \dots dz_n \theta(z - z_1) \dots \theta(z_{n-1} - z_n) \times \\ \times \sum_{P(k_1 \dots k_n)} [e^{-\varphi_\alpha}, V_{1k_1}, \dots, V_{n k_n}].$$

Несложные, но несколько громоздкие расчеты, которые привели к формуле (20), иллюстрируются в приложении на примере членов 2-го и 3-го порядков.

4. Дальнейшие преобразования будем проводить, используя явный вид V_{ij} (13). С помощью соотношений (8), (14) вычисляем кратный коммутатор

$$(21) \quad [e^{-\varphi_\alpha}, V_{1k_1}, \dots, V_{n k_n}] = \sum_{\beta_1 \dots \beta_n} e^{-\varphi_\alpha} \exp(\psi_{\beta_1}^+(z_1^+)) \dots \\ \dots \exp(\psi_{\beta_n}^+(z_n^+)) \exp(\psi_{\beta_1}^-(z_{k_1}^-)) \dots \exp(\psi_{\beta_n}^-(z_{k_n}^-)) \times \\ \times \prod_{s=1}^n 2w_s \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{4w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} (\varepsilon(z^+ - z_s^+) + \varepsilon(z^- - z_{k_s}^-)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i\hbar}{4} \sum_{l=1}^{s-1} \hat{k}_{\beta_l \beta_s} (\varepsilon(z_l^+ - z_s^+) + \varepsilon(z_{k_l}^- - z_{k_s}^-)) \right] \right\}.$$

Расположим теперь в этом выражении множители $\exp(\psi_{\beta_l}^-(z_{k_l}^-))$ в нормальном порядке следования аргументов: $z_1^-, z_2^-, \dots, z_n^-$. Формула (8) дает

$$\exp(\psi_{\beta_1}^-(z_{k_1}^-)) \dots \exp(\psi_{\beta_n}^-(z_{k_n}^-)) = \exp\{(i/4)f_P\} \exp(\psi_{\beta_1}^-(z_1^-)) \dots \\ \dots \exp(\psi_{\beta_n}^-(z_n^-)),$$

причем подстановка $(\beta_1 \dots \beta_n) \rightarrow (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_n})$ — обратная к подстановке $(z_1 \dots z_n) \rightarrow (z_{k_1} \dots z_{k_n})$, а

$$(22) \quad f_P = \sum_{l < m}^n \hat{k}_{\beta_{j_l} \beta_{j_m}} \theta(j_l - j_m),$$

где суммирование фактически идет по всем $(\beta_a \beta_b)$, которые в подстановке $(\beta_1 \dots \beta_n) \rightarrow (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_n})$ сменили свой порядок на обратный. Суммирование в (20) по подстановкам аргументов можно теперь заменить суммированием по подстановкам индексов ψ -функций. Кроме того, все ϵ -функции в (21) с учетом θ -функций из (20) примут в каждом из слагаемых определенные числовые значения, зависящие от вида подстановки. Вследствие этого зависимость от z_i остается лишь в аргументах ψ -функций, так что кратные интегралы сводятся к операторам вида (9). В результате имеем

$$(23) \quad (e^{-u\alpha})_{(n)} = e^{-\varphi\alpha} \frac{1}{(i\hbar)^n} \sum_{\beta_1 \dots \beta_n} \sum_{P(j_1 \dots j_n)} \exp\left(\frac{i\hbar}{4} f_P\right) \times \\ \times \Phi_{\beta_1 \dots \beta_n}^+ \Phi_{\beta_{j_1} \dots \beta_{j_n}}^- \prod_{s=1}^n 2w_s \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} + \frac{i\hbar}{2} \sum_{l=1}^{s-1} \Delta_{\beta_l \beta_s}^{(P)}\right] \right\},$$

где

$$(24) \quad \Delta_{\beta_l \beta_s}^{(P)} = \hat{k}_{\beta_l \beta_s} \theta(j_s - j_l),$$

что отлично от нуля (при $l < s$), только если в подстановке $(\beta_1 \dots \beta_n) \rightarrow (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_n})$ индексы β_s и β_l не сменили свой порядок (β_l стоит левее β_s). Суммирование в (23) ведется по всем подстановкам индексов $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ и затем по всем значениям индексов β_i от 1 до r . Для удобства будем называть $\exp\{(i\hbar/4)f_P\}$ фазой соответствующего слагаемого, а множители из $\prod_{s=1}^n$ — множителями, соответствующими индексам β_s .

