

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, Численное исследование особенностей пространственного развития неустойчивости Рэлея–Тейлора,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000, том 40, номер 7, 1098–1103

<https://www.mathnet.ru/zvmmf1477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

25 апреля 2025 г., 09:30:59



УДК 519.634

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА¹⁾

© 2000 г. О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин

(123056 Москва, 2-я Брестская ул., 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН)

Поступила в редакцию 04.02.2000г.

Численно исследуются особенности пространственно-нестационарного развития неустойчивости Рэля–Тейлора. Рассмотрены одномодовая задача, задача об эволюции трехмерных структур из двумерного возмущения и задача о росте толщины трехмерной турбулентной зоны перемешивания. Измерен коэффициент турбулентного перемешивания. Результаты хорошо согласуются с данными аналитических и экспериментальных работ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость Рэля–Тейлора (НРТ) возникает во многих нестационарных физических явлениях, в которых жидкости (газы или другие среды), разделенные контактной поверхностью, подвержены воздействию объемной силы (например, силы тяжести), направленной в сторону более легкой среды (или вакуума). НРТ проявляет себя в самых разнообразных природных явлениях и технологических приложениях, таких, как, например, импульсное сжатие мишеней инерционного термоядерного синтеза, турбулентность, ударно-волновые эксперименты, взрывные течения, сжатие магнитного поля металлическим лайнером, удержание плазмы магнитным полем, взрыв сверхновых и коллапсирующие звездные ядра в астрофизике, ионосферные явления в геофизике, образование колоний микроорганизмов в воде и многих других [1]. В последнее время усиливается интерес к изучению НРТ в связи с задачами инерционного термоядерного синтеза. В реальных условиях различные факторы могут оказывать значительное влияние на развитие НРТ: поверхностное натяжение, сжимаемость, вязкость, теплопроводность, диффузия, ударные волны, нестационарность режима ускорения, неоднородности, физические свойства сред и др.

Быстрый рост производительности компьютеров в последние десятилетия стимулировал развитие вычислительного направления в механике жидкости вообще и для исследования проблем НРТ в частности. Использование численных моделей позволяет избавиться от побочных факторов и сконцентрироваться на главном, что бывает нелегко достичь в реальном эксперименте [2]–[4]. Помимо этого, численная модель дает более полную информацию об явлении по сравнению с экспериментом. Большое количество работ вычислительного плана было посвящено двумерному численному моделированию НРТ (см. [5]–[11]). Эти результаты в ряде случаев позволяют достаточно хорошо интерпретировать натуральный эксперимент, однако они не объясняют многих важных деталей. Увеличение размерности явления (переход от двумерных течений к пространственным) сопровождается физическими эффектами, которые в задачах меньшей размерности либо отсутствуют, либо проявляются в количественно иной степени. В то же время число вычислительных работ по НРТ в пространственной постановке остается весьма ограниченным [12]–[16].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для численного исследования НРТ используется модель сжимаемой невязкой многокомпонентной среды. Исходной для построения численных схем расчета является полная система уравнений Эйлера, записанная в дивергентной форме. Это уравнения для плотности легкой и

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00931) и программы финансирования ведущих научных школ РФ (код проекта 96-15-96137).

тяжелой среды

$$\partial(\rho\xi_i)/\partial t + \text{div}(\rho\xi_i\mathbf{V}) = 0, \quad i = 1, 2,$$

уравнения для трех компонент плотности импульса

$$\partial(\rho u)/\partial t + \text{div}(\rho u\mathbf{V}) = -\partial P/\partial x,$$

$$\partial(\rho v)/\partial t + \text{div}(\rho v\mathbf{V}) = -\partial P/\partial y,$$

$$\partial(\rho w)/\partial t + \text{div}(\rho w\mathbf{V}) = -\partial P/\partial z - \rho g$$

и, наконец, уравнение для плотности полной энергии

$$\partial(\rho E)/\partial t + \text{div}[(\rho E + P)\mathbf{V}] = -\rho g w.$$

Здесь t – время, (x, y, z) – координаты; $\mathbf{V} = (u, v, w)$ – вектор скорости; ρ – плотность; ξ_1 и ξ_2 – массовые концентрации компонент; $\xi_1 + \xi_2 = 1$; $E = e + \mathbf{V}^2/2$ – удельная полная энергия и e – удельная внутренняя энергия; $g > 0$ – абсолютное значение силы тяжести. Здесь мы считаем, что направление силы тяжести противоположно направлению оси z , которая направлена вверх. Для замыкания системы уравнений требуются уравнения состояния для каждой компоненты. В данной работе во всех расчетах используется уравнение состояния идеального газа $P = (\gamma - 1)\rho e$.

