Ю. А. Терехова, Односторонние ниль-идеалы и обобщенные тождества в полупервичных кольцах, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 809–811

Односторонние ниль-идеалы и обобщенные тождества в полупервичных кольцах

Ю. А. ТЕРЕХОВА

Аннотация

В работе доказано, что полупервичное кольцо (кольцо со строгим обобщенным тождеством) не содержит ненулевых односторонних идеалов со свойством (r) Гарднера [1] (соответственно ненулевых односторонних ниль-идеалов).

Abstract

Ju. A. Terekhova, One-sided nil-ideals and generalized polynomial identities of semi-prime rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 809–811.

In the paper it is shown that semi-prime rings (rings with strong identities) have no one-sided ideals with Gardner's property (r) [1] (respectively, no non-zero one-sided nil-ideals).

Для удобства читателя приведем определение свойства (r): кольцо R обладает свойством r, если для любой последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ элементов кольца существует перестановка $(a_{p(1)}, a_{p(2)}, \ldots)$ и индекс n, такие, что $a_{p(1)}a_{p(2)}\ldots a_{p(n)} = 0$. Для характеризации таких колец Гарднер [1] ввел понятие серединного аннулятора упорядоченной пары (a, b) элементов кольца R, определяемого как $\alpha(a, b) = \{r \in R \mid arb = 0\}$. В той же статье Гарднер поставил вопрос: должны ли кольца, обладающие свойством (r), совпадать со своим первичным радикалом.

В данной работе доказано, что поставленный Гарднером вопрос решается положительно. Это следует из следующего утверждения, так как свойство (r) сохраняется при переходе к гомоморфным образам.

Теорема 1. *Не существует ненулевых первичных колец, обладающих свойством* (r).

Доказательство. Пусть R — ненулевое первичное кольцо, обладающее свойством (r), Q — его мартиндейловское кольцо частных, C — центр Q и $S = RC$ — центральное замыкание R в Q (см. [2]). Тогда R является конечным объединением серединных аннуляторов упорядоченных пар элементов (см. [1], предложение 2), т. е. существуют такие ненулевые элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, что

$$R = \alpha(a_1, a_2) \cup \alpha(a_3, a_4) \cup \ldots \cup \alpha(a_n, a_{n+1}).$$

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 809–811.

Тогда
$$a_1xa_2xa_3xa_4\dots a_nxa_{n+1}=0$$
для любого $x\in R$.

Таким образом, кольцо R удовлетворяет нетривиальному обобщенному тождеству. Кроме того, кольцо R является ниль-кольцом. Это легко выводится из свойства (r).

Поскольку R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству с коэффициентами из R и является первичным кольцом, то его центральное замыкание S также удовлетворяет нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству и, следовательно, содержит минимальный правый идеал eS, причем eSe — тело (см. [2], теорема 3).

Заметим, что $eS\cap R\neq 0$, так как для любого ненулевого элемента $q\in Q$ существует такой ненулевой идеал U кольца R, что $0\neq qU\subseteq R$.

Следовательно, $eS\cap R$ является ненулевым правым ниль-идеалом в R. Пусть $r\in R\cap eS$, $r=es$. Тогда существует такое целое число k, что $r^k=(es)^k=0$, откуда $(ese)^k=0$.

Так как eSe — тело, то последнее равенство означает, что $ese=0$. Тогда $eses=0$, т. е. $(es)^2=0$. Следовательно, кольцо R содержит ненулевой нильпотентный идеал (см. [3], лемма 1.1). Но R — первичное кольцо.

Теорема доказана.

Лемма. *Полупервичное кольцо не содержит ненулевых левых (правых) идеалов, радикальных в смысле Бэра.*

Доказательство. Пусть R — полупервичное кольцо, L — его ненулевой левый идеал.

Поскольку первичный радикал совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов (см. [4], предложение 3.2.1), то достаточно доказать, что L содержит элемент, который не является строго нильпотентным.

Так как $L\cdot L\neq 0$, то существует такой элемент $a\in L$, что $La\neq 0$. Положим $a=a_1$. Заметим, что $a_1La_1\neq 0$. Допустим, что элементы $a_1,\dots,a_n$ построены. Поскольку $a_nLa_n\neq 0$, то это означает, что $La_nLa_n\neq 0$. Тогда существует такой $a_{n+1}\in a_nLa_n$, что $La_{n+1}\neq 0$. Отсюда следует, что $a_{n+1}La_{n+1}\neq 0$.

Замечание. Вероятно, результат, указанный в лемме, не является новым.

Следствие 1. *Полупервичное кольцо не содержит ненулевых левых (правых) идеалов, обладающих свойством* (r).

Теорема 2. *Полупервичное кольцо со строгим обобщенным тождеством $f(x)\in Q\langle X\rangle_C$ не содержит ненулевых левых (правых) ниль-идеалов.*

Доказательство. Пусть R — полупервичное кольцо со строгим обобщенным тождеством $f(x)\in Q\langle X\rangle_C$ (см. [5], определение 1.7); $Q(R)$ — полное левое кольцо частных кольца R, $S=RC\subseteq Q(R)$, где C — центр кольца $Q(R)$.

Пусть N — ненулевой левый ниль-идеал кольца R. В силу первичности кольца R и наличия строгого обобщенного тождества существует такой левый идеал $L \subseteq R$, что $l(R, L) = 0$ и L — PI-кольцо (см. [6], теорема 1). Тогда SNL — PI-кольцо. Стандартные рассуждения, опирающиеся на теорему Ширшова о высоте, позволяют сделать вывод, что SNL — левый ниль-идеал. Но S содержит ненулевой идемпотент (см. [4], теорема 1.10). Заметим, что в диссертации [7] теорема 1.10 сформулирована в более общем виде, когда $f(x) \in Q\langle X\rangle_C$. Получили противоречие.

Пусть теперь N — правый ниль-идеал и $0 \neq a \in N$. Тогда Ra — ненулевой левый ниль-идеал кольца R, что невозможно.

Теорема доказана полностью.

Следствие 2. *Полупервичное кольцо со строгим обобщенным тождеством имеет нулевой ниль-радикал.*

Автор благодарен К. И. Бейдару за постановку задачи и В. Т. Маркову за руководство работой.

Литература

[1] B. J. Gardner. Some nil rings properties related to T-nilpotence // Bull. Austral. Math. Soc. — 1992. — V. 46. — P. 519–523.

[2] Wallace S. Martindale. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. — 1969. — V. 12. — P. 576–584.

[3] I. N. Herstein. Topics in ring theory. — Chicago: Univ. Chicago Press, 1969.

[4] И. Ламбек. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[5] К. И. Бейдар. Кольца с обобщенными тождествами II // Вестник Моск. ун-та. Матем., механ. — 1977. — № 3. — С. 30–37.

[6] К. И. Бейдар. Кольца с обобщенными тождествами IV // Вестник Моск. ун-та. Матем., механ. — 1980. — № 4. — С. 3–6.

[7] К. И. Бейдар. Кольца с обобщенными тождествами: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 1977.

Статья поступила в редакцию в январе 1995 г.