Формула (23) допускает дальнейшее упрощение. Прежде всего заметим, что множитель, соответствующий β_1 в каждом слагаемом, есть

$$1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_1}\right) = \delta_{\alpha\beta_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\right) \right],$$

т. е. первый индекс Φ^+ всегда равен α . Рассмотрим отдельно слагаемые, соответствующие подстановкам, не затрагивающим β_1 , т. е. такие, где первый индекс Φ^- также равен α . Структура этих членов существенно зависит от значений $\Delta^{(P)}$. Классифицируем их по количеству m индексов β_s ($s=2, 3, \dots, n$), для которых

$$(25) \quad \sum_{l=2}^{s-1} \Delta_{\beta_l \beta_s}^{(P)} = 0.$$

Во всяком случае $m \neq 0$, поскольку (25) всегда выполнено для β_2 . При $m=n-1$ имеется, очевидно, один такой член; он соответствует подстановке

$(\beta_2 \dots \beta_n) \rightarrow (\beta_n \dots \beta_2)$. При $m=n-2$ такие члены соответствуют подстановкам вида $(\beta_2 \beta_3 \dots \beta_{n-1} \beta_n) \rightarrow (\beta_n \dots \beta_{k+1} \beta_{k-1} \dots \beta_3 \beta_2)$, где все индексы, кроме какого-либо β_k , расставлены в обратном порядке, а β_k поставлен на любое место правее β_{k-1} (это следует из определения (24)). Всего имеется $(n-1)(n-2)/2$ таких подстановок. Вообще, при произвольном m в соответствующей подстановке все индексы, кроме каких-либо $\beta_{k_1}, \dots, \beta_{k_{n-m-1}}$ расставлены в обратном порядке, а β_{k_i} поставлены на любое место правее β_{k_i-1} ; всего таких подстановок

$$a_m^{(n)} = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{n-m-1}} \prod_{l=1}^{n-m-1} k_l.$$

В частности, $a_{n-1}^{(n)}=1$; $a_{n-2}^{(n)}=1/2(n-1)(n-2)$; $a_{n-3}^{(n)}=1/24(n-1)(n-2)(n-3) \times (3n-4)$; ...; $a_1^{(n)}=(n-2)!$. Последнее равенство (для $a_1^{(n)}$) определяется числом подстановок, не затрагивающих β_1 и β_2 . Поскольку в общей сложности должны получаться все подстановки $(\beta_2 \dots \beta_n)$, то $\sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(n)} = (n-1)!$.

Отметим также, что

$$(26) \quad \sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(n)} 2^m = n!.$$

Покажем теперь, что все остальные слагаемые (которые соответствуют подстановкам, затрагивающим β_1) могут быть сгруппированы с вышечисленными. Действительно, рассмотрим слагаемое с $\Phi_{\alpha\beta_{i_2} \dots \beta_s \dots \beta_{i_n}}^-$, для которого выполняется (25), т. е. множитель, соответствующий β_s , есть

$$(27) \quad 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} + \frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\beta_s} \right].$$

Выделим еще слагаемое с $\Phi_{\beta_s \beta_{i_2} \dots \alpha \dots \beta_{i_n}}^-$, в котором α и β_s поменялись местами. Множитель для β_s в этом слагаемом равен

$$1 - \exp \left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} \right) = \delta_{\alpha\beta_s} \left[1 - \exp \left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \right) \right],$$

а множитель для остальных индексов отличается от множителей первого слагаемого заменой $\hat{k}_{\alpha\beta_l} \rightarrow \hat{k}_{\beta_s \beta_l}$, что не играет роли из-за наличия $\delta_{\alpha\beta_s}$; кроме того, его фаза отличается от фазы первого слагаемого на $\exp \left(\frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\alpha\beta_s} \right)$. Наличие $\delta_{\alpha\beta_s}$ позволяет также формально записать во вто-

ром слагаемом $\Phi_{\alpha\beta_{i_2} \dots \beta_s \dots \beta_{i_n}}^-$ вместо $\Phi_{\beta_s \beta_{i_2} \dots \alpha \dots \beta_{i_n}}^-$. Используя тож-

дество

$$(28) \quad \left[1 - \exp \left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} + \frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\beta_s} \right) \right] + \exp \left(\frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\alpha\beta_s} \right) \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} \right) \right] = A_{\alpha\beta_s}^{(P)} \left[1 - \exp \left(-\frac{i\hbar}{w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} + \frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\beta_s} \right) \right]$$

где

$$(29) \quad A_{\alpha\beta_s}^{(P)} = \left(\exp \left\{ \frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\alpha\beta_s} \right\} + 1 \right) / \\ / \left(\exp \left\{ -\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} + \frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\alpha\beta_s} \right\} + 1 \right),$$

можно теперь объединить оба слагаемых в одно, просто заменяя в первом слагаемом в множителе (27) $\delta_{\alpha\beta_s} \rightarrow 2\delta_{\alpha\beta_s}$ и добавляя множитель $A_{\alpha\beta_s}^{(P)}$. Заметим, что если $k_{\alpha\beta}$ — матрица Картана, то $A_{\alpha\beta_s} = 1$ при $\alpha \neq \beta_s$, а при $\alpha = \beta_s$ сам множитель (28) обращается в нуль, так что $A_{\alpha\beta_s}$ можно положить тождественно равным единице.