Во всех представленных ниже расчетах область интегрирования имеет форму прямоугольного параллелепипеда, на боковых границах которого ставятся граничные условия периодичности, а на верхней и нижней границах области – условия непротекания. Никаких дополнительных условий на поверхности, разделяющей легкую и тяжелую среду, не ставится.

3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Мы использовали квазимонотонный сеточно-характеристический метод второго порядка аппроксимации. Подобный этому гибридный монотонный метод был разработан и применялся для численного моделирования течений несжимаемой жидкости [17]. Для модельного линейного уравнения переноса это – комбинация схем с ориентированными и центральными разностями. Для такой схемы в применении к уравнению переноса условие монотонности выполняется строго, т.е. любой монотонный набор значений функции в узлах сетки остается монотонным и через шаг по времени. Используя сеточно-характеристический формализм [18], [19], мы обобщили эту схему на случай сжимаемого газа. В результате конечная явная расчетная схема имеет такие полезные свойства, как консервативность, монотонность, второй порядок аппроксимации (на гладких решениях), и в то же время не использует ни искусственную вязкость, ни сглаживание, ни процедуры ограничения потока (flux limiter), часто использующиеся в современных схемах вычислительной динамики жидкости. В данной методике переключение между схемами с центральными и ориентированными разностями (определяющее квазимонотонность с сохранением второго порядка аппроксимации) выполняется отдельно для каждой характеристики и зависит от знака соответствующей характеристики и знака одного дополнительного параметра.

Мы не отслеживали специальным образом поверхность раздела (front tracking), как это часто делается в двумерных задачах по НРТ [8], [9]. Для трехмерных проблем по НРТ такое отслеживание становится чрезвычайно громоздким и достаточно дорогим, особенно для многомодовых задач. В нашем случае контактная поверхность неявно управляется изменениями плотности (концентрации) в каждом из узлов сетки.

Наша математическая модель не учитывает реальную вязкость и поверхностное натяжение. Тем не менее сама конструкция схемы с требованием монотонности обеспечивает некоторый нелинейный диссипативный механизм, который вызывает затухание коротковолновых гармоник. Другими словами, гармоники с длиной волны меньшей, чем некоторая эффективная длина волны λ_c , гасятся. Это подтверждается нашими расчетами. Очевидно, λ_c приблизительно равняется нескольким шагам вычислительной конечно-разностной сетки. Аналогичные рассуждения приведены в работе [14]. Для того чтобы погасить коротковолновые гармоники и обеспечить возможность устойчивого счета в [15], [16] в трехмерные расчеты была введена конечная вязкость.

4. ОДНОМОДОВАЯ ЗАДАЧА

Параметры задачи выбирались следующими: высота области интегрирования 10π , плоская контактная граница делит область в соотношении 5 (нижняя часть; легкая жидкость с плотностью $\rho_l = 0.1$) к 3 (верхняя часть; тяжелая жидкость с плотностью $\rho_h = 1$). Поперечные размеры области составляют $\lambda_x \times \lambda_y$, где $\lambda_x = \lambda_y = \lambda = 2\pi$. Отношение плотностей $\mu = \rho_l/\rho_h = 0.1$ и число $At = (\rho_h - \rho_l)/(\rho_h + \rho_l) = 0.818$. Начальное распределение давления во всей области задается формулой $P = P_0 - \rho g(z - z_0)$, где P_0 – давление на нижней границе области $z = z_0$. Показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. С помощью потенциала задается малое начальное возмущение скорости, эквивалентное малому возмущению самой контактной поверхности:

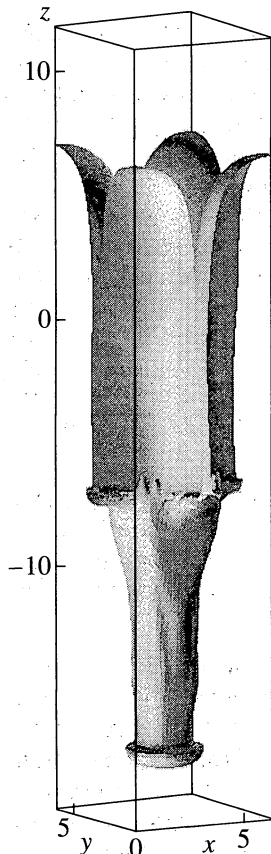
$$\mathbf{V} = \nabla\varphi, \quad \varphi = (A_{10}/k)\cos(kx)\exp(-k|z|)\text{sign}z + (A_{01}/k)\cos(ky)\exp(-k|z|)\text{sign}z,$$

где $k = k_x = k_y = 2\pi/\lambda$ и амплитуда возмущения $A_{10} = A_{01} = -0.025\sqrt{g/k}$. Для расчета использовалась сетка $40 \times 40 \times 200$ с одинаковым шагом по всем координатным направлениям.

Основными характеристиками эволюции системы являются волновое число начального возмущения k и сила тяжести g . Со временем скорость подъема пузыря выходит на линейный режим $\approx \sqrt{g/k}$, в то время как радиус кривизны пузыря R меняется от бесконечности до величины порядка $4/k$. На фиг. 1 показаны топологические детали контактной поверхности на момент времени $t = 11$. На фиг. 2 представлен график подъема пузыря (с точками), который становится фактически линейным при $t > 8$. Осредненное значение скорости подъема вершины пузыря на временном интервале (8, 10) равно

$$v_b = (0.90 \pm 0.05)\sqrt{g/k} = (1.0 \pm 0.05)\sqrt{Atg/k};$$

соответствующая этому значению прямая также показана на фиг. 2.

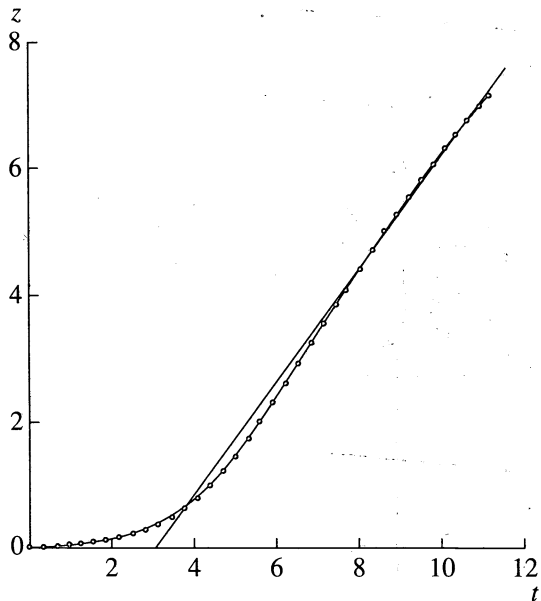


Фиг. 1.

5. ЗАДАЧА ОБ ЭВОЛЮЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУР ИЗ ДВУМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Размеры области в этой задаче выбирались следующими: $2\pi \times 2\pi \times 4\pi$. В данном случае задавалось малое двумерное возмущение контактной границы с амплитудой 0.013. Контактная граница неизменна вдоль оси y , а вдоль оси x имеет форму синусоиды (три периода). Контактная граница делит область в соотношении 5 к 3. В большей нижней части находилась легкая жидкость с плотностью $\rho_l = 0.5$, а сверху – с плотностью $\rho_h = 1$. В этом случае отношение плотностей $\mu = 0.5$ и $At = 0.333$. Начальное распределение давления задавалось аналогично одномодовой задаче. Для того чтобы могла возникнуть трехмерность течения, мы задавали “шум” в легкой и тяжелой средах, т.е. все компоненты скорости во всех ячейках имели равномерно распределенное по интервалу $[-\epsilon, \epsilon]$ случайное значение. В данном расчете $\epsilon = 0.0005$ имеет ничтожно малое по сравнению со скоростью звука значение. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Данный расчет был выполнен на сетке $60 \times 60 \times 120$.