Пусть теперь в слагаемом, содержащем $\Phi_{\alpha\beta_2 \dots \beta_s \dots \beta_l \dots \beta_{i_n}}^-$, условие (25) выполнено для двух индексов β_s и β_l . Аналогичным образом можно показать, что с этим слагаемым объединяются еще три: $\Phi_{\beta_s \beta_{i_2} \dots \alpha \dots \beta_l \dots \beta_{i_n}}^-$, $\Phi_{\beta_l \beta_{i_2} \dots \beta_s \dots \alpha \dots \beta_{i_n}}^-$ и $\Phi_{\beta_s \beta_{i_2} \dots \beta_l \dots \alpha \dots \beta_{i_n}}^-$ (в первом из них переставлены α и β_s , во втором α и β_l , а в третьем — сначала α и β_s , затем α и β_l (считая, что β_s стояло левее β_l)). Объединение сводится к тому, что в исходном слагаемом в множителях, соответствующих β_s и β_l , заменяется $\delta_{\alpha\beta_s} \rightarrow 2\delta_{\alpha\beta_s}$, $\delta_{\alpha\beta_l} \rightarrow 2\delta_{\alpha\beta_l}$ и, кроме того, добавляется множитель $A_{\alpha\beta_s} A_{\alpha\beta_l}$. По индукции нетрудно установить, что при наличии в слагаемом с $\Phi_{\alpha \dots}^-$ m множителей вида (27) с ним объединяется еще $(2^m - 1)$ членов. Заметим, что все использованные в вышеописанной редукции слагаемые по построению соответствуют различным подстановкам $(\beta_1 \dots \beta_n) \rightarrow (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_n})$; в силу соотношения (26), мы исчерпали таким образом все $n!$ подстановок, содержащихся в (23). Итак, окончательно получаем

$$(30) \quad (e^{-v_\alpha})_{(n)} = e^{-v_\alpha} \frac{1}{(i\hbar)^n} 2w_\alpha \left(1 - \exp \left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \right) \right) \times \\ \times \sum_{\beta_2 \dots \beta_n} \sum_{P(j_2 \dots j_n)} \exp \left\{ \frac{i\hbar}{4} f_P \right\} \Phi_{\alpha\beta_2 \dots \beta_n}^+ \times \\ \times \Phi_{\alpha\beta_{j_2} \dots \beta_{j_n}}^- \prod_{s=2}^n 2w_{\beta_s} A_{\alpha\beta_s}^{(P)} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta_s} (1 + \delta_{\beta_s}^{(P)}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\beta_s} + \frac{i\hbar}{2} \sum_{l=2}^{s-1} \Delta_{\beta_l \beta_s}^{(P)} \right] \right\},$$

где f_P дается формулой (22), $\Delta_{\beta_l \beta_s}^{(P)}$ — формулой (24);

$$\delta_{\beta_s}^{(P)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{l=2}^{s-1} \Delta_{\beta_l \beta_s}^{(P)} = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$A_{\alpha\beta}^{(P)}$ определяется формулой (29), если $\delta_{\beta_s}^{(P)}=1$, и $A_{\alpha\beta_s}^{(P)}=1$ в остальных случаях.

Запутанные с виду преобразования, которые привели от (20) к (30), выглядят довольно просто для членов 2-го и 3-го порядков; соответствующие расчеты даны в приложении.

Приведем здесь для иллюстрации конкретные формулы для тех случаев, когда $k_{\alpha\beta}$ является матрицей Картана простой группы ранга 1 или 2 ($k_{\alpha\beta}$ берутся в форме [10], $w_\alpha=w/(h_\alpha, h_\alpha)$).

$$A_1(SU(2))$$

$$e^{-u}=e^{-\varphi} \left[1 + \frac{2gw}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/2w} \Phi^+ \Phi^- \right]; \quad \varphi = \frac{1}{2} \psi,$$

что совпадает с формулой (3).

$$A_2(SU(3))$$

$$e^{-u_1}=e^{-\varphi_1} \left[1 + \frac{2gw}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/2w} \Phi_1^+ \Phi_1^- + \right. \\ \left. + \frac{4g^2w^2}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/w} \Phi_{12}^+ \Phi_{12}^- \right],$$

$$e^{-u_2}=e^{-\varphi_2} \left[1 + \frac{2gw}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/2w} \Phi_2^+ \Phi_2^- + \right. \\ \left. + \frac{4g^2w^2}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/w} \Phi_{21}^+ \Phi_{21}^- \right];$$

$$\varphi_1 = \frac{2}{3} \psi_1 + \frac{1}{3} \psi_2, \quad \varphi_2 = \frac{1}{3} \psi_1 + \frac{2}{3} \psi_2.$$

$$B_2(SO(5))$$

$$e^{-u_1}=e^{-\varphi_1} \left[1 + \frac{2gw}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/2w} \Phi_1^+ \Phi_1^- + \right. \\ \left. + \frac{8g^2w^2}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/w} \Phi_{12}^+ \Phi_{12}^- + \right. \\ \left. + \frac{32g^3w^3}{\hbar^3} \sin^3 \frac{\hbar}{2w} e^{-3i\hbar/2w} \Phi_{122}^+ \Phi_{122}^- + \frac{64g^4w^4}{\hbar^4} \sin^4 \frac{\hbar}{2w} e^{-3i\hbar/2w} \Phi_{1221}^+ \Phi_{1221}^- \right],$$

$$e^{-u_2}=e^{-\varphi_2} \left[1 + \frac{4gw}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{4w} e^{-i\hbar/4w} \Phi_2^+ \Phi_2^- + \right. \\ \left. + \frac{8g^2w^2}{\hbar^2} \sin \frac{\hbar}{4w} \sin \frac{\hbar}{2w} e^{-3i\hbar/4w} \Phi_{21}^+ \Phi_{21}^- + \right. \\ \left. + \frac{32g^3w^3}{\hbar^3} \sin^2 \frac{\hbar}{4w} \sin \frac{\hbar}{2w} e^{-i\hbar/w} \Phi_{212}^+ \Phi_{212}^- \right],$$

$$\varphi_1 = \psi_1 + \psi_2, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \psi_1 + \psi_2.$$

Формула для $C_2(\text{Sp}(4))$ получается из B_2 заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$.

5. В приведенных выше примерах ряд теории возмущений обрывается. Для общего исследования структуры (30) перейдем к классическому пре-

делу ($\hbar \rightarrow 0$):

$$(31) \quad (e^{-u_\alpha})_{(n)} = e^{-\varphi_\alpha} \sum_{\beta_2 \dots \beta_n} \sum_{P(j_2 \dots j_n)} \Phi_{\alpha\beta_2 \dots \beta_n}^+ \times \\ \times \Phi_{\alpha\beta_{j_2} \dots \beta_{j_n}}^- \prod_{s=2}^n \left[\delta_{\alpha\beta_s} (1 + \delta_{\beta_s}^{(P)}) - k_{\alpha\beta_s} - \sum_{l=2}^{s-1} \Delta_{\beta_l \beta_s}^{(P)} \right].$$

Сравним это с классическим решением в форме [3]:

$$(32) \quad e^{-u_\alpha} = e^{-\varphi_\alpha \xi^{(1\alpha)}} [(M^+)^{-1} M^-],$$

где $\xi^{(1\alpha)}(g) = \langle \alpha | T(g) | \alpha \rangle$ — старший вектор α -го фундаментального представления группы. Операторы

$$M^\pm(z^\pm) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1^\pm \dots dz_n^\pm \theta(z^\pm - z_1^\pm) \dots \theta(z_{n-1}^\pm - z_n^\pm) L_n^\pm \dots L_1^\pm$$

удовлетворяют уравнению $(M^\pm)^{-1} \partial M^\pm / \partial z^\pm = L^\pm(z^\pm)$, где

$$L_n^\pm \equiv L^\pm(z_n^\pm) \equiv \pm \sum_{\alpha=1}^r \exp(\psi_{\alpha^\pm}(z_n^\pm)) X_{\pm\alpha},$$

$X_{\pm\alpha}$ — корневые векторы, соответствующие простым корням. Выражение (32) можно разложить в ряд теории возмущений. Используя перестановочные соотношения

$$(33) \quad [H_\alpha, H_\beta] = 0, \quad [H_\alpha, X_{\pm\beta}] = \pm k_{\beta\alpha} X_{\pm\beta}, \quad [X_\alpha, X_{-\beta}] = \delta_{\alpha\beta} H_\beta$$

(H_α дуальны простым корням), а также определение старшего вектора фундаментального представления: $H_\beta |\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta} |\alpha\rangle$, $X_{+\beta} |\alpha\rangle = 0$, $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$, замечаем прежде всего, что при вычислении матричных элементов $(M^+)^{-1} M^-$ останутся лишь члены, содержащие равное количество положительных и отрицательных корневых векторов. Для члена первого порядка с учетом (33) имеем $\langle \alpha | X_{+\beta} X_{-\gamma} | \alpha \rangle = \langle \alpha | [X_{+\beta}, X_{-\gamma}] | \alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma}$, так что $\xi_{(1)}^{(1\alpha)} = \Phi_\alpha^+ \Phi_\alpha^-$ (обозначения здесь и ниже те же, что и в (9), отличие лишь в том, что поля ψ — коммутирующие). Во втором порядке точно так же с помощью перестановочных соотношений (32) можно пронести операторы $X_{+\beta}$, $X_{+\gamma}$ в $\langle \alpha | X_{+\beta} X_{+\gamma} X_{-\mu} X_{-\nu} | \alpha \rangle$ вправо, получая

$$\xi_{(2)}^{(1\alpha)} = \sum_{\beta=1}^r (2\delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha\beta}) \Phi_{\alpha\beta}^+ \Phi_{\alpha\beta}^-.$$