Расчет показал, что развитие контактной границы остается двумерным достаточно долго: до $t \approx 10$ (фиг. 3), после чего начинается ускоренное формирование трехмерных пузырей (момент времени $t = 14$ на фиг. 4). Характерный размер формирующихся трехмерных пузырей соответствует наиболее быстрорастущей моде (длина волны порядка λ_c), определяемой численной диссипацией. Эти трехмерные образования растут значительно быстрее чисто двумерных пузырей. Это иллюстрирует фиг. 5, где представлен график подъема верхней границы пузырей для данного трехмерного расчета и соответствующего двумерного расчета, выполненного на сетке 60×120 .



Фиг. 2.

менем пропорционально gt^2 . Так, например, высота, до которой поднимается легкая жидкость в тяжелой [2]–[4], есть

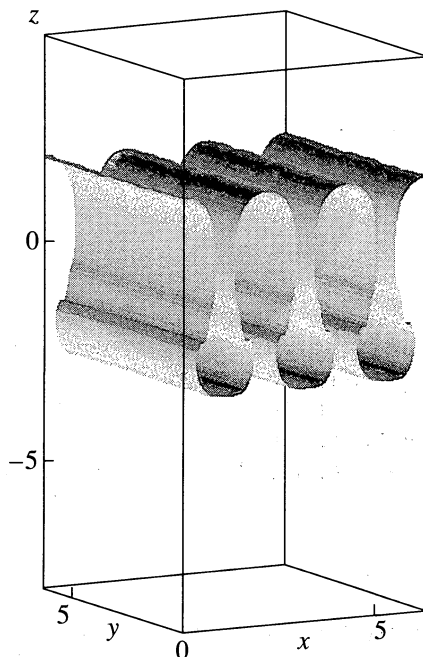
$$z = \alpha Atgt^2$$

и коэффициент турбулентного перемешивания α нечувствителен к отношению плотностей. На фиг. 7 представлена зависимость координаты z от комбинации $Atgt^2$. Эта зависимость имеет значительный линейный участок с $\alpha = 0.073$, однако это справедливо не с самого начала эволюции. Очевидно, требуется определенное время, чтобы выйти на автомодельный режим gt^2 . Ведь вначале заданы первые 20×20 гармоник, а на начальной стадии именно высокочастотные гармоники растут наиболее быстро. На фиг. 7 приведена также аналогичная зависимость для соответст-

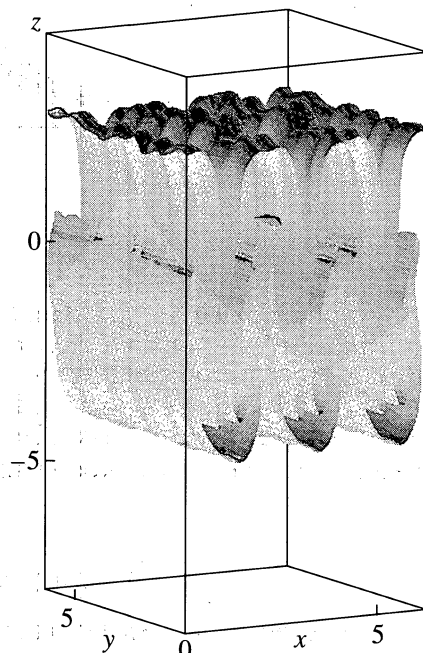
6. РОСТ ТОЛЩИНЫ ТРЕХМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЗОНЫ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Размеры расчетной области, которая делилась надвое контактной границей, выбирались следующими: $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. Вверху находилась тяжелая жидкость с плотностью $\rho_h = 1$, и внизу легкая жидкость с плотностью $\rho_l = 0.5$, т.е. в данном примере отношение плотностей $\mu = 0.5$ и число Атвуда $At = 0.333$. Малое начальное трехмерное возмущение контактной поверхности задавалось как случайная комбинация первых 20×20 гармоник Фурье. Амплитуды мод a_{mn} были масштабированы таким образом, чтобы давать $(\sum \sum a_{mn}^2)^{1/2} = 0.002\lambda$, где $\lambda = 2\pi$ – размер области. Расчет выполнен на сетке $100 \times 100 \times 100$.