Вычисления в высших порядках проводятся аналогично и не составляют трудностей. Общая формула совпадает с (31). В той же форме (31) решение получается и для любого (классического) лагранжиана с произвольной симметризуемой матрицей $k_{\alpha\beta}$. Однако ряд обрывается тогда и только тогда [1, 2], когда $k_{\alpha\beta}$ является матрицей Картана. Заметим, что множители в (31) с точностью до коэффициента совпадают с показателями экспонент в множителях (30). Отсюда следует, что если в каком-либо порядке для каждого члена суммы (31) один из множителей обращается в нуль, то то же самое имеет место и для суммы (30). Ясно, что тогда

и любой более высокий порядок обращается в нуль, поскольку среди его множителей содержатся все множители низших порядков. Таким образом, приходим к следующему результату: ряд теории возмущений по константе связи для квантовой системы с лагранжианом (4) обрывается, т. е. $\exp(-u_\alpha)$ являются полиномами по g .

6. Основным результатом настоящей работы является формула (30), которая дает явное выражение для гайзенбергова поля с лагранжианом (4). Как уже отмечалось выше, истинной причиной возникновения конечных сумм в тех случаях, когда $k_{\alpha\beta}$ — матрица Картана, является наличие конечномерной группы внутренних симметрий. Нам не удалось пока проследить эту связь непосредственно; мы использовали прямые методы квантовой теории поля, и о наличии группы можно догадываться лишь по сходимости рядов. Интересно было бы явно указать эту связь, сформулировав критерий сходимости непосредственно на языке S -матрицы. Полезно было бы также найти критерий, основанный на инвариантных групповых соотношениях, позволяющий отыскивать те функции полей, для которых ряды сходятся (выбор $\exp(-u_\alpha)$ — в известной мере счастливая случайность, хотя он и подсказан классической теорией). Такой подход позволил бы перенести разработанные методы на пространства больших размерностей (в первую очередь, на четырехмерное) и поставить задачу нахождения лагранжианов, приводящих к сходящимся рядам теории возмущений (полиномам).

В данной работе не рассматривался вопрос о корпускулярной интерпретации экспоненциальной модели. Этот вопрос существенно связан с правильным определением вакуумного состояния, которое при наличии группы внутренней симметрии становится далеко не тривиальным.

Подчеркнем здесь еще интересное с математической точки зрения обстоятельство, что требование обрыва ряда теории возмущений приводит к «квантованию» матрицы $k_{\alpha\beta}$, входящей в уравнение (1), и дает все известные системы простых корней для полупростых групп Ли.

В заключение отметим, что наличие преобразования Бэклунда, связывающего решения уравнения типа Лиувилля со свободными полями, не случайно, но также находит объяснение на языке теории групп. Действительно, представление типа Лакса для уравнения Лиувилля обусловлено группой $SL(2)$, в то время как уравнение д'Аламбера инвариантно относительно группы движений двумерной плоскости, которая получается из $SL(2)$ операцией «contraction». Вследствие этого существует соответствующее непрерывное преобразование — преобразование Бэклунда.

Авторы благодарны Б. А. Арбузову, А. А. Кириллову, Д. А. Киржницу, Ю. И. Манину, В. И. Манько, М. А. Мествиришвили, В. Д. Озрину, М. В. Савельеву, В. И. Смирнову, О. А. Хрусталеву и А. Б. Шабату за обсуждение результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для иллюстрации общих доказательств, проведенных в основном тексте работы, вычислим по формуле (16) первые порядки теории возмущений.

В нулевом порядке очевидно, что

$$(П.1) \quad (e^{-u_\alpha})_{(0)} = e^{-\varphi_\alpha}.$$

Далее, в первом порядке

$$(e^{-u_\alpha})_{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \theta(t-t_1) [e^{-\varphi_\alpha}, V(z_1^+, z_1^-)].$$

С помощью (8) получаем

$$[e^{-\varphi_\alpha(z)}, V(z_1^+, z_1^-)] = e^{-\varphi_\alpha(z)} \sum_{\beta} e^{\psi_\beta(z_1)} 2w_\beta \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{4w_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon(z-z_1) \right] \right\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\theta(t-t') (1-\lambda^\varepsilon(z-z')) = \theta(z-z') (1-\lambda^2),$$

где $\varepsilon(z-z') \equiv \varepsilon(z^+ - z'^+) + \varepsilon(z^- - z'^-)$; $\theta(z-z') \equiv \theta(z^+ - z'^+) \theta(z^- - z'^-)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \theta(t-t_1) [e^{-\varphi_\alpha(z)}, V_{11}] &= \\ &= \theta(z-z_1) e^{-\varphi_\alpha(z)} \sum_{\beta} e^{\psi_\beta(z_1)} 2w_\beta [1 - \exp(-i\hbar \delta_{\alpha\beta} / 2w_\alpha)]. \end{aligned}$$

Теперь суммирование и интегрирование проводятся элементарно, и

$$(П.2) \quad (e^{-u_\alpha})_{(1)} = e^{-\varphi_\alpha} \frac{2w_\alpha}{i\hbar} \left[1 - \exp \left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \right) \right] \Phi_\alpha^+ \Phi_\alpha^-.$$

Перейдем ко второму порядку:

$$(e^{-u_\alpha(z)})_{(2)} = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 \theta(t-t_1) \theta(t_1-t_2) [e^{-\varphi_\alpha(z)}, V_{11}, V_{22}].$$

Введем в подынтегральное выражение множитель $1 = [\theta(z_1^+ - z_2^+) + \theta(z_2^+ - z_1^+)] \cdot [\theta(z_1^- - z_2^-) + \theta(z_2^- - z_1^-)]$. Произведение $\theta(z_2^+ - z_1^+) \theta(z_2^- - z_1^-)$ выпадает из-за наличия $\theta(t_1 - t_2)$. Произведение $\theta(z_1^+ - z_2^+) \theta(z_1^- - z_2^-)$ дает слагаемое

$$(П.3) \quad \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 \theta(z-z_1) \theta(z_1-z_2) [e^{-\varphi_\alpha(z)}, V_{11}, V_{22}].$$

В слагаемом же, содержащем произведение $\theta(z_1^+ - z_2^+) \theta(z_2^- - z_1^-)$, произведем переобозначение переменных $z_1^- \leftrightarrow z_2^-$, а в слагаемом, содержащем $\theta(z_2^+ - z_1^+) \theta(z_1^- - z_2^-)$, — переобозначение $z_1^+ \leftrightarrow z_2^+$:

$$(П.4) \quad \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 \theta(z-z_1) \theta(z_1-z_2) \theta(z_1^+ + z_2^- - z_2^+ - z_1^-) [e^{-\varphi_\alpha(z)}, V_{12}, V_{21}];$$

$$(П.5) \quad \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 \theta(z-z_1) \theta(z_1-z_2) \theta(z_2^+ + z_1^- - z_1^+ - z_2^-) [e^{-\varphi_\alpha(z)}, V_{21}, V_{12}].$$

Учитывая, что в соответствии с (14) $\theta(z_1 - z_2) [V_{12}, V_{21}] = 0$, можно в коммутаторе (П.5) переставить V_{21} и V_{12} , приведя его к виду (П.4). Поскольку $\theta(z_1^+ + z_2^- - z_2^+ - z_1^-) + \theta(z_2^+ + z_1^- - z_1^+ - z_2^-) = 1$, то (П.4) и (П.5) суммируются в

$$(П.6) \quad \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 \theta(z-z_1) \theta(z_1-z_2) [e^{-\varphi_\alpha(z)}, V_{12}, V_{21}].$$

Используя (8), вычисляем теперь коммутаторы:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.7}) \quad & \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)[e^{-\varphi_\alpha}, V_{11}, V_{22}] = \\
 & = \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)e^{-\varphi_\alpha} \sum_{\beta, \gamma} e^{\psi_\beta(z_1)} e^{\psi_\gamma(z_2)} 2w_\beta \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \right] \right\} \times \\
 & \times 2w_\gamma \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\gamma} \right] \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{П.8}) \quad & \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)[e^{-\varphi_\alpha}, V_{12}, V_{21}] = \\
 & = \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)e^{-\varphi_\alpha} \sum_{\beta\gamma} \exp(\psi_\beta^+(z_1^+)) \exp(\psi_\gamma^+(z_2^+)) \exp(\psi_\beta^-(z_2^-)) \times \\
 & \times \exp(\psi_\gamma^-(z_1^-)) 2w_\beta \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \right] \right\} \times \\
 & \times 2w_\gamma \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

В (П.8) можно переписать $\exp(\psi_\beta^-(z_2^-)) \exp(\psi_\gamma^-(z_1^-)) \rightarrow \exp\left(\frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\beta\gamma}\right) \times$
 $\times \exp(\psi_\gamma^-(z_1^-)) \exp(\psi_\beta^-(z_2^-)) \rightarrow \exp\left(\frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\beta\gamma}\right) \exp(\psi_\beta^-(z_1^-)) \exp(\psi_\gamma^-(z_2^-))$ (послед-

ний переход — за счет наличия в (П.8) множителя $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma}$). Складывая теперь (П.7) и (П.8) и интегрируя, получаем окончательно

$$\begin{aligned}
 (\text{П.9}) \quad & (e^{-u_\alpha})_{(2)} = e^{-\varphi_\alpha} \frac{2w_\alpha}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\right) \right] \times \\
 & \times \sum_{\gamma} \frac{2w_\gamma}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{w_\alpha} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\gamma}\right) \right] \times \\
 & \times \Phi_{\alpha\gamma}^+ \Phi_{\alpha\gamma}^- \left[1 + \exp\left(\frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\alpha\gamma}\right) \right] / \left[1 + \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{i\hbar}{4} \hat{k}_{\alpha\gamma}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Если k — матрица Картана, то $\hat{k}_{\alpha\alpha} = 2/w_\alpha$, и (П.9) заметно упрощается:

$$\begin{aligned}
 (e^{-u_\alpha})_{(2)} & = e^{-\varphi_\alpha} \frac{2w_\alpha}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\right) \right] \times \\
 & \times \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{2w_\gamma}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\gamma}\right) \right] \Phi_{\alpha\gamma}^+ \Phi_{\alpha\gamma}^-.
 \end{aligned}$$