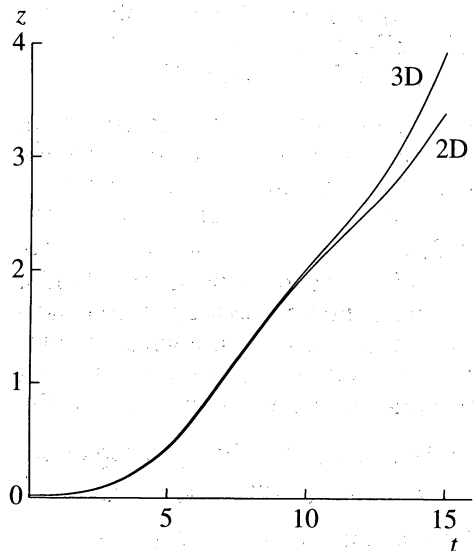
Характерная форма контактной поверхности на достаточно далекой стадии ($t = 10$) приведена на фиг. 6. Эксперименты [2]–[4] показывают, что в случае, когда неустойчивость развивается за счет начального малого случайного возмущения, ширина зоны турбулентного перемешивания растет со вре-



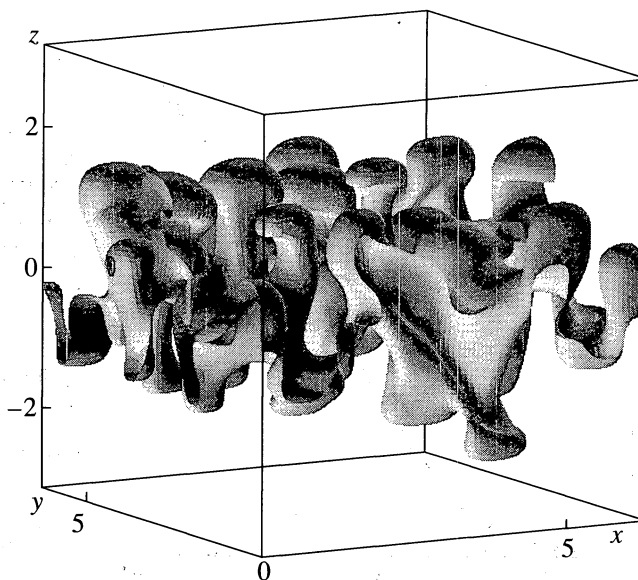
Фиг. 3.



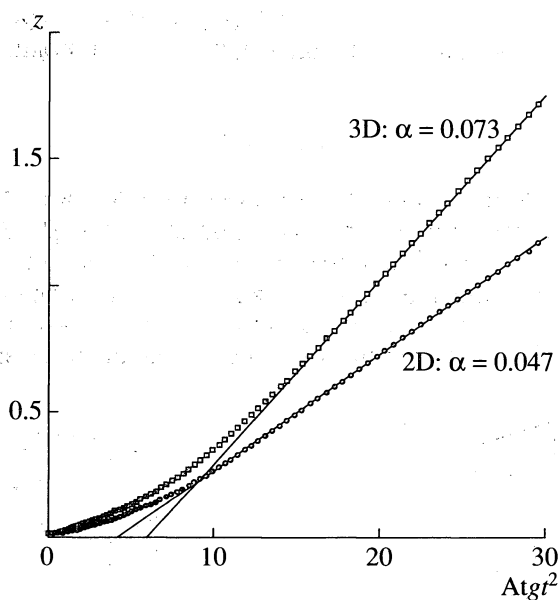
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

вующего двумерного расчета, выполненного для случайного возмущения из 20 мод на сетке 100×100 . Отсюда хорошо видно, что трехмерная зона турбулентного перемешивания растет значительно быстрее двумерной. Кроме того, выполнив двумерный расчет на сетке 200×200 с 40 гармониками, мы убедились, что коэффициент турбулентного перемешивания α фактически не зависит от количества узлов сетки. По сути дела, отличие только в том, что на более подробной сетке выход на линейный (в координатах z и Atg^2) режим эволюции происходит несколько раньше.

7. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В этой работе численно исследовано несколько пространственных задач развития НРТ. В первой проблеме изучено развитие трехмерного одномодового возмущения. Измеренная в вычислительном эксперименте скорость подъема пузыря ($1.0 \sqrt{Atg/k}$) очень хорошо согласуется с

данными аналитических работ (см. [20], [21], $1.05 \sqrt{g/k}$). Расчетный радиус кривизны пузыря и радиус, ожидаемый в работах [20], [21], также весьма близки между собой ($4/k$).

Численное моделирование второй задачи весьма наглядно показало, что двумерное возмущение неустойчиво и, сколь бы малыми не были отклонения от двумерности, развитие неустойчивости станет рано или поздно трехмерным. Характерный размер начальных трехмерных образований определяется схемной диссипацией в вычислительном эксперименте и вязкостью и/или поверхностным натяжением в реальных опытах.

В последней задаче рассмотрено развитие неустойчивости, вызываемое трехмерным случайным возмущением, и измерен в численном эксперименте коэффициент турбулентного перемешивания. Отметим несколько особенностей данного вычислительного эксперимента. Во-первых, это наличие ярко выраженного автомодельного участка развития турбулентной зоны перемешивания. Связанный с этим режимом коэффициент турбулентного перемешивания значительно выше коэффициента для соответствующей двумерной постановки. Во-вторых, расчет задачи на различных двумерных сетках показывает, что коэффициент турбулентного перемешивания не зависит от количества узлов сетки. Это говорит о достоверности данных результатов и адекватности поставленного вычислительного эксперимента. Наконец, самое главное, измеренный коэффициент турбулентного перемешивания прекрасно согласуется с экспериментом [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sharp D.H. An overview of Rayleigh-Taylor instability // *Physica D*. 1984. V. 12. P. 3–18.
2. Read K.I. Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability // *Physica D*. 1984. V. 12. P. 45–58.
3. Linden P., Redondo J., Youngs D. Molecular mixing in Rayleigh-Taylor instability // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 265. P. 97–124.
4. Marinak M.M., Glendinning S.G., Wallace R.J. et al. Non-linear evolution of a three-dimensional multimode perturbation // *Phys. Rev. Letts.* 1998. V. 80. P. 4426–4429.
5. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical study of large-amplitude free-surface motion // *Phys. Fluids*. 1966. V. 9. № 5. P. 842–851.
6. Menikoff R., Zemach C. Rayleigh-Taylor instability and the use of conformal maps for ideal fluid flow // *J. Comput. Phys.* 1983. V. 51. № 1. P. 28–64.
7. Baker G.R., Meiron D.I., Orszag S.A. Vortex simulations of the Rayleigh-Taylor instability // *Phys. Fluids*. 1980. V. 23. № 8. P. 1485–1490.
8. Gardner G., Glimm J., McBryan O. et al. The dynamics of bubble growth for Rayleigh-Taylor instability // *Phys. Fluids*. 1988. V. 31. № 3. P. 447–465.
9. Glimm J., Li X.L., Menikoff R. et al. A numerical study of bubble interactions in Rayleigh-Taylor instability for compressible fluids // *Phys. Fluids A*. 1990. V. 2. № 11. P. 2046–2054.
10. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М., Демьянов А.Ю. Взаимодействие мод возмущений при неустойчивости Рэлея-Тейлора // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 288. С. 1071–1074.
11. Белоцерковский О.М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. М.: Наука, 1994.
12. Давыдов Ю.М., Пантелеев М.С. Развитие трехмерных возмущений при неустойчивости Рэлея-Тейлора // *Ж. прикл. механ. и техн. физ.* 1981. № 1. С. 117–122.
13. Yabe T., Hoshino H., Tsuchiya T. Two- and three-dimensional behavior of Rayleigh-Taylor and Kelvin-Helmholtz instabilities // *Phys. Rev. A*. 1991. V. 44. P. 2756–2758.
14. Youngs D.L. Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability // *Phys. Fluids A*. 1991. V. 3. № 5. P. 1312–1320.
15. Li X.L. Study of three-dimensional Rayleigh-Taylor instability // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5. № 8. P. 1904–1913.
16. Li X.L. A numerical study of three-dimensional bubble merger in the Rayleigh-Taylor instability // *Phys. Fluids*. 1996. V. 8. № 2. P. 336–343.
17. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
18. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1969. Т. 9. № 2. С. 373–386.
19. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1994.
20. Абаржи С.И., Иногамов Н.А. Стационарные решения в неустойчивости Рэлея-Тейлора для пространственных периодических течений // *Ж. эксперим. и теор. физ.* 1995. Т. 107. С. 132–143.
21. Abarzhi S.I. Stable steady flows in Rayleigh-Taylor instability // *Phys. Rev. Letts.* 1998. V. 81. P. 337–340.