В третьем порядке

$$(e^{-u_\alpha(z)})_{(3)} = \frac{1}{(i\hbar)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 dz_2 dz_3 \theta(t-t_1) \theta(t_1-t_2) \theta(t_2-t_3) [e^{-\varphi_\alpha(z)}, V_{11}, V_{22}, V_{33}].$$

Введем аналогично предыдущему множитель $1 = [\theta^+(123) + \theta^+(132) + \theta^+(213) + \theta^+(231) + \theta^+(312) + \theta^+(321)] [\theta^-(123) + \theta^-(132) + \theta^-(213) + \theta^-(231) + \theta^-(312) + \theta^-(321)]$, где, например, $\theta^\pm(123) \equiv \theta(z_1^\pm - z_2^\pm) \theta(z_2^\pm - z_3^\pm)$. Совместимые с $\theta(t_1-t_2) \theta(t_2-t_3)$ произведения разобьем на 6 групп:

$$(\text{П.10}) \quad \theta^+(123) \theta^-(123);$$

$$(\text{П.11}) \quad \theta^+(123) \theta^-(132), \quad \theta^+(132) \theta^-(123);$$

$$(\text{П.12}) \quad \theta^+(123) \theta^-(213), \quad \theta^+(213) \theta^-(123);$$

$$(П.13) \quad \theta^+(123)\theta^-(231), \quad \theta^+(231)\theta^-(132), \quad \theta^+(312)\theta^-(123);$$

$$(П.14) \quad \theta^+(123)\theta^-(312), \quad \theta^+(132)\theta^-(213), \quad \theta^+(231)\theta^-(123);$$

$$(П.15) \quad \theta^+(123)\theta^-(321), \quad \theta^+(132)\theta^-(231), \quad \theta^+(213)\theta^-(312), \\ \theta^+(312)\theta^-(213), \quad \theta^+(231)\theta^-(132), \quad \theta^+(321)\theta^-(123).$$

Произведение (П.10) сразу дает вклад

$$(П.16) \quad \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{11}, V_{22}, V_{33}].$$

Рассмотрим наиболее сложную группу (П.15), содержащую 6 членов. В члене с $\theta^+(123)\theta^-(312)$ переобозначим $z_3^- \rightarrow z_1^-$, $z_1^- \rightarrow z_2^-$, $z_2^- \rightarrow z_3^-$; в члене с $\theta^+(132)\theta^-(213)$ переобозначим $z_2^+ \leftrightarrow z_3^+$, $z_1^- \leftrightarrow z_2^-$ и т. д. Соответствующие тройные коммутаторы примут вид $[e^{-\varphi\alpha}, V_{13}, V_{22}, V_{31}]$, $[e^{-\varphi\alpha}, V_{13}, V_{31}, V_{22}]$ и т. д.; они отличаются друг от друга лишь перестановками V , но, как видно из (14), V_{13} , V_{22} и V_{31} (при наличии $\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)$) все коммутируют друг с другом, так что все шесть тройных коммутаторов равны. Таким образом, сложение соответствующих членов сводится к сложению временных θ -функций, которые после переобозначения приняли вид $\theta(13-22)\theta(22-31) + \theta(13-31)\theta(31-22) + \theta(22-13)\theta(13-31) + \theta(22-31)\theta(31-13) + \theta(31-13)\theta(13-22) + \theta(31-22)\theta(22-13)$, где, например, $\theta(13-22)$ означает $\theta(z_1^+ + z_3^- - z_2^+ - z_2^-)$. Нетрудно убедиться, что эта сумма равна 1, так что группа (П.15) дает вклад

$$(П.17) \quad \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{13}, V_{22}, V_{31}].$$

Вклад остальных групп (П.11)–(П.14) вычисляется аналогично:

$$(П.18) \quad \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{11}, V_{23}, V_{32}],$$

$$(П.19) \quad \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{12}, V_{21}, V_{33}],$$

$$(П.20) \quad \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{13}, V_{21}, V_{32}],$$

$$(П.21) \quad \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{12}, V_{23}, V_{31}].$$

С помощью (8) вычисляем коммутаторы (П.16) и (П.19):

$$\begin{aligned} & \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{11}, V_{22}, V_{33}] = \\ & = \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)e^{-\varphi\alpha}2w_\alpha \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\right) \right] \times \\ & \times \sum_{\beta\gamma} 2w_\beta \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\delta_{\alpha\beta} + \frac{i\hbar}{2}\hat{k}_{\alpha\beta}\right) \right] \times \\ & \times 2w_\gamma \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\delta_{\alpha\gamma} + \frac{i\hbar}{2}(\hat{k}_{\alpha\gamma} + \hat{k}_{\beta\gamma})\right) \right] e^{\psi_\alpha(z_1)}e^{\psi_\beta(z_2)}e^{\psi_\gamma(z_3)}; \\ & \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)[e^{-\varphi\alpha}, V_{12}, V_{21}, V_{33}] = \\ & = \theta(z-z_1)\theta(z_1-z_2)\theta(z_2-z_3)e^{-\varphi\alpha}2w_\alpha \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\right) \right] \times \\ & \times \sum_{\beta\gamma} 2w_\beta \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\right) \right] \times \\ & \times 2w_\gamma \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\delta_{\alpha\gamma} + \frac{i\hbar}{2}(\hat{k}_{\alpha\gamma} + \hat{k}_{\beta\gamma})\right) \right] \times \\ & \times \exp(\psi_\alpha^+(z_1^+))\exp(\psi_\beta^+(z_2^+))\exp(\psi_\gamma^+(z_3^+))\exp(\psi_\alpha^-(z_2^-)) \times \\ & \times \exp(\psi_\beta^-(z_1^-))\exp(\psi_\gamma^-(z_3^-)). \end{aligned}$$

Мы видим, что эти два выражения можно сложить точно таким же образом, как это делалось во втором порядке. Аналогично объединяются члены (П.17), (П.18), (П.20),

«П.24). Приведем здесь лишь окончательную формулу для третьего порядка (в случае, когда k – матрица Картана):

$$\begin{aligned}
 (e^{-u_\alpha})_{(3)} = & e^{-\varphi_\alpha} \frac{2w_\alpha}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\right) \right] \times \\
 & \times \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{2w_\beta}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\beta}\right) \right] \times \\
 & \times \sum_{\gamma} \frac{2w_\gamma}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha} \delta_{\alpha\gamma} + \frac{i\hbar}{2} (\hat{k}_{\alpha\gamma} + \hat{k}_{\beta\gamma})\right) \right] \Phi_{\alpha\beta\gamma}^+ \Phi_{\alpha\beta\gamma}^- + \\
 & + e^{-\varphi_\alpha} \frac{2w_\alpha}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\hbar}{2w_\alpha}\right) \right] \times \\
 & \times \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{2w_\beta}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\beta}\right) \right] \times \\
 & \times \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{2w_\gamma}{i\hbar} \left[1 - \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \hat{k}_{\alpha\gamma}\right) \right] \Phi_{\alpha\beta\gamma}^+ \Phi_{\alpha\gamma\beta}^-.
 \end{aligned}$$

Литература

- [1] Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем. Препринт 84-14, Серпухов: ИФВЭ, 1981.
- [2] Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт, Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1981.
- [3] Лезнов А. Н. – ТМФ, 1980, 42, № 3, 343–349. Leznov A. N., Saveliev M. V. – Lett. Math. Phys., 1979, 3, 489.
- [4] Bäcklund A. V. – Math. Ann., 1876, 9, 297; 1880, 17, 285.
- [5] Leznov A. N., Fedoseev I. A. On integrability of Yang – Feldman equations for two-dimensional models of quantum field theory connected with generalized Toda lattice. Preprint ИФЭР 84-52, 1981.
- [6] Фаддеев Л. Д. Препринт P-2-79, Л.: ЛОМИ, 1978. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. – ТМФ, 1974, 21, № 2, 160–174. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. – ТМФ, 1975, 25, № 2, 147–163.
- [7] Замолодчиков А., Замолодчиков А. Препринт 35, М.: ИТЭФ, 1978.
- [8] Киржниц Д. А. Проблемы теории многих частиц. М.: Физматгиз, 1957.
- [9] Schwinger J. – Phys. Rev., 1948, 74, 416, 1439.
- [10] Бурбаки Н. Группы Ли и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.

Институт физики высоких энергий

Поступила в редакцию
9.III.1982 г.

EXPLICITLY INTEGRABLE MODELS OF QUANTUM FIELD THEORY WITH EXPONENTIAL INTERACTION IN TWO-DIMENSIONAL SPACE-TIME

LEZNOV A. N., FEDOSSEYEV I. A.

In two-dimensional quantum field theory models described by the system of equations $\square u_\alpha = g \exp(ku)_\alpha$ the Heisenberg operators are found explicitly as functionals of asymptotical fields φ_α^{in} satisfying the equations $\square \varphi_\alpha^{in} = 0$ and corresponding commutation relations. It is shown that in the presence of finite-dimensional group of internal symmetries when k coincides with the Cartan matrix of a semisimple Lie group, perturbation theory series for the operators $\exp(-u_\alpha)$ are reduced to polynomials over the coupling constant g , the powers of which are determined by the structure of fundamental representations of the corresponding group.